ANALISIS DIFUSO DE COALICIONES (I)

Rafael Espín Andrade[1] y Eduardo Fernández González[2]
[1]Facultad de Ingeniería Industrial, Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" (ISPJAE)
[2]Universidad Autónoma de Sinaloa, México

RESUMEN
El presente trabajo es el primero de dos artículos seriados que proponen un modelo lógico difuso de regateo que traduce un grupo de presupuestos obtenidos en literatura no matemática frecuentemente consultada, que refleja la experiencia de prestigiosos autores sobre la negociación. Se establece una racionalidad simple y real, que permite a diferencia de modelos anteriores el pronóstico de los resultados del regateo. El punto de partida del modelo son las ideas básicas de la teoría de juegos n-personales de Von Neumann y Morgenstern, aportando un nuevo paradigma de solución. El modelo ha sido implementado en un programa MATLAB. También se presenta un análisis lógico difuso de coaliciones, a partir de los resultados del modelo. En el primero de los artículos se refleja la situación de los modelos matemáticos existentes en relación con el problema del pronóstico de los resultados de una negociación, se expone la caracterización del proceso de regateo y los elementos teóricos necesarios para la comprensión del modelo y sus beneficios en relación con los precedentes.

Palabras clave: negociación, regateo, teoría de juegos, fuzzy logic.

ABSTRACT
A fuzzy logic model for bargaining is presented in two consecutive papers. This model "translates" a group of assumptions obtained from a frequently consulted non mathematical literature, which reflects the experience of prestigious authors about the topic of negotiation, establishing a simple and consensual rationality, that in contrast with previous approaches makes possible a prognostic of the bargaining process. Once this fuzzy model is built, it can be used in connection with the theory of Von Neumann and Morgestern for n-personal games, becoming in a new solution paradigm for these. The model was implemented on a MATLAB program. A fuzzy logic coalition analysis is presented from the model. The first paper include an explanation about the mathematical models in relation with the prognostic of negotiation results, a group of propositions that reflects the essence of bargaining process and the theoretical elements to understand the model and his advantages.

Key words: negotiation, bargaining, games theory, fuzzy logic.

1. INTRODUCCION

Los éxitos principales alcanzados en los sistemas de apoyo a la decisión vinculados con el proceso negociador han sido alcanzados desde la óptica de negociación como decisión de grupo [Bui (1994), Jelassi and Jones (1988), Jelassi and Zionts (1990), Shell (1995)]. Sin embargo, los directivos empresariales necesitan tomar decisiones desde la perspectiva de las instituciones que ellos dirigen. Importantes decisiones estratégicas y operativas relacionadas con la negociación, como la selección de contrapartes, la aceptación o no de una propuesta dada, y la formulación de propuestas y contra popuestas necesitan de esta perspectiva.

Con tales propósitos se requieren esfuerzos descriptivos del proceso de regateo que permitan estimar razonablemente los beneficios que se obtendrían en cada marco. Pero los modelos matemáticos existentes o no se proponen tal pronóstico o solo son apropiados en casos particulares [Raiffa (1982), Roth (1982, 1995), Rust and others (1992)]. Atrapar la esencia de la rica heurística del proceso de regateo, su lógica interna, es la meta a alcanzar. El aporte de un modelo que lo permita es la novedad científica fundamental de este trabajo.

El profesor de la Universidad de Barcelona y presidente de la SIGEF Dr. Jaime Gil Aluja expresó la esencia de la Matemática Difusa o Borrosa a través de lo que llamó el principio de la simultaneidad gradual [Dubbois, D. and H. Prade (1980), Gil Aluja, J. (1996)].

[1]E-mail:espin@ind.ispjae.edu.cu
[2]E-mail:eddyf@uas.uasnet.mx

...el principio del tercio excluso aparece, junto con otros dominando el pensamiento investigador que ha ido utilizando un lenguaje matemático derivado del mismo y cuyo máximo exponente (pero no el exclusivo) ha tenido como sustento el sistema binario y la matemática mecanicista. La superación de este principio y su sustitución por otro que hemos denominado "Principio de simultaneidad gradual", *ha permitido pasar de* "la" *lógica booleana a* "unas" *lógicas multivalentes, entre las cuales se destaca la lógica borrosa.*

La Matemática Difusa ha provocado de hecho una auténtica revolución científico técnica que tiene ya un papel apreciable en el campo de las finanzas y la administración de negocios. [Brassler and Homburg (1996), Castillo and Melin (1996), Mc Neil and Freiberger (1995), von Altrock (1995)].

El presente trabajo da un papel preponderante al concepto de capacidad de regateo, utilizando la matemática difusa para definirla, a partir de un grupo de predicados obtenidos a través del estudio de la literatura de negociación.

Para resolver el problema que constituye su obtención se postuló como hipótesis la conveniencia del uso de las ideas básicas de la teoría de juegos n-personales de Vonn Neumann y Morgenstern por sus amplias posibilidades para modelar diversas situaciones de la realidad, y la Matemática borrosa por sus potencialidades para formalizar el conocimiento que sobre el proceso negociador, y en particular sobre el regateo, se refleja en la literatura sobre el tema.

La temática de los juegos n-personales suele ser llamada por algunos autores, Análisis de coaliciones, aunque la gran mayoría de los paradigmas de solución en esta teoría, no relacionan la formación de las coaliciones con las soluciones que postulan [Osborne and Rubinstein (1994), Thomas (1983), Greenberg, J. (1994)]. Por otra parte como a diferencia del resto de la teoría de juegos, la casi totalidad de tales paradigmas, tienen un carácter determinista, los mismos no toman en cuenta cuán probable o posible es la concreción de un acuerdo entre las partes en el seno de un marco negociador determinado.

