

CALCULO NUMERICO DE ESTRUCTURAS LAMINARES DE REVOLUCION UTILIZANDO EL METODO DE LINEAS Y LAS EDAS*

Lilliam Alvarez Díaz¹ y Evelyn Alvarez Sierra, Instituto de Cibernética Matemática y Física, CITMA, Cuba
Pimpo Hernández Pérez, Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", ISPJAE, Cuba

RESUMEN

Se plantean las ecuaciones diferenciales parciales básicas de la teoría membranal en coordenadas relativas que modelan el cálculo de un cimientro tronco-cónico en un problema de la Ingeniería Civil. El problema da lugar a una secuencia de dos sistemas de tres ecuaciones, uno para el cálculo de las acciones interiores proyectadas y otro para los corrimientos o desplazamientos. En el primer sistema se plantean dos ecuaciones diferenciales parciales y una, que de manera natural es una ecuación algebraica. En el caso particular del cimientro tronco-cónico, por ser una superficie de revolución, el modelo se plantea en coordenadas cilíndricas (ρ, θ) . Al aplicar el método de líneas, se discretizó la variable angular θ , dejando ρ sin discretizar. Así ambos modelos se transforman en dos sistemas de ecuaciones diferenciales-algebraicas (EDAs) de valor inicial, que fueron resueltas numéricamente con el código DASSL.

ABSTRACT

The basic partial differential equations of thin elastic shells are posed in relative coordinates, modeling a truncated cone foundation in a problem from civil engineering. This problem produces a sequence of two systems of three equations, one for the computation of the projected inner actions and the other for the displacements. Two partial differential equations are posed in the first system and the third equation is a natural algebraic equation. In the particular case of the truncated cone foundation, being a shell of revolution, the model is proposed in cylindrical coordinates (ρ, θ) . The angular variable θ was discretized for the method of lines, and ρ was left continuous variable. Both models are transformed into two systems of differential-algebraic equation (DAEs) with initial values, which are numerically solved by the DASSL code.

MSC: 65M20

1. INTRODUCCION

Las estructuras laminares o "shells" son una de las soluciones más importantes que aparecen en la realidad. Una prueba de ello es que la misma Naturaleza ha protegido el cerebro humano con una estructura laminar. Las láminas se caracterizan porque una de sus dimensiones, el espesor, es mucho menor que las otras dos, y además, por su curvatura, que la diferencian de las placas planas o "plates". Sirven para construir cubiertas, depósitos, silos o depósitos de sólidos a granel y cimentaciones, entre otras estructuras.

Los cimientros laminares de revolución son apropiados para estructuras como torres, faros, chimeneas y tanques elevados, y con ellas se logran economías en la cantidad de hormigón del orden hasta de un 50 %. Esta cifra proviene de la experiencia internacional, confirmada por las realizaciones cubanas como son:

- Cimentación tronco-cónica para un depósito elevado de 280 m³ de capacidad, construido en el Instituto de Ciencia Animal.
- Cimentación en forma de curva de campana de Gauss para un depósito elevado en la hoy sede universitaria de Matanzas.
- Cimentación tronco-cónica para un Faro de 50 m de altura en la Isla de la Juventud.

* Read at 1st. Operations Research Meeting held at Havana. September 1998

¹ e-mail: lilliam@cidet.icmf.inf.cu

Es cierto que las cimentaciones laminares presentan algunas dificultades constructivas, pero no son insuperables, como lo demuestran las realizaciones cubanas arriba citadas y las múltiples edificadas en otros países.

Los antecedentes históricos de la teoría de las láminas pueden verse, por ejemplo, en el clásico libro de Novozhilov (Novozhilov, U.V., 1959). La teoría comenzó a desarrollarse a fines del siglo pasado con los trabajos de G. Aron y E.H. Love y ha continuado desarrollándose impetuosamente durante todo el presente siglo. Nombres tan importantes como los de Galerkin, Vlasov, Goldenveizer, Timoshenko, Pucher, Koiter, Flugge, Soare, figuran entre los grandes científicos que realizaron aportes notables en el desarrollo de esta teoría.

En Cuba el Dr. Pimpo Hernández, del ISPJAE, presentó en 1969 una unificación de la teoría de láminas, empleando coordenadas relativas (1969).

