MODELO DE COMPETENCIA ESPACIAL INCORPORANDO EXTERNALIDADES*

D.R. Santos Peñate, P. Dorta González y R. Suárez Vega
Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

RESUMEN
En gran parte de los modelos de competencia espacial se asume que la elección de los usuarios está basada en el coste final del servicio (precio del producto más coste de transporte) y que son exclusivamente las empresas las que presentan un comportamiento estratégico en la toma de decisiones sobre la ubicación y el precio. Sin embargo, es bastante habitual que los usuarios también actúen de forma estratégica, con el fin de contrarrestar los efectos de las decisiones tomadas por el resto de los consumidores y que, en mercados afectados por externalidades, se traducen en un coste debido, por ejemplo, a la congestión que soporta el servicio. En este trabajo se consideran los costes de externalidad y se analiza la situación donde las asignaciones de los usuarios vienen impuestas exógenamente por un agente regulador del mercado que minimiza el coste conjunto de los consumidores, obteniéndose un óptimo de Pareto. El comportamiento estratégico de las empresas es modelizado como un juego en dos etapas; en la primera eligen simultáneamente las localizaciones y a partir de éstas, fijan el precio del producto en la segunda etapa.

Palabras clave: localización, competencia, externalidad, duopolio y juegos.

MSC: 90-C29.

ABSTRACT
Most of spatial competition models assume firms decisions exclusively. In that models customers are assigned to servers minimizing the final cost (price plus transport cost). However in markets with externalities customers decisions are taken in relation to the rest of customers decisions. In this paper externality costs are considered and customers decisions are imposed in order to minimize the joint cost. In this case a Pareto optimum is obtained. Firms behaviour is modeled as a two stage game, first select locations and the prices.

1. INTRODUCTION

El comportamiento estratégico de las empresas es fundamental en la toma de decisiones. De entre las variables que intervienen, capacidad, atención al cliente, marketing, servicio de postventa, etc., es sin duda esta última una de las más importantes ya que una buena ubicación puede impedir la entrada de nuevos competidores del mercado. Por otro lado la localización de los servicios no suele cambiar a corto plazo ya que, normalmente, esta modificación conlleva costes hundidos considerables.

En Economía Industrial aparecen numerosos estudios sobre la competencia entre empresas y el comportamiento estratégico de las mismas. El trabajo de Cournot publicado en 1838, constituye la primera discusión formal sobre el problema del duopolio. En 1838 Bertrand critica el trabajo de Cournot, introduciendo la competencia vía precios como una alternativa a la competencia vía cantidades. El estudio de Hotelling (1929) constituye el primer análisis que incorpora la localización como una variable de elección determinante. En este trabajo, dos empresas compiten en un mercado lineal con demanda uniformemente distribuida a lo largo de una línea recta.

En las últimas décadas han ido apareciendo numeros artículos en Investigación Operativa sobre localización, aunque solo algunos consideran competencia entre empresas. En los modelos de localización competitiva se ha incorporado el comportamiento del consumidor de diversas formas. El criterio más simple es la distancia (tiempo o coste de transporte); en este caso, los consumidores eligen la facilidad más próxima. El MAXCAP (Maximum Capture Problem) formulado por Revelle (1986) aplica este criterio de

* Esta investigación está financiada parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia, ayuda PB95-1237-C03-03.

distancia mínima. A su vez, el MAXCAP es el origen de otros modelos como el de captura con anticipación formulado por Serra y Revelle (1995).

Hakimi (1983) analiza el problema de localización competitiva en redes y prueba que, bajo ciertos supuestos como costes de transporte cóncavos, existe una conjunto de localizaciones óptimas sobre los nodos de la red. Un problema similar, añadiendo el precio en destino del producto como variable de decisión, es estudiado por Lederer y Thisse (1990). Ellos consideran un juego en dos etapas donde en la primera se deciden las localizaciones y en la segunda, conocidas éstas, los precios. Se prueba la existencia de un equilibrio perfecto de Nash para subjuegos y que, caso de que los costes de transporte sean estrictamente cóncavos, el conjunto de localizaciones factibles se reduce a los vértices de la red. Un resultado similar es obtenido por Labbé y Hakimi (1991) para el caso en el que las empresas deciden la cantidad a ofrecer en cada mercado separado espacialmente. Los modelos anteriores consideran exclusivamente la posibilidad de instalar una firma con una única facilidad. Tobin y Friesz (1986) consideran una empresa privada que desea instalar varias plantas en un mercado separado espacialmente.

En algunas situaciones la utilidad de un usuario no viene dada únicamente por su elección, sino que depende también del comportamiento del resto de los consumidores. Esto sucede, por ejemplo, en aquellos problemas con limitación de capacidad o en mercados afectados por externalidades. En presencia de externalidad, si los individuos toman sus decisiones individualmente, sin tener en cuenta el efecto de las elecciones del resto, se produce un subóptimo social. Además de los costes de transporte, es preciso considerar un coste asociado al efecto de la externalidad en el mercado. Como consecuencia, no siempre es la asignación al centro de servicio más próximo la que proporciona mayor utilidad. Kohlberg (1983) considera una variante del modelo de Hotelling donde los consumidores tienen en cuenta junto con los costes de transporte el coste de espera para ser atendido en el servicio, dependiendo éste del número de clientes que eligen dicho servicio. Brandeau y Chiu (1994ª, 1994b) introducen un coste de externalidad en servicios públicos y privados, considerando que los consumidores minimizan la suma de los costes de transporte y de externalidad.