La solución aquí propuesta permite resolver tales dificultades, dando no solo el pronóstico de lo que debe obtener cada jugador de acuerdo a su capacidad de regateo en cada marco negociador (conjunto de jugadores), sino también el cálculo de las posibilidades de acuerdo en cada uno de los marcos de regateo, y consecuentemente una "medida lógica" de la conveniencia de que un jugador especificado negocie un acuerdo en un marco determinado.

El Análisis difuso de coaliciones que se propone, facilita la toma de decisiones estratégicas y operativas desde la perspectiva de cada jugador.

Para la obtención del modelo se elaboraron un grupo de presupuestos básicos sobre la base de la consulta bibliográfica de literatura no matemática sobre negociación, los que fueron verificados a través de la consulta a expertos.

El modelo elaborado a partir de estos presupuestos, fue implementado en un programa MATLAB. Se realizaron corridas experimentales del programa para verificar la existencia de solución y un experimento de regateo en el seno de talleres con el propósito de fijar un parámetro del modelo y validar la utilidad predictiva del mismo.

En este primer artículo se refleja la situación de los modelos matemáticos existentes en relación con el problema del pronóstico de los resultados de una negociación, se expone la caracterización del proceso de regateo, así como los elementos teóricos necesarios para la comprension del modelo y sus beneficios en relación con los precedentes. En el segundo se expondrá el modelo, el experimento de validación del mismo, un grupo de ejemplos ilustrativos y las conclusiones y recomendaciones.

2. SOBRE LOS MODELOS MATEMATICOS EXISTENTES

Los modelos matemáticos relacionados con el proceso negociador tienen en última instancia el propósito de facilitar la toma de decisiones, por ello su análisis debe ser enfocado desde esta perspectiva.

Decidir es seleccionar entre alternativas de acuerdo con las creencias y preferencias del decisor (persona o grupo de personas facultadas para seleccionar entre alternativas).

Las siguientes preguntas permiten definir los problemas principales de la toma de decisiones y el tipo de elementos que deben tenerse presente para tomar una decisión racional.

1. ¿Existen varios elementos, factores o indicadores a tener en cuenta en la decisión?

2. ¿Las consecuencias asociadas a cada una de las alternativas dependen de factores cuyo conocimiento es vago o impreciso, dependen de factores casuales, o dependen de las decisiones de otros?

3. ¿El decisor es un ente colectivo o individual?

La respuesta afirmativa a la pregunta 1 conduce al problema de la Decisión en presencia de múltiples criterios o atributos.

La respuesta a 2 da lugar a los siguientes problemas de la toma de decisiones.

- Dependencia de factores de conocimiento vago o impreciso: Decisión en condiciones de incertidumbre.

- Dependencia de factores casuales: Decisión en presencia de riesgo.

- Dependencia de las decisiones de otros: Decisión en ambiente racional.

Si la respuesta a 3 es que el decisor es un ente colectivo estamos en presencia de la Decisión de grupo.

Un modelo es útil para la toma de decisiones si logra al menos uno de los siguientes objetivos:

1. Ayudar a un decisor a seleccionar entre alternativas.

2. Ayudar a un decisor a predecir las consecuencias de sus decisiones.

3. Ayudar a un grupo decisor a alcanzar la decisión teniendo en cuenta que las opiniones y preferencias individuales de sus miembros suelen ser diversas.

A los modelos que logran lo enunciado en 1 se les llamará modelos decisivos. Para decidir cuál o cuáles son las mejores alternativas es preciso postular cuál debe ser el comportamiento del decisor ideal. Aquí se incluyen tanto los modelos de la llamada escuela normativa de la decisión, como los de la llamada escuela descriptiva que erige como paradigma "ciertos comportamientos del decisor" más cercanos a la conducta y capacidad normal del hombre.

A los que logran lo enunciado en 2 les llamaremos modelos predictivos. La necesidad fundamental de tales modelos viene dada por los problemas de decisión en ambiente racional. Por ello, el alcance de tales propósitos es difícil porque se trata de atrapar la esencia del comportamiento humano en diversas situaciones. Algunos estudios experimentales son evidencias de esta dificultad. Los modelos clásicos no tienen generalmente esta utilidad. Ciertos estudios agrupados con el nombre de modelos de racionalidad limitada, así como modelos basados en el comportamiento de agentes y juegos evolutivos, que utilizan búsquedas heurísticas y en particular algoritmos genéticos, son un enfoque prometedor que está por cristalizar en la práctica, quizás porque la manera en que interactúan los agentes aún está lejos del comportamiento real de los decisores [Axelrod (1997), Rubinstein (1998), Samuelson (1998)].

Los modelos predictivos también pueden ser utilizados para a partir de la simulación de la situación de decisión, compararla con los resultados obtenidos por el decisor y de ese modo evaluar su comportamiento.

A los que logran el tercer propósito se les llamará consensuales. Existen modelos consensuales, provenientes de enfoques muy diferentes. Desde la Teoría de la decisión en presencia de múltiples atributos, hasta modelos de la teoría de juegos, que establecen explícita o implícitamente enfoques normativos de la racionalidad o de la ética. La utilización de algoritmos evolutivos y heurísticos en general suele ser una herramienta utilizada por los Sistemas de ayuda a la decisión para facilitar las decisiones de grupo.