Es curioso notar que un antecedente remoto de esta teoría (y de toda la teoría de estructuras en general) está en la famosa Ley de Hooke, descubierta en 1660, pero no publicada hasta 1676. La Ley dice, en su versión original en latín *Ut tensio sic vis*, o en traducción moderna, "*La tensión es proporcional a la deformación*" Como era costumbre en aquella época, Hooke publicó su Ley en forma de un anagrama "ceiinoossstuu" (1644).

Los métodos tradicionales para el cálculo de láminas son, fundamentalmente:

- Método clásico
- Método en diferencias finitas
- Métodos de elementos finitos

Aquí se denomina método clásico a la búsqueda de las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales, (EDPs), del campo, es decir, las ecuaciones de equilibrio, geométricas y físicas por métodos analíticos. (Timoshenko y Woinowsky-Krieger, 1959, 1960, Samartin, 1997)

Los métodos en diferencias finitas y de elementos finitos, que transforman los sistemas de EDPs en sistemas de ecuaciones algebraicas han sido los más empleados hasta la fecha. (1968, 1994, Palma 1997, Chapelle, 1997)

En el presente trabajo proponemos una técnica numérica alternativa para los cálculos de las láminas, que consiste en emplear un método semi-discreto, es decir, discretizar todas las variables independientes, excepto una y transformar el sistema de EDPs en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, (EDOs).

Más aún, como se podrá ver en el Epígrafe 2, el sistema de ecuaciones de equilibrio del modelo se compone de dos EDPs y una ecuación algebraica. Es por ello que es perfectamente lógico aplicar el método semi-discreto y transformar entonces los problemas en dos sistemas de ecuaciones diferenciales-algebraicas, (EDAs), en este caso, con condiciones iniciales.

Para la solución de las EDAs se empleó el código DASSL en FORTRAN 77 (1989).

2. EL MODELO MATEMATICO

2.1. Ecuaciones de equilibrio para las acciones interiores

Sea el cimientado de revolución que se muestra en la Figura 1.

La superficie de referencia es un plano polar horizontal S, que contiene a la circunferencia de unión B del pedestal con el cimientado. El borde inferior A del cimientado es libre, y el borde B articulado o empotrado.

Para la construcción del modelo matemático nos basamos en las coordenadas paramétricas definidas en (1972).

En este caso, las coordenadas paramétricas en S son, según se ve en la Figura 1.

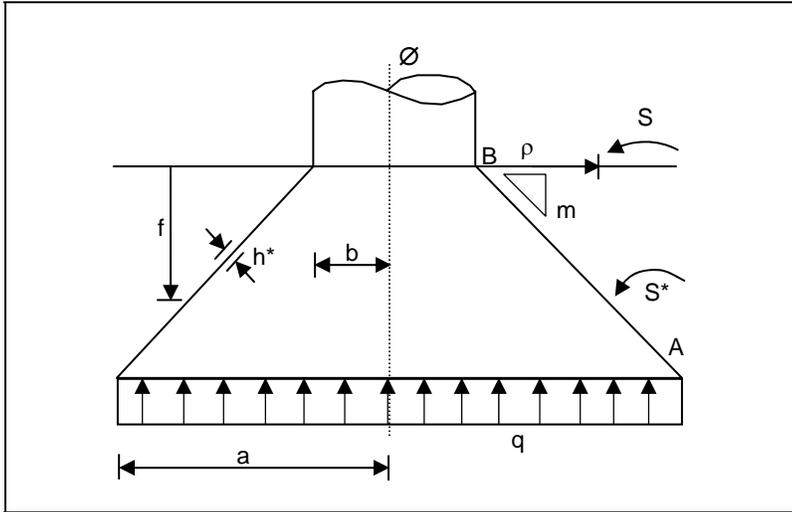


Figura 1. Cimentero Tronco-Cónico

- S:** superficie de referencia
- S*:** superficie media de la lámina
- A:** borde libre
- B:** borde apoyado
- b:** radio del pedestal
- a:** radio máximo del cimentero

f: distancia de la superficie

de referencia a la superficie
media de la lámina.