2. NOTACION Y MODELO

Se considera un mercado donde se sirve un bien homogéneo y donde la demanda se encuentra concentrada en un conjunto finito I de nodos i (i = 1,…,n). La demanda del mercado es inelástica respecto al precio, siendo λ_i la demanda en i, y $\Lambda = \Sigma_i \lambda_i$ la demanda total. Se plantea un problema de duopolio en el que las empresas, A y B, pretenden establecerse en el mercado compitiendo en precios y localizaciones. Cada una de las empresas elegirá su ubicación, x_A y x_B, de entre un conjunto finito de posibles localizaciones x_j (j = 1,…,m) y fijará el precio del producto (precio f.o.b.) para la localización seleccionada. Se asume que los servicios pueden satisfacer toda la demanda existente tratándose, por tanto, de un problema sin limitaciones de capacidad. Las empresas A y B buscarán el par (x_A, p_A) y (x_B, p_B) que maximice su beneficio teniendo en cuenta que la empresa rival persigue el mismo objetivo.

Se supone que cada empresa posee una función de costes variables asociada a cada localización x_j con costes marginales

$C'_A(x_j)$ y $C'_B(x_j)$, constantes y no negativos. Además, cada empresa incurre en unos costes fijos, $F_A(x_j)$ y $F_B(x_j)$, dependientes de su localización x_j: Así, la función de beneficios para cada una de las empresas se puede expresar como:

$$\pi_A(x_A, x_B, p_A, p_B) = \left(p_A - C'_A(x_A)\right)\Lambda_A(x_A, x_B, p_A, p_B) - F_A(x_A)$$

$$\pi_B(x_A, x_B, p_A, p_B) = \left(p_B - C'_B(x_B)\right)\Lambda_B(x_A, x_B, p_A, p_B) - F_B(x_B)$$

donde $\Lambda_A(\Lambda_B)$ es la cuota de mercado captada por A (B) en la localización x_A (x_B). Se impone que la demanda total del mercado sea satisfecha totalmente por lo que $\Lambda = \Lambda_A + \Lambda_B$. Para simplificar la notación, en lo sucesivo se omitirá la dependencia de las cuotas de mercado con las variables de decisión.

Los usuarios elegirán el servicio que minimice el coste total, esto es, la suma del coste del servicio y los costes de transporte y de externalidad. El coste total para los usuarios del nodo i viene dado por

$$C_i(x_A, x_B, p_A, p_B, \lambda_{iA}, \lambda_{iB}) = \lambda_{iA}\big(p_A + t_{iA} + E_A(\Lambda_A)\big) + \lambda_{iB}\big(p_B + t_{iB} + E_B(\Lambda_B)\big)$$

donde λ_{iA} es la parte de la demanda del nodo i que es asignada a la empresa A, mientras que λ_{iB} es la asignada a B. Dao que se satisface toda la demanda $\lambda_i = \lambda_{iA} + \lambda_{iB}$, $\forall i \in I$, siendo $\lambda_{iA}, \lambda_{iB} \geq 0$. El coste t_{iA} (t_{iB}) es el de transportar una unidad de demanda desde el nodo i hasta la localización x_A de A (x_B de B). Se asume que la red de transporte tiene capacidad para soportar los flujos que en ella se generan y que los costes de transporte unitarios debidos a la congestión en el tráfico están reflejados en los costes de externalidad asociados a cada uno de los servicios. Los costes de externalidad unitarios, $E_A(\Lambda_A)$ y $E_B(\Lambda_B)$, son funciones de la cuota de mercado. Se consideran externalidades negativas, esto es,

$$\frac{\partial E_A}{\partial \Lambda_A} > 0, \quad \frac{\partial E_B}{\partial \Lambda_B} > 0,$$

Puesto que $\Lambda_A = \Lambda - \Lambda_B$, se cumple que $\frac{\partial E_A}{\partial \Lambda_B} < 0$, y $\frac{\partial E_B}{\partial \Lambda_A} < 0$.

La función $E_k(\cdot)$ con k = A y B, es creciente y no negativa. En este trabajo se consideran funciones de coste de externalidad lineales de la forma $E_k(L) = b_k L$, $b_k > 0$ (k = A,B). El valor b_k es un indicador de la *aversión del consumidor a la congestión* en el servicio.

Así, la función de costes para los individuos del nodo i será:

$$C_i(x_A, x_B, p_A, p_B, \lambda_{iA}, \lambda_{iB}) = \lambda_{iA}(p_A + t_{iA} + b_A\Lambda_A) + \lambda_{iB}\big(p_B + t_{iB} + b_B\Lambda_B\big)$$

3. ANALISIS DEL EQUILIBRIO

Supóngase la existencia de un agente regulador del mercado que fija de forma exógena las asignaciones de la demanda a los servicios, minimizando los costes conjuntos para obtener un óptimo de Pareto.

Dadas las localizaciones, x_A y x_B, y los precios, p_A y p_B, el coste conjunto viene dado por:

$$C(\lambda_A, \lambda_B) = \sum_{i=1}^{n} C_i(\lambda_{iA}, \lambda_{iB})$$

siendo $\lambda_A = (\lambda_{1A}, \lambda_{2A}, \ldots, \lambda_{nA})$ $\big(\lambda_B = (\lambda_{1B}, \lambda_{2B}, \ldots, \lambda_{nB})\big)$ las asignaciones de la demanda al servicio A (B).

El agente regulador desea obtener una asignación óptima de Pareto, es decir, una solución del siguiente problema

$$\min_{(\lambda_A, \lambda_B)} C(\lambda_A, \lambda_B)$$

sujeto a las restricciones

$$\lambda_i = \lambda_{iA} + \lambda_{iB}, \ \forall i \in I$$

$$\lambda_{iA}, \lambda_{iB} \geq 0, \ \forall i \in I$$

Haciendo $\lambda_{iB} = \lambda_i - \lambda_{iA}$, $\forall i \in I$, en la función objetivo y teniendo en cuenta que $\Lambda = \Lambda_A + \Lambda_B$, se obtiene la función

$$C(\lambda_A) = \sum_{i=1}^{n} \{\lambda_{iA}(p_A+t_{iA}+b_A\Lambda_A) + (\lambda_i - \lambda_{iA})\,(p_B+t_{iB}+b_B(\Lambda - \Lambda_A))\}$$

y el problema sería

$$\min_{\lambda_A} C(\lambda_A) \text{ sujeto a } 0 \le \lambda_{iA} \le \lambda_i,\ \forall i \in I.$$