El proceso negociador transcurre en dos dimensiones inseparables, pero que necesitan de un estudio independiente para luego ser interrelacionados con vistas a la proyección estratégica y la toma de decisiones durante la negociación, la dimensión integrativa que busca soluciones ventajosas para todas las partes basándose en sus diferencias en prioridades, creencias, actitud hacia el riesgo, ansiedad, etc., y la distributiva que busca un acuerdo en situaciones donde las ventajas para una de las partes, son desventajas para las restantes [Bazerman and Neale [1992)].

Se llama regateo al proceso correspondiente a la dimensión distributiva del proceso negociador en el cual cada una de las partes intenta obtener la mayor parte posible para sí. Al resultado de este proceso se le llamará resultado distributivo de la negociación. Los modelos matemáticos que abordan la dimensión distributiva de la negociación reciben el nombre de modelos de regateo.

Se llamará modelo de pronóstico a los modelos predictivos de regateo; los cuales permiten prever qué parte de los beneficios le corresponderá a cada una de las partes involucradas. Tal previsión facilita la selección consecuente de posibles contrapartes y la evaluación de propuestas y posibles acuerdos en una negociación.

Los llamados modelos económicos de regateo suelen limitarse al caso en que solo hay dos partes en la negociación y no se tiene en cuenta el efecto que la posibilidad de acuerdos alternativos con otras partes ejerce sobre la misma, esto debe suponerse implícito en el establecimiento de una apriorística y estable en el tiempo zona de compromiso [Raiffa (1982), Jelassi and others (1990)].

El resto de los modelos de regateo existentes se basan en la teoría de juegos.

La expresión de un juego en forma normal a través de una matriz de pagos, y la utilización del concepto de punto de equilibrio en sus diversos casos y acepciones aportan soluciones desde la perspectiva del comportamiento racional de todas las partes (jugadores), normando de hecho tal comportamiento [Osborne and Rubinstein (1994, 1998), Thomas (1983)]. Tal perspectiva permite una utilidad consensual de los modelos que aporta, pero no aportan utilidad predictiva, pues tal racionalidad absoluta no es real, ello determina su limitación en el aporte de modelos decisivos (desde la perspectiva individual).

La Teoría de Von-Neumann y Morgenstern sobre juegos n-personales a partir del concepto de función característica, y el más general de función superaditiva, tiene el mismo "sabor" normativo. Sus ideas básicas permiten su aplicación a una gran generalidad de problemas. Han surgido y siguen surgiendo en este marco conceptos de solución que no logran el consenso de los estudiosos de la Teoría de Juegos [Lucas (1992), Maschler (1992), Osborne and Rubinstein (1994), Thomas (1983), Greenberg (1994)].

El concepto clásico y el más natural de solución es el Core cuya principal dificultad está en la inexistencia frecuente de solución. Otros conceptos posteriores ofrecen un conjunto demasiado amplio de soluciones. Esfuerzos muy interesantes y sumamente ingeniosos han sido hechos en este campo enriqueciendo esta teoría de indudable utilidad normativa y consensual.

Partiendo de la función característica se han propuesto "valores" como soluciones únicas para los juegos n-personales a partir de diversas consideraciones y se propone su uso combinado o selectivo según el caso, pues no son satisfactorios en todos los ejemplos. El concepto más elaborado, extendido y utilizado de este tipo es el Valor de Shapley, cuya justificación axiomática ha sido criticada [Thomas (1983)]. Tal crítica le resta valor consensual, al objetar la normatividad que aporta. La literatura le concede algún valor desde el punto de vista intuitivo [Raiffa (1982)], pero tal enfoque presupone la asunción de presupuestos irreales.

La generalidad de los conceptos de partida de la teoría de juegos n-personales no ha sido aprovechada con fines predictivos pues los enfoques deterministas o probabilísticos (menos frecuentes), no han permitido brindar modelos de solución que se acerquen a una racionalidad simple y real de la dimensión distributiva del proceso negociador que describa tal proceso y consecuentemente, permita el pronóstico de los resultados.

Esto se refleja en los modelos de manera diferente, mientras el carácter determinista del Core no le permite tener en cuenta las posibilidades de concertación de un acuerdo en cada uno de los distintos conjuntos, la interpretación probabilística del valor de Shapley le da gran importancia al orden en que los jugadores "llegan" a la negociación considerándola aleatoria y uniformemente distribuida, lo que beneficia inapropiadamente a los jugadores cuyas circunstancias objetivas le confieren menor capacidad de regateo. Otros conceptos más recientes que han logrado atrapar los esfuerzos de los científicos en esta rama, como las subsoluciones y el Supercore, están íntimamente ligados con los conceptos precedentes, y logran propiedades deseables como la existencia de al menos una subsolución para cualquier juego, pero no satisfacen el propósito predictivo enunciado.

3. PROPOSICIONES QUE CARACTERIZAN LA LOGICA DEL REGATEO

La literatura más reciente de negociación hace su énfasis fundamental en la crítica a la llamada negociación por posiciones.

En ella hay consenso acerca del papel fundamental que en la negociación juega el mérito o aporte de cada una de las partes, entendido como aporte a la oportunidad de ganar dinero.

También se contrapone explícitamente a la práctica de fijar un límite inferior de ganancia por parte del negociador, que de ser incumplido determinaría su abandono de la negociación, propio de la filosofía de la negociación por posiciones, la utilización del BATNA (Best Alternative to Negotiation Agreement), indicador razonable que debe ser usado para argumentar sus intereses.

El consenso creciente alrededor de estas ideas hace depender menos el proceso de regateo de las posiciones de las partes y mucho más de las circunstancias objetivas predominantes, entendidas como los aportes de las partes y las alternativas que cada una de ellas tiene en caso de que no se arribe a un acuerdo.