- m:** pendiente del cono
- q:** carga
- h*:** espesor de la lámina

$$\alpha_1 = \rho \quad \alpha_2 = \theta \quad (2.1)$$

y las ecuaciones paramétricas de S resultan ser (Figura 1)

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad z = 0 \quad (2.2)$$

La ecuación relativa de la superficie media del cimentero, es conocida, y es de la forma:

$$f = f(\rho) = m(\rho - b) \quad (2.3)$$

$$m = 3/2$$

Esta ecuación no depende de θ , por ser el cimentero de revolución.

Conociendo las ecuaciones paramétricas y los vectores unitarios tangentes y normales (1972), se obtienen los parámetros de Lamé, los radios de curvatura geodésicos y los radios de curvatura principales:

$$A_1 = 1 \quad A_2 = \rho \quad \rho_1 = \infty \quad \rho_2 = \rho \quad R_1 = R_2 = \infty \quad (2.4)$$

Una vez conocida la ecuación relativa (2.3), pueden calcularse los parámetros característicos de S^* , ver (1972).

$$B_1 = \tan\beta_1 = f_\rho \quad B_2 = 0 \quad K_1 = \sqrt{1 + f_\rho^2} \quad K_2 = 1 \quad (2.5)$$

donde el subíndice ρ de f indica derivada (total) con respecto a ρ .

Con ello, las ecuaciones membranales de equilibrio interno, que en lo adelante llamaremos problema I(P.I) (1972), se convierten en:

$$\frac{N_1 - N_2}{\rho} + \frac{\partial N_1}{\partial \rho} + \frac{\partial S}{\rho \partial \theta} + q_1 = 0$$

$$\text{P.I:} \quad \frac{2S}{\rho} + \frac{\partial S}{\partial \rho} + \frac{\partial N_2}{\rho \partial \theta} + q_2 = 0 \quad (2.6)$$

$$f_{\rho\rho} N_1 + \frac{f_\rho}{\rho} N_2 = -q_n + f_\rho q_1$$

válidas para carga arbitraria.

Las condiciones de contorno (que, matemáticamente hablando funcionan como condiciones iniciales) son:

$$\rho = a \quad (\text{borde A}) \quad N_1 = 0 \quad S = 0 \quad (2.7)$$

y las de periodicidad son:

$$N_1(\rho, 0) = N_1(\rho, 2\pi)$$

$$N_2(\rho, 0) = N_2(\rho, 2\pi) \quad (2.8)$$

$$S(\rho, 0) = S(\rho, 2\pi)$$

Del sistema (2.6) se obtienen las acciones interiores proyectadas, mientras que las reales se calculan mediante las relaciones:

$$N_1^* = \sqrt{1 + f_\rho^2} N_1 \quad N_2^* = \frac{N_2}{\sqrt{1 + f_\rho^2}} \quad S^* = S \quad (2.9)$$

2.1.1. Caso de carga axial simétrica para un cimiento Tronco-Cónico

Si la carga es axial simétrica, como también lo son la forma y las condiciones de apoyo, se verifica que:

$$N_1 = N_1(\rho) \quad N_2 = N_2(\rho) \quad S = 0 \quad (2.10)$$

$$q_1 = q_1(\rho) = 0 \quad q_2 = 0 \quad q_n = q_n(\rho)$$

y el sistema (2.6) se transforma en:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \rho} + \frac{N_1 - N_2}{\rho} + \frac{\partial S}{\rho \partial \theta} = 0$$

$$\text{P.I:} \quad \frac{\partial N_2}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial S}{\partial \rho} + \frac{2S}{\rho} = 0 \quad (2.11)$$

$$f_{\rho\rho} N_1 + \frac{f_{\rho}}{\rho} N_2 + q_n = 0$$

con las condiciones de contorno e iniciales (2.7) y (2.8).

La obtención de las acciones o fuerzas interiores en la lámina (N_1 , N_2 , S) nos permiten definir su espesor, la calidad de su material, el número y diámetro de las barras de acero (si se trata de hormigón armado), etc. y todo ello se utiliza para garantizar que resta a la carga sin romperse.

2.2. Ecuaciones físicas y geométricas para las deformaciones y desplazamientos

Se expondrá ahora el cálculo de los desplazamientos para cargas axial simétricas, los cuales se producen debido a las deformaciones del cimientó y sus valores no deben ser tan grandes como para que la lámina sea demasiado flexible.