El programa matemático anterior es convexo. Basta observar que, al ser $\frac{\partial^2 C}{\partial \lambda_{iA} \partial \lambda_{lA}} = 2(b_A + b_B) > 0$, $\forall i, l \in I$, la matriz hessiana de la función C es semidefinida positiva, de donde se deduce que esta función es convexa; además el conjunto factible es un intervalo n-dimensional (convexo) cerrado y acotado. En esta situación, existe mínimo global y las condiciones necesarias y suficientes de Kühn-Tucker para el mínimo son las siguientes:

$$2b_A\Lambda_A - 2b_B(\Lambda - \Lambda_A) + p_A - p_B + t_{iA} - t_{iB} + \mu_i \ge 0, \quad \forall i \in I$$

$$\left(2b_A\Lambda_A - 2b_B(\Lambda - \Lambda_A) + p_A - p_B + t_{iA} - t_{iB} + \mu_i\right)\lambda_{iA} = 0,\ \forall i \in I$$

$$\mu_i(\lambda_{iA} - \lambda_i) = 0, \quad \forall i \in I$$

$$\mu_i \ge 0, \quad \forall i \in I$$

$$\lambda_i - \lambda_{iA} \ge 0, \quad \forall i \in I$$

$$\lambda_{iA} \ge 0, \quad \forall i \in I$$

Si la solución óptima es un punto interior del conjunto factible, en cuyo caso la llamaremos *asignación óptima interior*, entonces las condiciones anteriores se reducen a las siguientes:

$$2b_A\Lambda_A - 2b_B(\Lambda - \Lambda_A) + p_A - p_B + t_{iA} - t_{iB} = 0,\ \forall i \in I$$

de donde se obtiene que la cuota de mercado para A es

$$\Lambda_A = \frac{2b_B\Lambda + p_B - p_A + t_{iB} - t_{iA}}{2(b_A + b_B)}, \forall i \in I$$

Entonces, una condición necesaria para la existencia de una asignación óptima interior es que $t_{iB} - t_{iA} = t_{BA}$, $\forall i \in I$. En este caso, las cuotas de mercado asociadas a las asignaciones óptimas interiores son

$$\Lambda_A^* = \frac{2b_B\Lambda + p_B - p_A + t_{BA}}{2(b_A + b_B)} \quad \text{y} \quad \Lambda_B^* = \frac{2b_A\Lambda + p_A - p_B + t_{BA}}{2(b_A + b_B)}$$

En una asignación óptima interior ocurre que para cualquier nodo de demanda siempre habrá una parte (no nula) de la misma que se asigna a A y otra parte (no nula) que se asigna a B.

Proposición 1. Sean $k_1, k_2, \ldots, k_l$, índices k tales que $t_{k_jB} - t_{k_jA} = t_{BA}$, $\forall j = 1,2,\ldots,l$, Sea

$$\varphi = \frac{1}{2(b_A + b_B)}(2b_B\Lambda - p_A + p_B + t_{BA})$$

y

$$\xi_i = 2b_{A\varphi} - 2b_B(\Lambda - \varphi) + p_A - p_B + t_{iA} - t_{iB},\ \forall i \in I.$$

Es un mercado duopolístico afectado por externalidades con coste por unidad lineal de la forma $E_k(\Lambda_k) = b_k\Lambda_k$ *y demanda inelástica discreta, si* $\sum_{i/\xi_i<0}\lambda_i \le \varphi \le \sum_{i/\xi_i<0}\lambda_i + \sum_{i/\xi_i=0}\lambda_i$ *, entonces una asignación óptima es*

$$\lambda_{iA} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \xi_i > 0 \\ \lambda_i, & \text{si} \quad \xi_i < 0 \\ \alpha_i, & \text{si} \quad \xi_i = 0 \end{cases}$$

siendo $0 \le \alpha_i \le \lambda_i$ *tales que* $\sum_{i/\xi_i<0}\lambda_i + \sum_{i/\xi_i=0}\alpha_i = \varphi$. *Además, la cuota de mercado óptima es* $\Lambda^*_A = \varphi$ y $\Lambda^*_B = \Lambda - \varphi$.

Demostración: Tomando $\Lambda_A = \varphi$, puede comprobarse que las siguientes soluciones satisfacen las condiciones de Kühn-Tucker:

$$\begin{cases} \lambda_{iA} = 0, & \mu_i = 0, \quad \text{si} \quad \xi_i > 0 \\ \lambda_{iA} = \lambda_i, & \mu_i = \xi_i; \quad \text{si} \quad \xi_i < 0 \\ \lambda_{iA} = \alpha_i, & \mu_i = 0, \quad \text{si} \quad \xi_i = 0 \end{cases}$$

Como el problema es convexo estas condiciones son necesarias y suficientes. ■

Corolario 1. En las condiciones de la proposición anterior, si $t_{iB} - t_{iA} = t_{BA}$, $\forall i \in I$, y $0 \le \varphi \le \Lambda$, entonces una asignación óptima es $\lambda_{iA} = \alpha_i$, siendo $0 \le \alpha_i \le \lambda_i$ tales que $\sum_{i\in I}\alpha_i = \varphi$.

Demostración: Aparece como caso particular de la proposición anterior sin más que tomar $t_{iB} - t_{iA} = t_{BA}$, $\forall i \in I$. ■

Proposición 2. (Condición necesaria de existencia de óptimo interior).

En un mercado duopolístico afectado por externalidades con costes por unidad lineales de la forma $E_k(\Lambda_k) = b_k\Lambda_k$, con demanda inelástica discreta, una condición necesaria para la existencia de una asignación óptima interior, es que, para cada nodo de demanda, la diferencia de los costes de transporte a los centros de servicio sea un valor constante. Esto es,

$t_{iB} - t_{iA} = t_{BA}$, $\forall i \in I$.