Consecuentemente la posibilidad de concreción de un acuerdo depende esencialmente de la satisfacción de los intereses de las partes.

Las siguientes proposiciones son los presupuestos básicos del modelo elaborado y expresan una lógica simple y real del regateo que puede apreciarse en las ideas de Fisher y Ury sobre la negociación por méritos y encuentran apoyo en otros clásicos que abordan integralmente la negociación [Fisher and Ury (1983), Raiffa (1982), Bazerman and Neale (1992)].

1. Un negociador tiene capacidad de regateo si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

   - El aporte de la institución que representa al negocio en discusión es importante.

   - Tiene alternativas ventajosas y posibles si no se obtiene un acuerdo, o en su lugar el aporte de la institución que representa es muy importante.

2. Cualquier incremento en el aporte de una de las partes al negocio, o el acrecentamiento del beneficio que reportarían sus alternativas al mismo produce un incremento en su capacidad de regateo.

3. El beneficio que obtiene cada parte es igual a la cantidad que puede obtener sin la cooperación de las partes restantes más otra aproximadamente proporcional a su capacidad de regateo.

4. Un acuerdo es posible si y solo si todas las partes son importantes para el negocio y el beneficio que cada cual recibe es también importante para él.

4. CONSULTA A EXPERTOS

Se realizó una encuesta a una muestra de 12 expertos seleccionados de un total inicial de 17 de acuerdo a su experiencia en la negociación. En ella se les pedía que seleccionaran un intervalo en el cual debía estar el valor de verdad de cada uno de los cuatro presupuestos obtenidos utilizando la escala reflejada en la Tabla 1. Las opiniones dadas por los expertos pueden verse en la Tabla 2. Las Tablas 3 y 4 reflejan las frecuencias absolutas y relativas con que los expertos seleccionaron cada categoría de verdad como extremo inferior o superior para cada uno de los presupuestos.

Tabla 1.

Valor de Verdad	Categoría
0	falso
0.1	casi falso
0.2	bastante falso
0.3	algo falso
0.4	más falso que verdadero
0.5	tan verdadero como falso
0.6	más verdadero que falso
0.7	algo verdadero
0.8	bastante verdadero
0.9	casi verdadero
1	verdadero

A partir de las mismas fueron obtenidas las funciones de distribución acumulativas, información suministrada en la Tabla 5. La práctica de procesar de esta forma la opinión de los expertos, y considerar las frecuencias relativas asociadas a los valores de verdad o de pertenencia como valores aproximados de las probabilidades y operar con ellas, ha sido llamada método de expertones [Kauffman and Gil Aluja (1990)]. La Tabla 5 refleja por ejemplo que las probabilidades de que un experto considere al menos bastante verdadero el presupuesto número 1 está entre 0.6667 y 0.9167. En el caso del presu- puesto número 3 entre 0.75 y 1. En general los resultados obtenidos son satisfactorios.

Tabla 2.

Experto	**1**		**2**		**3**		**4**	
1	0.6	0.7	0.9	1	0.8	0.9	0.8	0.9
2	0.7	0.9	0.7	0.9	0.8	0.9	1	
3	0.8	1	0.9	1	0.9	1	0.9	1
4	0.9	1	0.8	0.9	0.8	1	0.6	0.8
5	0.8	0.9	0.7	0.9	0.9	1	0.7	0.9
6	0.9	1	0.8	0.9	0.9	1	1	
7	0.8	0.9	0.7	0.9	0.9	1	0.7	0.9
8	0.8	0.9	0.9	1	0.8	0.9	0.7	0.8
9	0.8	0.9	0.6	0.8	0.7	0.8	0.8	0.9
10	0.6	1	0.9	1	0.7	0.9	1	
11	0.8		0.9	1	0.8	1	1	
12	0.5	1	0.5	0.9	0.6	0.8	1	

A los resultados también le fue aplicada la prueba de concordancia de Kendall [Siegel (1974)], la que resultó favorable al consenso de los expertos de que el valor de verdad de cada uno de los presupuestos está entre bastante verdadero y casi verdadero.

Los resultados aparecen resumidos en la Tabla 6. En ella se reflejan los valores de los coeficientes de Kendall y de la función de distribución ji cuadrada correspondientes a los extremos inferior y superior de veracidad de cada presupuesto. La cercanía de los coeficientes de Kendall a 1, refleja la concordancia de los expertos. Los valores de la ji cuadrada calculados a partir del coeficiente y otros parámetros permitieron la confirmación de la hipótesis de no existencia de diferencias significativas entre las opiniones de los expertos.

Como esta prueba se aplica para evaluar el consenso entre jueces, en cuanto al establecimiento del ranking de alternativas, atributos, etc. fue necesario recodificar la información obtenida de los expertos. Se transformaron las categorías otorgadas al extremo inferior y superior de veracidad de cada presupuesto en un ranking natural derivado de la selección de cada categoría.

Tabla 3.

Valor de verdad	**1**		**2**		**3**		**4**	
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	0	0	0	0	0	0	0	0
0.3	0	0	0	0	0	0	0	0
0.4	0	0	0	0	0	0	0	0
0.5	1	0	1	0	0	0	0	0
0.6	2	0	1	0	1	0	1	0
0.7	1	1	2	0	2	0	2	0
0.8	6	1	2	1	5	2	2	2
0.9	2	5	6	5	4	5	2	3
1	0	5	0	6	0	5	5	7

Tabla 4.