Las ecuaciones físicas relacionan las acciones interiores, vistas en el epígrafe anterior, con las deformaciones proyectadas ξ . En (1973, 2-74 y 5-74, 1974, 1975) aparece en notación matricial dicha relación, o sea:

$$\xi = FN \quad (2.12)$$

donde F es la matriz:

$$F = \frac{1}{Eh^*} \begin{bmatrix} (1+f_p^2)^{3/2} & -v\sqrt{1+f_p^2} & 0 \\ -v\sqrt{1+f_p^2} & \frac{1}{\sqrt{1+f_p^2}} & 0 \\ 0 & & 2(1+v)\sqrt{1+f_p^2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

y ξ el vector:

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \gamma)^t$$

con:

E: módulo de elasticidad.

v: coeficiente de Poisson (1/6).

Desarrollando obtenemos:

$$\xi_1 = \frac{1}{Eh^*} \left[(1+f_p^2)^{3/2} N_1 - \nu (1+f_p^2)^{1/2} N_2 \right]$$

$$\xi_2 = \frac{1}{Eh^*} \left[(1+f_p^2)^{-1/2} N_2 - \nu (1+f_p^2)^{1/2} N_1 \right] \quad (2.14)$$

$$\gamma = 0$$

Las ecuaciones geométricas, cuya solución constituye el problema II (P.II.), se expresan en forma matricial como:

$$\xi = LU + GU \quad (2.15)$$

considerando L y G matrices de 3x3 como en (1972) y U el vector de los corrimientos transformados:

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_N \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

De (2.15) y (2.16) obtenemos el sistema:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \rho} = \xi_1$$

P.II:
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} U_1 - \frac{2}{3\rho} U_N = \xi_2 \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} + \frac{\partial U_2}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} U_2 = 0$$

con las condiciones de frontera:

$$U_1 = 0 \quad (2.18)$$

$$U_2 = 0$$

en $\rho = b$ (Figura 1) y las condiciones de periodicidad como en el problema I.

La relación entre los corrimientos transformados y los reales viene dado por:

$$U_1 = U_1^* + f_p U_N^* \quad U_2 = U_2^* \quad U_N = U_n^* \quad (2.19)$$

y en el caso de la carga axial simétrica, se verifica que:

$$U_1 = U_1(\rho) \quad U_2 = 0 \quad U_N = U_N(\rho) \quad (2.20)$$

$$\xi_1 = \xi_1(\rho) \quad \xi_2 = \xi_2(\rho) \quad \gamma = 0$$

2.3. Adimensionalización

Para realizar el cálculo numérico se hace necesario llevar a cabo un proceso de adimensionalización de las ecuaciones del modelo matemático que describe el fenómeno que estamos estudiando. En el artículo (1998) encontramos un estudio detallado del mismo para el caso de modelos de estructuras laminares, especificamos aquí solo los aspectos fundamentales.

En cada problema existe por lo menos una longitud característica distinta de cero, que define la escala del problema. A esa longitud la denominamos a y en este caso toma el valor de 6 m . Para las cargas existe también una característica distinta de cero, que las llamaremos q y en particular toma el valor de 10 t/m^2 . Esto permite definir las acciones interiores adimensionalizadas como:

$$N_1^a = \frac{N_1}{qa} \quad N_2^a = \frac{N_2}{qa} \quad S^a = \frac{S}{qa} \quad (2.21)$$

Las cargas adimensionales se definen como:

$$q_i^a = \frac{q_i}{q} \quad (2.22)$$

De acuerdo con (1998) las ecuaciones de equilibrio interno tienen la misma forma en las variables adimensionales que en las originales con dimensiones.

Para el caso de las ecuaciones físicas obtenemos el mismo resultado que en las de equilibrio, o sea;

$$\xi^a = F^a N^a \quad (2.23)$$

pero en este caso $\xi^a = \xi$ por la definición de las deformaciones proyectadas y

$$F^a = qaF \quad (2.24)$$

Las ecuaciones geométricas también mantienen su forma original y los corrimientos o desplazamientos satisfacen:

$$U = aU^a \quad (2.25)$$

De acuerdo con (1998) las condiciones de frontera en variables adimensionales son de la misma forma que la original.

3. DISCRETIZACION POR EL METODO DE LINEAS

Cuando se resuelven numéricamente las EDPs, generalmente se discretizan por diferencias finitas o por elementos finitos algunas o todas las derivadas de la ecuación. Con el Método de Líneas en particular se discretizan todas las derivadas excepto una y el problema se transforma en la solución numérica de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias o Diferenciales Algebraicas.