Si $t_{ik} = \alpha \cdot d(i, x_k)$, $\forall i \in I$, k = A y B, siendo d una función de distancia, la condición anterior equivale a que, para cada nodo de demanda, la diferencia de las distancias a los centros de servicio, $d_{iB} - d_{iA}$, tome un valor constante de d_{BA}.

Demostración. Una condición necesaria para la existencia de asignación óptima interior es que cada una de las derivadas parciales se anulen,

$$\frac{\partial C}{\partial \lambda_{iA}} = 2b_A\Lambda_A - 2b_B(\Lambda - \Lambda_A) + p_A - p_B + t_{iA} - t_{iB} = 0, \ \forall i \in I$$

es decir,

$t_{iB} - t_{iA} = 2b_A\Lambda_A - 2b_B(\Lambda - \Lambda_A) + p_A - p_B$, $\forall i \in I$.

pero como el segundo miembro de la igualdad no depende de i, necesariamente $t_{iB} - t_{iA} = t_{BA}$ (un valor constante que no depende de i), $\forall i \in I$. ■

Es evidente que para cualquier configuración de los nodos de demanda, dos localizaciones coincidentes satisfacen las condiciones necesarias. De la misma manera, si solo existiera un nodo de demanda, cualquier ubicación de los centros de servicio verifica las condiciones necesarias de la proposición anterior.

Corolario 2. En los supuestos de la proposición anterior, una condición necesaria para la existencia de asignación óptima interior en aquellos mercados con dos nodos de demanda, (x_1, y_1) y (x_2, y_2), es que los servicios se encuentren situados sobre una misma curva de la siguiente familia:

$$F = \{\|(x - x_1, y - y_1)\| - \|(x - x_2, y - y_2)\| = r : r \in R\}$$

siendo $\|\cdot\|$ la norma (distancia) empleada.

En el caso particular de la norma euclídea (distancia euclídea) y $r \neq 0$, cada una de estas curvas es una rama hiperbólica (Figura 1) cuya ecuación viene dada por

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = r$$

Demostración. Directamente de la proposición 1. ■

En la Figura 1 se muestran las ramas hiperbólicas con focos en los puntos (-1,0) y (1,0) correspondientes a valores -1.5, -1, 1 y 1.5 para r respectivamente.

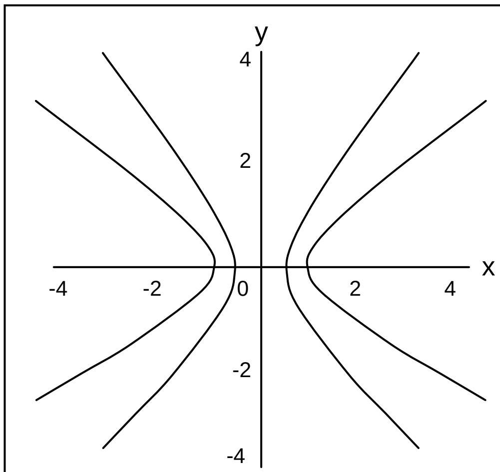

Figura 1. Ramas hiperbólicas

Si existen más de dos nodos de demanda, las localizaciones distintas han de estar situadas en la intersección de todas las curvas que resultan de fijar una diferencia de distancia constante en cada uno de los posibles pares de nodos de demanda

Corolario 3. En los supuestos de la proposición anterior, una condición necesaria para la existencia de asignación óptima interior para dos centros de servicio en aquellos mercados con dos o más nodos de demanda, es que éstos se encuentren situados en una curva de la familia F, donde ahora (x_1, y_1), y (x_2, y_2) son las localizaciones de los centros de servicio.

Demostración. Se obtiene del Corolario 2, considerando el problema dual que resulta de intercambiar los puntos de demanda y las localizaciones de los centros de servicio. ■

En lo sucesivo supondremos que se satisfacen las condiciones suficientes de la proposición 1 y que por tanto las cuotas de mercado óptimo son

$$\Lambda_A^* = \frac{2b_B\Lambda + p_B - p_A + t_{BA}}{2(b_A + b_B)} \quad \text{y} \quad \Lambda_B^* = \Lambda - \Lambda_A^*$$

Se observa que la cuota de mercado óptima captada por A, decrece con el incremento del coste de su externalidad, y crece con la diferencia de precios (p_B - p_A) y con la diferencia de costes de transporte (t_{BA}). Como además

$$\frac{\partial \Lambda_A^*}{\partial b_B} = \frac{4b_B\Lambda - 2(p_B - p_A + t_{BA})}{4(b_A + b_B)^2} > 0 \Leftrightarrow b_B > \frac{p_B - p_A + t_{BA}}{2\Lambda}$$

esta cuota es creciente en el coste de externalidad de su competidora siempre que su coste de externalidad supere el umbral $\frac{(p_B - p_A + t_{BA})}{2\Lambda}$.

Una vez conocidas las cuotas de mercado óptimas para ambas empresas, el proceso de competencia puede modelizarse como un juego en dos etapas, en la primera se eligen las localizaciones y en la segunda, conocidas éstas, se fijan los precios.

Dadas dos localizaciones, la función de beneficio para la empresa A se puede expresar de la siguiente manera

$$\pi_A(p_A,p_B) = (pA - C'_A)\Lambda_A^* - F_A = \frac{(p_A - C'_A)(2b_B\Lambda + p_B - p_A + t_{BA})}{2(b_A + b_B)} - F_A$$

(la de B se obtiene sin más que permutar los subíndices.