Valor de verdad	**1**		**2**		**3**		**4**	
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	0	0	0	0	0	0	0	0
0.3	0	0	0	0	0	0	0	0
0.4	0	0	0	0	0	0	0	0
0.5	0.0833	0	0.0833	0	0	0	0	0
0.6	1.1667	0	1.0833	0	0.0833	0	0.833	0
0.7	1.0833	0.0833	0.1667	0	0.1667	0	0.1667	0
0.8	0.5	0.0833	0.1667	0.0833	0.4167	0.1667	0.1667	0.1667
0.9	0.1667	0.4167	0.5	0.4167	0.3333	0.4167	0.1667	0.25
1	0	0.4167	0	0.5	0	0.4167	0.4167	0.5833

Tabla 5.

Valor de verdad	1		2		3		4	
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0.1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.2	1	1	1	1	1	1	1	1
0.3	1	1	1	1	1	1	1	1
0.4	1	1	1	1	1	1	1	1
0.5	1	1	1	1	1	1	1	1
0.6	0.9167	1	1.9167	1	1	1	1	1
0.7	1.75	1	0.8334	1	0.9167	1	0.9168	1
0.8	0.6667	0.9167	0.6667	1	0.75	1	0.7501	1
0.9	0.1667	0.8334	0.5	0.9167	0.3333	0.8334	0.5834	0.8333
1	0	0.4167	0	0.5	0	0.4167	0.4167	0.5833

Tabla 6.

	Extinf 1	Extsup 1	Extinf 2	Extsup 2	Extinf 3	Extsup 3	Extinf 4	Extsup 4
Categoría	0.8	0.9	0.8	0.9	0.8	0.9	0.8	0.9
Kendall	0.7807	0.9156	0.7738	0.9421	0.8971	0.9318	0.8364	0.9318
Ji cuadrado	94.4701	110.7829	93.6358	113.9973	108.5502	112.7456	101.2024	112.7456

5. ELEMENTOS BASICOS DE MATEMATICA DIFUSA

En la lógica booleana un predicado es una función p definida sobre un universo X que toma valores en el conjunto {0,1}, por ejemplo la frase declarativa "x es amigo de y" se modela de acuerdo a esta lógica como el predicado p definido sobre el conjunto de pares (x,y) tal que p(x,y) es igual a 1 si x es amigo de y, y en el caso contrario es igual a 0. En lo adelante se identifican los predicados con cualquiera de las frases que modelan.

Las operaciones $\wedge, \vee$, y $\neg$ entre predicados permiten modelar respectivamente afirmaciones compuestas de la manera siguiente:

- $p \wedge q$ modela p y q y se denomina conjunción.
- $p \vee q$ modela p y/o q y se denomina disyunción.
- $\neg$ p modela no p y se denomina negación.

Su definición viene dada por "tablas de verdad" que establecen el valor veritativo de $p \wedge q$, $p \vee q$ y $\neg p$ a partir de los valores correspondientes a p y q, son por lo tanto funciones cuyo dominio es {0,1} x {0,1} ({0,1} para $\neg p$) y su imagen {0,1} [Aranda (1993)].

Por ejemplo, si p(x,y) es el predicado correspondiente a la frase "x es amigo de y", entonces la frase "x es amigo de y, pero y no es amigo de x" se modela a través del predicado $p(x,y) \wedge \neg p(y,x)$.

El conjunto de los predicados así definidos con las operaciones $\vee, \wedge$, y $\neg$ satisface una serie de propiedades que lo dotan de una estructura que recibe el nombre de Algebra de Boole, una de ellas es el llamado Axioma del tercio excluso (tercero excluido) que plantea la validez de $p \vee \neg p$ cualquiera sea el predicado p, equivalente al llamado Axioma de no contradicción que plantea la veracidad de $\neg(p \vee \neg p)$ para todo p.

Para poner en práctica el llamado "Principio de simultaneidad gradual" se definen nuevas lógicas donde un predicado es ahora una función del universo X en el intervalo [0,1], y las operaciones $\wedge$, $\vee$, y $\neg$ se definen de modo que restringidas al conjunto {0,1} x {0,1} ({0,1} para $\neg$) se obtengan las operaciones de la lógica booleana y se satisfagan parte de los axiomas de Algebra de boole sin incluir por supuesto el Axioma del tercio excluso [Dubois and Prade (1980)].

Una de estas lógicas se obtiene definiendo las operaciones del siguiente modo:

- $u(p \wedge q) = u(p) \cdot u(q)$
- $u(p \vee q) = u(p) + u(q) - u(p) \cdot u(q)$
- $u(\neg p) = 1 - u(p)$

donde u(p) es el valor de verdad del predicado p.
La lógica así definida no es distributiva y satisface las propiedades conmutativa, asociativa, identidad y las leyes de De Morgan y suele llamársele lógica probabilística (Dubois and Prade, 1980).

Las operaciones $\wedge$ y $\vee$ así definidas cumplen las siguientes propiedades adicionales:

- Cualquier incremento de los valores de verdad de p o de q provocan incrementos en el valor de verdad de $p \wedge q$, a no ser que alguno de los valores de verdad permanezca a nivel 0.

- Cualquier incremento de los valores de verdad de p o de q provocan incrementos en el valor de verdad de $p \vee q$, a no ser que alguno de los valores de verdad permanezca a nivel 1.

Si se establece:

- $u(p \wedge q) = \min(u(p), u(q))$
- $u(p \vee q) = \max(u(p), u(q))$
- $u(\neg p) = 1 - u(p)$

se obtiene la lógica más utilizada y por ello llamada en sentido estrecho Lógica Difusa.