En nuestro problema aplicamos el método de Líneas discretizando las derivadas respecto a θ y se dejan las derivadas respecto a ρ sin discretizar. Entonces utilizamos el código DASSL para resolver el sistema de Ecuaciones diferenciales algebraicos con valor inicial para los dos modelos.

Para la solución numérica de este problema escogimos el Método de Líneas teniendo en cuenta tres elementos fundamentalmente:

- Cuando se trabajan con láminas de espesores finos y se utilizan técnicas como elementos finitos aparece un fenómeno llamado Locking donde es imposible obtener la solución numérica al disminuir el espesor de la lámina. En el segundo problema de nuestro modelo cuando el espesor es muy pequeño el sistema se convierte en Stiff, lo cual es resuelto eficientemente por el DASSL, pues está diseñado para este tipo de problemas.
- Con el Método de Líneas cuando se discretiza obtenemos un sistema de EDO o EDA con valor inicial, para los cuales existen códigos generales y eficientes que permiten obtener la solución numérica buscada.
- En el P.I. una de las ecuaciones ya es algebraica y se le añaden otras dos de las condiciones de contorno. En el P.II. cuando se discretiza, el sistema se convierte en diferencial algebraico agregando las condiciones de contorno.
- Con el uso del Método de Líneas se desacopla el error en las variables $\Delta\rho$ y $\Delta\theta$.

3.1 Discretización de las Ecuaciones de Equilibrio

A partir de este momento trabajamos con las ecuaciones y todas las variables adimensionales aunque no aparezca el supra-índice. En caso contrario se especificará de antemano.

Sustituimos en el sistema (2.6) las derivadas espaciales por los siguientes cocientes:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta}(\rho, \theta_i) = \frac{S^i - S^{i-1}}{\Delta\theta}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \theta}(\rho, \theta_i) = \frac{N_2^i - N_2^{i-1}}{\Delta\theta}$$
(3.1)

e introduciendo las condiciones de prioridad (2.8) resulta:

$$\frac{dN_1^1}{d\rho} = -\frac{N_1^1 - N_2^1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{S^1 - S^0}{\Delta\theta} \right)$$

.....

$$\frac{dN_1^m}{d\rho} = -\frac{N_1^m - N_2^m}{\rho} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{S^{1m} - S^{m-1}}{\Delta\theta} \right)$$

$$\frac{dS^1}{d\rho} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{N_2^1 - N_2^0}{\Delta\theta} \right) - \frac{2S^1}{\rho}$$

.....

$$\frac{dS^m}{d\rho} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{N_2^m - N_2^{m-1}}{\Delta\theta} \right) - \frac{2S^m}{\rho}$$

$$f_{\rho\rho}N_1^1 - f_{\rho}N_2^1 + q_n = 0$$

.....

$$f_{\rho\rho}N_1^m - f_{\rho}N_2^m + q_n = 0$$

$$N_1^0 = N_1^m$$

$$N_2^0 = N_2^m \tag{3.2}$$

$$S^0 = S^m$$

Condiciones iniciales para $\rho = 1$

$$N_1(1, \theta) = 0$$

$$S(1, \theta) = 0 \tag{3.3}$$

$$N_2(1, \theta) = \frac{3}{2}$$

con los valores;

$$f_{\rho\rho} = 0$$

$$f_\rho = m = \frac{2}{3}$$

$$q_n = -1$$

3.2. Discretización de las Ecuaciones Geométricas

Utilizando el sistema (2.17) con las derivadas:

$$\frac{\partial U_2}{\partial \theta} = \frac{U_2^i - U_2^{i-1}}{\Delta \theta} \quad i = 1, \dots, m$$

y (3.4)

$$\frac{\partial U_1}{\partial \theta} = \frac{U_1^i - U_1^{i-1}}{\Delta \theta} \quad i = 1, \dots, m$$

las condiciones de frontera (2.18) y las de periodicidad se obtiene el sistema discreto:

$$\frac{dU_1^1}{d\rho} = \xi_1$$

.....