3.1. Precios de equilibrio

El equilibrio de Nash en precios, p_A^* y p_B^*, se obtiene resolviendo el problema

$$\begin{cases} \max_{p_A} \pi_A(p_A, p_B^*) \\ \max_{p_B} \pi_B(p_A^*, p_B) \end{cases}$$

La condición de primer orden para el primero de los problemas es

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = \frac{2b_B\Lambda + p_B - 2p_A + t_{BA} + C'_A}{2(b_A + b_B)} = 0$$

y la curva de reacción de A, teniendo en cuenta que se satisfacen las condiciones de segundo orden, es

$$p_A = b_B\Lambda + \frac{p_B + t_{BA} + C'_A}{2}$$

Intersectándola con la curva de reacción de B

$$p_B = b_A\Lambda + \frac{p_A + t_{BA} + C'_B}{2}$$

se obtienen los siguientes precios de equilibrio

$$p_A^* = \frac{1}{3}\left(2(b_A + 2b_B)\Lambda + t_{BA} + 2C'_A + C'_B\right)$$

y

$$p_B^* = \frac{1}{3}\left(2(2b_A + b_B)\Lambda - t_{BA} + C'_A + 2C'_B\right)$$

Estos precios de equilibrio se incrementan con los costes de externalidad, en mayor medida con los de la rival. El incremento del precio debido al aumento del coste de externalidad viene justificado por el mayor aumento del precio de la empresa competidora. Igualmente se incrementan con los costes marginales, en mayor medida con los propios, y con la diferencia de los costes de transporte.

3.2. Localizaciones del equilibrio

Finalmente, se trata de calcular el equilibrio de Nash en localizaciones conocido el comportamiento posterior de los precios. La expresión del beneficio para A es

$$\pi_A(x_A,x_B) = \frac{\left(2(b_A + 2b_B)\Lambda + t_{BA} + C'_B - C'_A\right)(2b_B\Lambda + p_B^* - p_A^* + t_{BA})}{6(b_A + b_B)} - F_A$$

Sustituyendo la diferencia de precios

$$p_B^* - p_A^* = \frac{1}{3}\left(2(b_A - b_B)\Lambda - 2t_{BA} + C'_B - C'_A\right)$$

se obtiene

$$\pi_A(x_A,x_B) = \frac{\left(2(b_A + 2b_B)\Lambda + t_{BA} + C'_B - C'_A\right)^2}{18(b_A + b_B)} - F_A$$

(la expresión para B es simétrica).

Las localizaciones $\left(x_A^*, x_B^*\right)$ correspondientes al equilibrio de Nash tienen que verificar

$$\pi_A\left(x_A^*, x_B^*\right) = \max_{x_A} \pi_A\left(x_A, x_B^*\right)$$

$$\pi_B\left(x_A^*, x_B^*\right) = \max_{x_B} \pi_A\left(x_A^*, x_B\right)$$

Se trata por tanto de resolver el problema

$$\max_{x_A}\left\{\frac{\left(2(b_A + 2b_B)\Lambda + t_{BA} + C'_B - C'_A\right)^2}{18(b_A + b_B)} - F_A\right\}$$

$$\max_{x_B}\left\{\frac{\left(2(2b_A + b_B)\Lambda - t_{BA} + C'_A - C'_B\right)^2}{18(b_A + b_B)} - F_B\right\}$$

donde las funciones dependientes de las localizaciones son los costes fijos y variables, y la diferencia de los costes de transporte. Para óptimos interiores, los pares de localizaciones candidatas son aquellas que satisfacen las condiciones de la proposición 1.

Una forma de obtener una solución de equilibrio consistiría en determinar elecciones consecutivas para cada una de las empresas hasta que no resulte ninguna mejora al realizar un nuevo movimiento. Si el proceso no cicla, la solución de equilibrio se obtiene en un número finito de pasos.

Teorema (*Condición suficiente de existencia de equilibrio perfecto de Nash para subjuegos)*

Bajo los supuestos de la proposición 1, está garantizada la existencia de un equilibrio perfecto de Nash para subjuegos asociado al juego en dos etapas donde, en la primera, dos empresas duopolísticas deciden localizaciones de entre un conjunto finito de posibilidades y, en la segunda, los precios de sus productos.

Demostración. Este resultado de prueba en un apéndice. ■

4. EJEMPLOS

Se proponen 2 ejemplos donde se determinan los equilibrios con asignación óptima interior, poniendo de manifiesto la reducción del tamaño del problema sobre la base del corolario 2. En primer lugar, se considera una red (Figura 2) donde sólo existen dos nodos de demanda (D_1, D_2) y seis posibles localizaciones (del 1 al 6). La demanda en cada uno de los nodos es de cinco unidades y las distancias (o costes de transporte) entre nodos son las que aparecen en las correspondientes aristas del grafo. Los costes de externalidad son $b_A = 0.45$ y $b_B = 0.55$, mientras que los costes marginales con $C'_A = 0.2$ y $C'_B = 0.25$ para todas las localizaciones. Se considera que los costes fijos son nulos para ambas empresas.

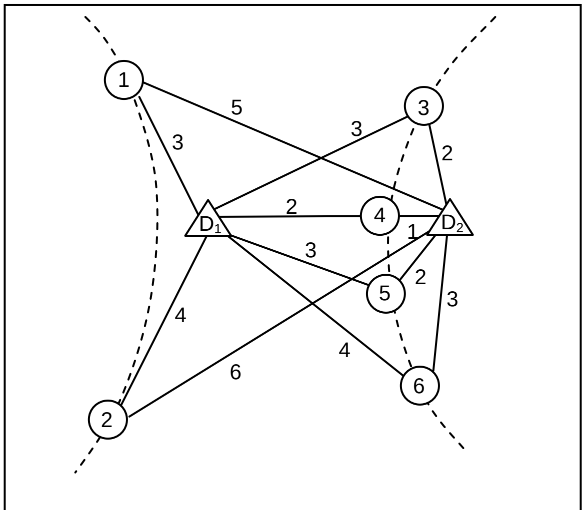

Figura 2. Red empleada en el primer ejemplo

Se puede comprobar que las posibles localizaciones se encuentran situadas en dos curvas de las descritas en el Corolario 2. Las localizaciones 1 y 2 corresponden a la rama hiperbólica asociada r = -2 y el resto a la asociada a r = 1. Con el fin de no evaluar todos los 36 posibles pares de localizaciones (x_A, x_B) que serían candidatos a equilibrio, se forma un conjunto con los posibles pares de localizaciones pertenecientes a cada una de las curvas de la familia, esto es:

$$S_1 = \{(i,j) \,/\, i,j \in \{3,4,5,6\}\}$$

$$S_2 = \{(i,j) \;/\; i,j \in \{1,2\}\}$$

con lo que el problema se reduce a la evaluación de 20 equilibrios potenciales.