Desde un punto de vista conjuntista la idea básica es la sustitución de la función indicadora o característica de un conjunto con imágenes en {0.1}, por el más general de función de pertenencia con imágenes en [0,1]. O sea un conjunto difuso sobre el universo X es una función definida en X con imágenes en [0,1].

Las definiciones de las operaciones unión, intersección y complemento de conjuntos difusos son operadores que se seleccionan análogamente a la forma en que se escogen las conectivas lógicas. Clásicamente suelen seleccionarse los operadores máximo, mínimo y la resta de 1, respectivamente.

Esta generalización de la teoría de conjuntos, que se corresponde con las lógicas asociadas al principio de simultaneidad gradual, del mismo modo que la teoría clásica con la lógica booleana, traza a su vez el camino para una generalización de los más diversos campos de las matemáticas, en consonancia con las necesidades anteriormente planteadas y por tanto amplía las posibilidades de aplicación de las mismas a terrenos donde antes no era posible hacerlo o se hacía de manera poco efectiva.

6. ELEMENTOS DE LA TEORIA DE JUEGOS N-PERSONALES

Llámese a N = {1,2,...,n}, el conjunto de jugadores y a N_i = {1,2,...,n_i} el conjunto de las estrategias posibles del jugador i, se llama juego en forma normal a una función vectorial g con componentes escalares g_i con imágenes reales, cuyo dominio es el producto cartesiano de los conjuntos N_i. La componente g_i recibe el nombre de función de pagos del jugador i.

Se llama estrategia mixta del jugador i a una distribución probabilística sobre el conjunto N_i.

La función de pagos g se extiende sobre el conjunto de las estrategias mixtas tomando como imágenes de g el valor esperado del pago correspondiente a cada estrategia mixta.

Se llama punto de equilibrio del juego g a un vector $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ tal que $g_i = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) \geq g_i = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, y_i, \ldots, x_n^*\right)$ para todo i $\in$ N.

Todo juego en forma normal admite al menos un punto de equilibrio.

Llámese coalición a cualquier subconjunto S de N. Se llama estrategia mixta conjunta de la coalición S a cualquier distribución probabilística sobre el producto cartesiano de los conjuntos N_i con i $\in$ S.
Se llama función característica del juego g a la función v definida sobre el conjunto potencia de N, con imágenes en el conjunto de los números reales, que cumple:

1. v($\emptyset$) = 0

2. v(S) = $\max_{x \in X_s} \min_{y \in Y_{N/S}} \sum_{i \in S} g_i(x, y)$, X_S y $Y_{N/S}$ son los conjuntos de estrategias mixtas conjuntas correspondientes a S y N/S respectivamente.

Esta función satisface la propiedad

v(S $\cup$ T) = v(S) + v(T)

donde S y T son subconjuntos disjuntos de N. Esta propiedad recibe el nombre de Superaditividad.

La idea de caracterizar un juego mediante una función sobre el conjunto potencia de N, es muy útil, pero la manera de definir la función es cuestionable, pues como el juego no es necesariamente de suma 0 [Thomas (1983)] se adopta implícitamente con tal definición la estrategia de maximizar el peor caso.

Por ello suele identificarse el concepto de juego de manera directa con el más general de función superaditiva sobre el conjunto potencia de N.

Se llama imputación de un juego v a un vector x = (x_1, x_2,...,x_n) tal que:

1. $\sum_{i=1}^{n} X_i = v(N)$

2. $x_i \geq v(i)$ para todo i $\in$ N

Sean **x** y **y** dos imputaciones, se dice que **x** domina a **y** para la coalición S, si $x_i > y_i$ para todo i $\in$ S y $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

Se llama Core de un juego de función característica v, y se denota C(v) al conjunto de las imputaciones que no son dominadas para ninguna coalición.

Se satisface la siguiente proposición:

Una imputación x pertenece al Core si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ y $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ para toda coalición S.

El Core es sin duda una solución normativa razonable, que marcó de algún modo todos los esfuerzos posteriores en la obtención de paradigmas de solución.

Ejemplo 1:

Sea 1 una empresa productora de un artículo que podría comercializar directamente y obtener un beneficio por unidad de $ 15.00 o asociarse con la empresa 2 para obtener $ 20 o con la 3 para obtener $ 25. Si tales asociaciones no modifican ni la capacidad productiva, ni la magnitud del mercado disponible. Defínase la función que caracteriza el juego en el que las partes buscan naturalmente asociarse y regatear de modo que obtengan los mejores beneficios.

La función se puede expresar en términos de beneficio por unidad de la siguiente manera:
$v(\{1\}) = 15$, $v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, $v(\{1,2\}) = 20$, $v(\{1,3\}) = 25$, $v(\{2,3\}) = 0$, $v(\{1,2,3\}) = 25$

El Core sería $C(v) = \{(a,b,c)\text{: } a+b+c = 25,\ a \geq 15,\ b \geq 0,\ c \geq 0,\ a+b \geq 20,\ a+c \geq 25,\ b+c \geq 0\} =$

$$= \{(a,b,c)\text{: } a+c = 25,\ b = 0,\ a \geq 20\} = \{(a,0,25-a)\text{: } 20 \leq a \leq 25\}.$$

El Core aporta en este ejemplo un número muy amplio de soluciones.