$$\frac{dU_1^m}{d\rho} = \xi_1$$

$$\frac{dU_2^1}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{U_1^1 - U_1^0}{\Delta\theta} \right) - \frac{1}{\rho} U_2^1 = 0$$

$$\frac{dU_2^m}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{U_1^m - U_1^{m-1}}{\Delta\theta} \right) - \frac{1}{\rho} U_2^m = 0$$

$$\frac{U_1^1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{U_2^1 - U_2^0}{\Delta\theta} \right) - \frac{2}{3\rho} U_N^1 = \xi_2$$

$$\frac{U_1^m}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{U_2^m - U_2^{m-1}}{\Delta\theta} \right) - \frac{2}{3\rho} U_N^m = \xi_2$$

$$U_1^0 = U_1^m$$

$$U_2^0 = U_2^m$$

$$U_N^0 = U_N^m$$

(3.5)

Condiciones iniciales:

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = 0$$

(3.6)

$$U_N = -\frac{3}{2}\rho\xi_2$$

4. RESULTADOS NUMERICOS

Después de discretizar los problemas I y II se puede probar que los sistemas Diferenciales Algebraicos de Valor Inicial obtenidos (3.2 - 3.3) y (3.5 - 3.6) son explícitos de índice 1, por lo que es posible utilizar el código DASSL para su resolución numérica.

En el caso particular del cimientro tronco-cónico los modelos de las ecuaciones tienen solución analítica, lo que permite comparar con la numérica calculada. Para las ecuaciones de equilibrio las soluciones exactas con dimensiones son:

$$N_1 = \frac{q_n}{m\rho} \frac{a^2 - \rho^2}{2} \quad N_2 = -\frac{\rho}{m} q_n$$

(4.1)

Y para los desplazamientos las soluciones exactas son:

$$U_1 = \frac{q_n}{Eh^*} \frac{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}{m} \left[\frac{(1+m^2)a^2}{2} \ln \frac{\rho}{b} - \left(\frac{2+3m^2}{12} \right) (\rho^2 - b^2) \right]$$

(4.2)

con los siguientes valores numéricos:

$$m = f_p = \frac{2}{3}$$

$$q^n = -10 \text{ t/m}^2$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$h^* = 0.3 \text{ m}$$

$$a = 6 \text{ m}$$

$$b = 1.5 \text{ m}$$

Note que para las comparaciones numéricas utilizamos las ecuaciones (2.21) y (2.25).

ρ	N_1	N_2
1.000000	.0000000000E+00	.1500000000E+01
.925000	-.1170608317E+00	.1387500000E+01
.850000	-.2448529838E+00	.1275000000E+01
.775000	-.3864920334E+00	.1162500000E+01
.700000	-.5464287762E+00	.1050000000E+01
.625000	-.7312504245E+00	.9374999987E+00
.550000	-.9511372268E+00	.8249999194E+00
.475000	-.1222698585E+01	.7125000003E+00
.400000	-.1575001861E+01	.5999999998E+00
.325000	-.2063945363E+01	.4875000025E+00
.250000	-.2812505986E+01	.3749999996E+00

Para el primer problema comenzamos el proceso de cálculo con valor inicial $\rho = 1$ y final $\rho = 0.25$ por lo que $\Delta\rho$ se tomó negativo, es decir: $\Delta\rho = -0.075$ para los valores de salida. Con estos parámetros se ejecutó el código DASSL tomando el error relativo del orden de 10^{-5} y el absoluto de 10^{-7} .

Los resultados numéricos obtenidos para N_1 y N_2 coinciden en 5 cifras con los analíticos dados en (4.1).

La tabla (izquierda) muestra los valores numéricos de N_1 y N_2 , como es conocido $S = 0$.

Para la solución numérica del segundo problema interpolamos los valores de N_1 y N_2 dados anteriormente y calculamos los ξ_1 y ξ_2 para cualquier punto de ρ entre 0.25 y 1. Aquí se comienza con valor inicial en $\rho = 0.25$ y el tamaño del paso es de $\Delta\rho = 0.083333$ para los valores de salida del código. Los resultados numéricos se obtuvieron para un error relativo del orden del 10^{-10} y absoluto de 10^{-8} .