El equilibrio puede obtenerse a partir de los equilibrios parciales en cada uno de estos conjuntos. Se plantea un juego en el que las empresas se van localizando como respuesta a la decisión de su rival en el paso anterior, buscando maximizar sus beneficios. El equilibrio se obtendrá cuando ninguna de las empresas vea rentable cambiar de localización.

Siguiendo este proceso y dependiendo de qué empresa sea la primera en localizarse, se llega a los siguientes equilibrios parciales

Cto.	**Primera**	**Loc. inicial**	**Benef. inicial**	**Equilibrio**	**Benef. en eq.**
S_1	A	(4.6)	(60.80, 40.35)	(4.4)	(53.56, 46.56)
S_1	B	(6.4)	(46.88, 53.21)	(4.4)	(53.56, 46.56)
S_2	A	(1.2)	(57.06, 43.4)	(1.1)	(53.56, 46.56)
S_2	B	(2.1)	(50.16, 49.83)	(2.2)	(53.56, 46.56)

Como localización inicial se toma la que maximiza los beneficios de la primera en decidir. En este caso, el equilibrio final sería (4.4) tanto si A como B es la primera en decidir debido a que ambas empresas se lozalizarían inicialmente en S_1 al obtener mayores beneficios.

En muchos casos, la búsqueda de localizaciones de equilibrio con asignación óptima interior se puede reducir al estudio de las localizaciones coincidentes.

Para el segundo ejemplo, se considera una red (Figura 3) con siete nodos que son a la vez nodos de demanda y posibles localizaciones. La demanda de cada uno de los nodos es de dos unidades y la distancia que los separa es la que aparece en las aristas que los une.

Tanto los costes de externalidad como los costes fijos son iguales que en el primer ejemplo pero los marginales dependen tanto de la empresa como de la localización. Los vectores de costes marginales para cada una de las firmas son los siguientes:

$$C'_A = [0.2, 0.2, 0.2, 0.25, 0.25, 0.25, 0.3]$$

$$C'_B = [0.3, 0.25, 0.25, 0.25, 0.2, 0.2, 0.2]$$

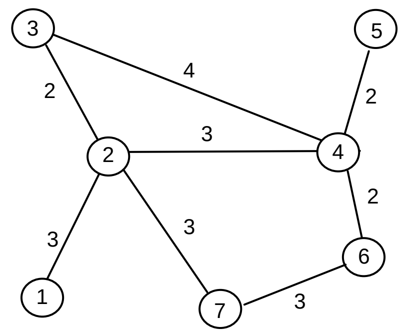

Figura 3. Red empleada en el segundo ejemplo

Se puede comprobar que los únicos pares de localizaciones que verifican las condiciones necesarias de equilibrio son aquellos en los que las localizaciones con asignación óptima interior con coincidentes, esto es

$$\{(i,i) \ / \ i \in \{1,2,\ldots,7\}\}$$

Primera	Equilibrio	Benef. en equilibrio
A	(1.1)	(105.12, 91.12)
B	(7.7)	(104.16, 92.02)

Si se planteara un juego como en el ejemplo anterior se tendrían las siguientes conclusiones dependiendo de cuál de las firmas es la primera en decidir:

Para la obtención de estos resultados se ha restringido la búsqueda a 7 de las 49 posibles soluciones que corresponden a localizaciones coincidentes. En este caso, el equilibrio depende de la empresa que entra en primer lugar ya que elige la localización que maximiza su beneficio sabiendo que la única alternativa para la seguidora es localizarse en el mismo nodo. En ambos casos, la diferencia de beneficio a favor de la empresa A viene dado por su menor coste de externalidad mientras que cada una de ellas elige la localización con mejor diferencia de costes marginales. En el caso en que los costes marginales fueran iguales en cada una de las localizaciones todos los pares de localizaciones anteriores son equilibrios y además con los mismos niveles de beneficio si los costes de externalidad también coinciden.

La aplicación se ha llevado a cabo también sobre otras redes de mayor tamaño, aunque las conclusiones han sido las mismas. Además, cuanto mayor sea el número de nodos de la red es más difícil que existan pares de localizaciones no coincidentes que verifiquen las condiciones necesarias de óptimo interior, por lo que en la mayoría de los casos la búsqueda del equilibrio se restringe al análisis de las localizaciones coincidentes.

5. CONCLUSIONES Y POSIBLES EXTENSIONES

La existencia de externalidad puede llevar a situaciones de ineficiencia social en un mercado competitivo. En este trabajo se internaliza esta externalidad considerando un agente regulador que asigna las demandas con el objetivo de obtener una solución óptima de Pareto. Se garantiza la existencia de una asignación óptima de Pareto y se propone una condición necesaria de existencia de asignación óptima interior. Bajo ciertas condiciones, se llega a la expresión de las cuotas de mercado captadas por cada una de las empresas, así como los precios que fijan y los beneficios obtenidos. El precio de equilibrio de cada empresa aumenta con su coste de externalidad. Sorprende que el precio aumente al mismo tiempo que el consumidor padece un mayor coste debido a la externalidad; ello tiene relación con el incremento del precio fijado por la empresa competidora. Finalmente, se prueba la existencia de un equilibrio perecto de Nash para subjuegos asociado al juego en dos etapas donde en una primera se deciden las localizaciones para posteriormente, conocidas éstas, decidir en la segunda etapa los precios de equilibrio.