Ejemplo 2:

En el siguiente juego:

$v(\{1\}) = 0$, $v(\{2\}) = 0$, $v(\{3\}) = 0$, $v(\{1,2\}) = 118$, $v(\{1,3\}) = 84$, $v(\{2,3\}) = 50$, $v(\{1,2,3\}) = 121$

$C(v) = \{(a,b,c)\text{: } a+b+c = 121,\ a,b,c \geq 0,\ a+b \geq 118,\ a+c \geq 84,\ b+c \geq 50\} = \emptyset$, para comprobarlo basta sumar las tres últimas ecuaciones y se obtiene $a+b+c \geq 126$ que contradice la ecuación $a+b+c = 121$.

Ejemplo 3

Sea el juego v de tres jugadores tal que:

$v(\{1\}) = 0$, $v(\{2\}) = 0$, $v(\{3\}) = 0$, $v(\{1,2\}) = 10$, $v(\{1,3\}) = 10$, $v(\{2,3\}) = 0$, $v(\{1,2,3\}) = 10$,

$C(v) = \{(a,b,c)\text{: } a+b+c = 10,\ a,b,c \geq 0,\ a+b \geq 10,\ a+c \geq 10,\ b+c \geq 0\} = \{(10,0,0)\}$

La solución aportada por el Core es irreal, aun desde una perspectiva normativa. No tiene sentido que los jugadores b y c deban aceptar que a obtenga la totalidad de un beneficio, que solo cooperando con alguno de ellos puede ser obtenido.

Los ejemplos hacen evidente que el Core no es un modelo de pronóstico. Además ilustran sus limitaciones como herramienta consensual, asociadas a la amplitud o ausencia de soluciones o a la inaceptabilidad en algunos casos.

Otros paradigmas de solución como el Nucleulus o el Supercore resuelven el problema de la ausencia de soluciones definiendo superconjuntos que lo contengan en caso de su existencia, lo que sin duda es útil, pero no desde una perspectiva predictiva. En general la definición de conjuntos solución no ofrece perspectivas.

Otro enfoque con más posibilidades de aportar herramientas de pronóstico, es la definición de una única imputación (valor) como solución para un juego. EL valor de Shapley es el más conocido y utilizado.

Se llama valor de Shapley de un juego v al vector $\Phi(v)$ de componentes

$$\Phi_i(v) = \sum_{S:i\in S} \frac{(\# S-1)!(n-\# S)!}{n!}\left(v(S)-V(S-\{i\})\right)$$

donde #S es el número cardinal del conjunto S.

Este valor surgió con vocación predictiva, tenía el propósito de ser considerado el valor que debe esperarse como resultado del juego v.

Su argumentación se basa en un grupo de propiedades que solo satisface este vector, o en una justificación más intuitiva.

La justificación axiomática viene dada por las siguientes propiedades.

i) El valor no depende del número de orden asignado a cada jugador, es decir $\Phi_{\pi(i)}\left(\pi(v)\right) = \Phi_i(v)$, donde π es una permutación de n objetos.

ii) $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(v) = v(N)$.

iii) $\Phi_i(u+v) = \Phi_i(u) + \Phi_i(v)$.

Los axiomas i e ii son totalmente razonables. El que es objetado es el iii.

En particular interpretado desde la óptica de la negociación, los resultados de dos negociaciones diferentes no tienen por qué ser de realizarse al unísono, la suma de los resultados de las negociaciones anteriores. Es natural que existan interrelaciones mucho más complejas.

La interpretación intuitiva que sin duda se obtiene de la fórmula es que la cantidad que obtiene el jugador i de llegar a la negociación después de los jugadores del conjunto S y antes de N-(S/{i]) es v(S) - v(S-{i}). Es decir que el orden en que los jugadores lleguen a la negociación es algo decisivo en la cantidad que le corresponde obtener en el regateo. Este orden como es natural se considera aleatorio y por ello la probabilidad de que i llegue en el orden indicado es (#S-1)!(n-#S)!/n!. La fórmula desde este punto de vista suministraría sin duda el valor esperado del beneficio del jugador i.

Esta fórmula es sin duda sumamente ingeniosa, pero no refleja características reales del proceso de regateo, tal interpretación intuitiva es un razonamiento adicional para rebatir el cumplimiento del axioma iii.La atribución de un papel importante en la distribución del beneficio al orden de llegada, es un elemento que tiende al igualitarismo, y por tanto beneficia inapropiadamente a los jugadores con una posición objetiva menos sólida. Tal crítica apunta no sólo en contra de su valor predictivo, también objeta su valor consensual.

Los ejemplos que se ponen a continuación ilustran la crítica realizada.

El valor de Shapley del ejemplo 1 es (20.8333, 0.8333, 3.3333), tal valor no pertenece al Core porque beneficia al jugador 2 con una cantidad superior a 0.

De la cantidad 25-a, con $a \in [20,25]$ correspondiente al jugador 3 en el Core se resta de 25 un número bastante más cercano a 20 que a 25, es decir bastante más beneficioso para el jugador 3 que para el 2 que sin duda tiene una posición más sólida en la negociación.

Ejemplo 4

El siguiente ejemplo tomado de [Raiffa (1982)] es una negociación real. Las siguientes tres compañías: Scandinavian Cement Company (SC), Cement Corporation (CC) y Thor Cement Company (TC) monopolizan el mercado escandinavo y tratan de ponerse de acuerdo para compartir las ganancias sin entrar en una competencia que pudiera ser perniciosa, para ello contratan los servicios de un consultor independiente que hace una valoración de la cantidad mínima que cada conjunto de compañías puede obtener en millones de dólares, lo que se refleja en la función v que se define a continuación, donde las compañías se identifican por el número de orden en el que fueron escritas anteriormente y los conjuntos son cada uno de los marcos posibles de negociación.