ρ	U_1	U_1 Exacta	U_N
.250000	.0000000000E+00	.0000000000E+00	-.3282701286E-04
.325000	-.3200240728E-04	-.3200037365E-04	-.8793230375E-04
.400000	-.5631384078E-04	-.5631217266E-04	-.1333537575E-03
.475000	-.7540250999E-04	-.7540084587E-04	-.1727936834E-03
.550000	-.9064057847E-04	-.9063900891E-04	-.2083103207E-03
.625000	-.1028714705E-03	-.1028699285E-03	-.2411688171E-03
.700000	-.1126504386E-03	-.1126489638E-03	-.2722020412E-03
.775000	-.1203628235E-03	-.1203613384E-03	-.3019880079E-03
.850000	-.1262865824E-03	-.1262852408E-03	-.3309436525E-03
.925000	-.1306301346E-03	-.1306281377E-03	-.3593816040E-03
1.000000	-.1335256589E-03	-.1335158600E-03	-.3872981499E-03

En la siguiente tabla presentamos los valores numéricos de U_1 , U_N ($U_2 = 0$) y los de la solución analítica dada en (4.2) con (2.25) U_1 exacta, para realizar una mejor comparación de los resultados obtenidos.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Proponemos el Método de Líneas - DASSL como una alternativa eficiente para el cálculo de estructuras laminares, el cual resulta competitivo y mucho más amigable que el de Elemento Finito pues la entrada y salida de datos es más sencilla.

Sería interesante calcular un shell donde se presentara el efecto de locking al usar el método de Elementos Finitos y compararla con la técnica propuesta.

Los autores continúan su trabajo en el cálculo de la energía de deformación y el cálculo de estructuras laminares más complejas, como por ejemplo un tanque de agua construido en Santiago de Cuba con una curva meridiana diseñada por el Dr. P. Hernández.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a los Drs. Elsa Liberman y Ricardo Durán de la Universidad de Buenos Aires por sus útiles comentarios y a la UMALCA, Unión de Matemática para América Latina y el Caribe por el apoyo financiero en el inicio de este trabajo.

REFERENCIAS

BERNARDOU, M. (1994): " Methodes d'Element Finis les problems de Coques Minces", Masson Paris

BRENAN, K.E.; S.L. CAMPBELL and L.R. PETZOLD (1989): "Numerical Solution of Initial - Value Problem in Differential - Algebraic Equations". Elsevier Science Publishing Co. New York.

CHAPELLE, D. **et al** (1997): "Stabilized Finite Element Methods for Plates and Shells, International Conference on Shells", Santiago de Compostela.

FLÜGGE, W.S. (1960): "Stresses in shells", Springer-Verlag, Berlín.

HERNANDEZ, P. (1969): Unified Approach to the Membrane Theory of Shell IASS, Madrid, Colloquium.

_____ (1972): "Membrane analysis of new types of shells", **Tecnologías** Series 2, Ingeniería Civil, U.H. Cuba.

_____ (1973): "Estructuras Laminares, Teoría y Aplicaciones", Ingeniería Civil, 4-73. U.H. Cuba.

_____ (1974): "Estructuras Laminares, Teoría y Aplicaciones", Ingeniería Civil, 2-74. U.H. Cuba.

_____ (1974): "Estructuras Laminares, Teoría y Aplicaciones", Ingeniería Civil, 5-74. U.H. Cuba.

_____ (1975): "Estructuras Laminares, Teoría y Aplicaciones", Ingeniería Civil, 4-75. U.H. Cuba.

- _____ (1998): "Forma adimensional de las ecuaciones generales de la teoría membranal de las láminas en coordenadas relativas". En vías de publicación en la revista: **Ingeniería Civil**, UNIACC, Cuba.
- LOVE, A.E.H.A. (1944): "Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", New York, **Dover Publications**.
- NOVOZHILOV, U.V. (1959): "The theory of Thin Shells". P. Noordhof Ltd. Groningen, The Netherlands.
- PALMA, F.J. (1997): "Finite Element Methods of some Problems on this Elastic Shells", International Conference on shells, Santiago de Compostela.
- SAMARTIN, A. (1997): "Application of Global Numerical Procedures of the analysis of shells: International conference on shells, Santiago de Compostela.
- SOARE, M. (1968): "Aplicarea Ecuatiilor eu Diferente Finite la Calculul Placilor Curbe Subtiri", Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, Bucuresti.
- TIMOSHENKO, S. and S. WOINOWSKY-KRIEBER (1959): "Theory of Plates and Shells", Mc Graw-Hill Book Co., New York.