En este trabajo se ha considerado que se minimiza la función de costes totales y que se alcanza un óptimo de Pareto; otra situación interesante aparece cuando los usuarios toman sus decisiones individualmente alcanzándose un equilibrio de Nash. Otras posibles extensiones vendrían al asumir variaciones conjeturales no nulas en el cálculo de los precios de equilibrio o la introducción de funciones de demanda elásticas al precio. Sería interesante estudiar el comportamiento de nuevas formas funcionales para los costes de externalidad y extender los resultados al caso oligopolístico. En este trabajo se ha supuesto que las empresas pueden satisfacer toda la demanda, por lo que se trata de un problema sin limitación de capacidad; la relajación de este supuesto y la generalización a más de un producto son también posibles extensiones.

REFERENCIAS

[1] BRANDEAU, M. and S. CHIU (1994a): "Facility location in a user-optimizing environment with market externalities: analysis of customer equilibria and optimal public facility locations", **Location Science**, 2, 129-147.

[2] ________________________ (1994b): "Location of competing private facilities in a user-optimizing environment with market externalities", **Transportation Science**, 28, 125-140.

[3] CORNER, R. and T. SANDLER (1986): "The theory of externalities, public goods, and club goods", Cambridge University Press.

[4] HAKIMI, S. (1983): "On locating new facilities in a competitive environment", **European Journal of Operational Research**, 12, 29-35.

[5] HOTELLING, H. (1929): "Stability in competition", **Economic Journal**, 39, 41-57.

[6] KOHLBERG, E. (1983): "Equilibrium store locations when consumers minimize travel time plus waiting time", **Economics Letters**, 11, 211-216.

[7] LABBE, M. and L. HAKIMI (1991): "Market and location equilibrium for two competitors", **Operation Research**, 39(5), 749-756.

[8] LEDERER, P. and J. THISSE (1990): "Competitive location on networks under delivered pricing", **Operational Research Letters**, 9, 147-153.

[9] REVELLE, C. (1986): "The Maximum Capture or Sphere of Influence Problem: Hotelling revisited on a network", **Journal of Regional Science**, 26, 343-357.

[10] SERRA, D. and C. REVELLE (1995): "Competitive location in discrete space", **Facility Location: a Survey of Applications and Methods** (Z. Drezner, ed.), Springer-Verlag.

[11] TOBIN, R. and T.L. FRIESZ (1986): "Spatial competition facility location models: definition, formulation and solution approach", **Annals of Operation Research**, 6, 49-74.

6. APENDICE

Demostración del Teorema

La existencia del equilibrio de Nash para la segunda etapa una vez conocidas las localizaciones de la primera etapa fue probada con anterioridad. Sólo resta comprobar la existencia de un par de localizaciones de equilibrio para la primera etapa del juego y para ello basta con probar que dada una localización de partida para una de las empresas, si cada una responde relocalizándose al nodo que maximiza su beneficio dada la localización de la otra, entonces este proceso converge en un número finito de pasos hacia el equilibrio.

Para probar que el proceso no cicla, supongamos por reducción al absurdo que existen dos subconjuntos $\left\{x_A^1, x_A^2 \cdots x_A^p\right\}$ y $\left\{x_B^1, x_B^2 \cdots x_B^p\right\}$ de localizaciones que representan las elecciones de A y B respectivamente, siendo A la primera en decidir, de tal manera que:

$$\pi_A\left(x_A^2, x_B^1\right) > \pi_A\left(x_A^1, x_B^1\right)$$

$$\pi_B\left(x_A^2, x_B^2\right) > \pi_B\left(x_A^2, x_B^1\right)$$

$$\pi_A\left(x_A^3, x_B^2\right) > \pi_A\left(x_A^2, x_B^2\right)$$

$$\vdots$$

$$\pi_A\left(x_A^1, x_B^p\right) > \pi_A\left(x_A^p, x_B^p\right)$$

$$\pi_B\left(x_A^1, x_B^1\right) > \pi_B\left(x_A^1, x_B^p\right)$$

es decir, el proceso cicla en el paso p. Entonces, sumando todas las inecuaciones se tiene

$$\sum_{i=1}^{p} \pi_A\left(x_A^{i+1}, x_B^i\right) + \sum_{i=1}^{p} \pi_B\left(x_A^{i+1}, x_B^{i+1}\right) > \sum_{i=1}^{p} \pi_A\left(x_A^i, x_B^i\right) + \sum_{i=1}^{p} \pi_B\left(x_A^{i+1}, x_B^i\right)$$

donde $x_A^{p+1} = x_A^1$ y $x_B^{p+1} = x_B^1$. Pasando todo al primer miembro y agrupando bajo el mismo sumatorio

$$\sum_{i=1}^{p}\left[\pi_A\left(x_A^{i+1}, x_B^i\right) - \pi_A\left(x_A^i, x_B^i\right) + \pi_B\left(x_A^{i+1}, x_B^{i+1}\right) - \pi_B\left(x_A^{i+1}, x_B^i\right)\right] > 0$$

Sustituyendo las expresiones de los beneficios deducidas con anterioridad, simplificando los costes fijos, sacando factor común y empleando la notación $t_{B^i A^j}$ para indicar la diferencia de costes de transporte si B se localiza en x_B^i y A en x_A^j, y $C'_{A^i}\left(C'_{B^i}\right)$ para indicar el coste marginal para A (B) si se localiza en $x_A^i\left(x_B^i\right)$, se obtiene

$$\frac{1}{18(b_A+b_B)}\sum_{i=1}^{p}\left\{\begin{array}{l}\left(2(b_A+2b_B)\Lambda+t_{B^iA^{i+1}}+C'_{B^i}-C'_{A^{i+1}}\right)^2\\-\left(2(b_A+2b_B)\Lambda+t_{B^iA^i}+C'_{B^i}-C'_{A^i}\right)^2\\+\left(2(2b_A+b_B)\Lambda-t_{B^{i+1}A^{i+1}}+C'_{A^{i+1}}-C'_{B^{i+1}}\right)^2\\-\left(2(2b_A+b_B)\Lambda-t_{B^iA^{i+1}}+C'_{A^{i+1}}-C'_{B^i}\right)^2\end{array}\right\}>0$$

y teniendo en cuenta que el primer factor es positivo, desarrollando convenientemente los cuadrados y simplificando lo que sólo depende de i en el primer caso y de i + 1 en el segundo, resulta el sumatorio de la siguiente expresión

$$\begin{array}{l}\left(t_{B^iA^{i+1}}-C'_{A^{i+1}}\right)^2+2\left(t_{B^iA^{i+1}}-C'_{A^{i+1}}\right)\left(2(b_A+2b_B)\Lambda+C'_{B^i}\right)\\-\left(t_{B^iA^i}-C'_{A^i}\right)^2-2\left(t_{B^iA^i}-C'_{A^i}\right)\left(2(b_A+2b_B)\Lambda+C'_{B^i}\right)\\+\left(t_{B^{i+1}A^{i+1}}-C'_{B^{i+1}}\right)^2-2\left(t_{B^{i+1}A^{i+1}}+C'_{B^{i+1}}\right)\left(2(2b_A+b_B)\Lambda+C'_{A^{i+1}}\right)\\-\left(t_{B^iA^{i+1}}-C'_{B^i}\right)^2+2\left(t_{B^iA^{i+1}}-C'_{B^i}\right)\left(2(2b_A+b_B)\Lambda+C'_{A^{i+1}}\right)\end{array}$$

Sacando factor común, desarrollando los cuadrados y teniendo en cuenta que el término $t^2_{B^{i+1}A^{i+1}}$ puede ser reemplazado por $t^2_{B^iA^i}$ y $\left(C'_{X^{i+1}}\right)^2$ por $\left(C'_{X^i}\right)^2$ (X = A,B), se tiene el sumatorio de la expresión

$$\begin{array}{l}2t_{B^iA^i}C'_{A^i}-2t_{B^iA^{i+1}}C'_{A^{i+1}}+2t_{B^{i+1}A^{i+1}}C'_{B^{i+1}}-2t_{B^iA^{i+1}}C'_{B^i}\\+2\left(2(b_A+2b_B)\Lambda+C'_{B^i}\right)\left(t_{B^iA^{i+1}}-t_{B^iA^i}+C'_{A^i}-C'_{A^{i+1}}\right)\\+2\left(2(b_A+b_B)\Lambda+C'_{A^{i+1}}\right)\left(t_{B^iA^{i+1}}-t_{B^{i+1}A^{i+1}}+C'_{B^i}-C'_{B^{i+1}}\right)\end{array}$$

Agrupando, teniendo en cuenta que se puede sustituir $t_{B^{i+1}A^{i+1}}C'_{B^{i+1}}$ por $t_{B^iA^i}C'_{B^i}$, y eliminando algunos términos cuyo sumatorio es cero, resulta

$$2\sum_{i=1}^{p}\left\{\begin{array}{l}t_{B^iA^i}\left(C'_{A^i}+C'_{B^i}\right)+2(b_A+2b_B)\Lambda\left(t_{B^iA^{i+1}}-t_{B^iA^i}\right)\\+C'_{B^i}\left(t_{B^iA^{i+1}}-t_{B^iA^i}+C'_{A^i}-C'_{A^{i+1}}\right)\\-t_{B^iA^{i+1}}\left(C'_{A^{i+1}}-C'_{B^i}\right)+2(2b_A+b_B)\Lambda\left(t_{B^iA^{i+1}}-t_{B^{i+1}A^{i+1}}\right)\\+C'_{A^{i+1}}\left(t_{B^iA^{i+1}}-t_{B^{i+1}A^{i+1}}+C'_{B^i}-C'_{B^{i+1}}\right)\end{array}\right\}>0$$

Sustituyendo en el quinto término $t_{B^{i+1}A^{i+1}}$ por $t_{B^iA^i}$ y tras agrupar y simplificar, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{p}\left\{\begin{array}{l}t_{B^iA^i}\left(C'_{A^i}+C'_{B^i}\right)-t_{B^iA^{i+1}}\left(C'_{A^{i+1}}+C'_{B^i}\right)\\+6(b_A+b_B)\Lambda\left(t_{B^iA^{i+1}}-t_{B^iA^i}\right)\\+C'_{B^i}\left(t_{B^iA^{i+1}}-t_{B^iA^i}\right)+C'_{A^{i+1}}\left(t_{B^iA^{i+1}}-t_{B^{i+1}A^{i+1}}\right)\end{array}\right\}>0$$

y simplificando queda

$$\sum_{i=1}^{p}\left\{t_{B^iA^i}C'_{A^i}-t_{B^{i+1}A^{i+1}}C'_{A^{i+1}}+6(b_A+b_B)\Lambda(t_{B^iA^{i+1}}-t_{B^iA^i})\right\}>0$$

Dado que al desarrollar el sumatorio anterior los términos asociados a los dos primeros desaparecen, resulta

$$6(b_A + b_B)\Lambda \sum_{i=1}^{p} \left(t_{B^i A^{i+1}} - t_{B^i A^i} \right) > 0.$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones para las diferencias de los costes (I indica un nodo de demanda cualquiera) y teniendo en cuenta que el primer factor es positivo

$$\sum_{i=1}^{p} \left(t_{IB^i} - t_{IA^{i+1}} - t_{IB^i} + t_{IA^i} \right) > 0.$$

y entonces

$$\sum_{i=1}^{p} \left(t_{IA^i} - t_{IA^{i+1}} \right) > 0$$

pero al anularse el primer miembro de la desigualdad se obtiene la contradicción buscada 0 > 0. ■