$v(\{1\}) = 30$, $v(\{2\}) = 22$, $v(\{3\}) = 5$, $v(\{1,2\}) = 59$, $v(\{1,3\}) = 45$, $v(\{2,3\}) = 39$, $v(\{1,2,3\}) = 77$.

El resultado final de esta negociación fue (37.69, 29.02, 10.29). Sin embargo el valor de Shapley es (35.5, 28.5, 13) que otorga un valor bastante mayor al jugador 3 que tiene la posición menos sólida en detrimento del jugador 1 cuya situación objetiva es mejor.

Otra crítica importante inherente a los paradigmas basados en el concepto de imputación es que no existe correspondencia entre la estructura de coaliciones y las imputaciones que se postulan como solución.

Un concepto que no adolece de tal problema es el Conjunto de regateo, tampoco adolece de él el Núcleo, íntimamente ligado al primero. Ambos parten del concepto básico de Configuración racional de pagos.

Se llama configuración racional de pagos a un conjunto de coaliciones disjuntas $B_1, B_2,...,B_m$, cuya unión es el conjunto N de todos los jugadores y un vector de pagos $x = (x_1, x_2,...,x_n)$ tal que:

i) $\sum_{i \in B_j} x_i = v(B_j)$ para j = 1,2,...,m.

ii) $x_i \geq v(i)$

Sean k y l dos jugadores de una coalición B_i de la configuración anterior, se dice que k tiene una objeción sobre el jugador 1, si existe un vector $y = (y_1, y_2,...,y_n)$, cuya suma de componentes es v(C), tal que $y_k > x_k$ y $y_i \geq x_i$ para todo jugador en C distinto de 1. En tal caso, se dice que 1 tiene una contraobjeción sobre la objeción realizada por k, sobre él, si existe una coalición D, y un vector de pagos $z = (z_1, z_2,...,z_n)$ cuyas componentes suman v(D) y tales que $z_i \geq x_i$ para todo $i \in D$ y $z_i \geq y_i$ para todo $i \in C \cap D$.

Una objeción de k sobre l, se dice que es justificada, si 1 no tiene contraobjeción para ella.

Se llama conjunto de regateo de un juego al conjunto de todas las configuraciones racionales de pagos tales que en el seno de ninguna de las coaliciones exista un jugador con objeciones justificadas sobre otro de la misma coalición.

En el ejemplo 1 el Conjunto de regateo sería [Thomas (1983)]:

M = {{1}), {2}, {3}, (15,0,0); {1,2}, {3}, (20,0,0); {1}, {2,3}, (15,0,0); {1,3}, {2}, (x,0,25-x}, $x \in [20,25]$; {1,2,3}, (x,0,25-x), $x \in [20,25]$}

Nótese que para {1,2}, {3} el jugador 2 obtiene 0, lo que constituye un resultado irreal. Para {1,2,3} sucede también que el jugador 2 no obtiene beneficio formando parte de esa coalición. Tales resultados irreales es casi imposible que se produzcan, sin embargo justamente esos absurdos que se corresponden con el poder de regateo de las partes son los que determinan que sea prácticamente imposible la obtención de un acuerdo en tales marcos. Es conveniente entonces tener en cuenta una medida de la posibilidad de que se produzca un acuerdo en un marco dado. La partición {1,3}, {2} es más factible de producirse porque la tendencia natural de la situación de negociación tiende a que los miembros de la coalición {1,3} se beneficien ambos. Esto es por el hecho de que la posibilidad de concreción de un acuerdo en el marco {1,3} es alta.

La medida de la posibilidad de que una estructura de coaliciones se produzca está íntimamente ligada con los acuerdos que se producirían en el seno de cada coalición en caso de llevarse a efecto. Esta última reflexión apunta a la introducción del concepto de posible coalición o marco de negociación. En otras palabras, se trata de medir la posibilidad de que un marco de negociación se convierta en una coalición, lo cual ocurre cuando en dicho marco se llega a un acuerdo. Quiere esto decir que es básica la medición de la posibilidad de un acuerdo en un marco de negociación dado.

La posibilidad de que un acuerdo se produzca en un marco de negociación dado es de hecho un elemento que influye en el regateo que se produce en otros marcos de negociación, puesto que tales acuerdos pueden ser esgrimidos como alternativas de negociación.

Otros esfuerzos encaminados a vincular una estructura dada de coaliciones con conjuntos de imputaciones o vectores de pagos en general, han sido realizados, pero en todos los casos se hacen análisis deterministas que no permiten medir -ni se lo proponen- la posibilidad de que se obtenga un acuerdo, en un marco de negociación dado [Thomas (1983), Greenberg (1994)].

REFERENCIAS

ARANDA, J. y otros (1993): "Lógica Matematica". Sanz y Torres.

AXELROD, R. (1997): "The Complexity of Cooperation Agent Based Models of Competition and Colaboration". Princeton University Press.

BAZERMAN, M. and M. NEALE (1992): "Negotiating Rationally". **The Free Press**, New York.

BRASSLER, A. and O. HOMBURG (1996): "Integration of the fuzzy sets theory in the firm´s planning process". **Proceedings of International Conference on Intelligent Technologies in Human-Related Sciences**, León, Spain, 395-402.

BUI, T. (1994): "Evaluating Negotiation Support Systems: A Conceptualization". **Proceedings of Twenty-Seventh Annual International Conference on Systems Sciences**, Hawaii.

CASTILLO, O. and P. MELIN (1996): "An Intelligent System for Financial Time Series Prediction using Fuzzy Logic Techniques and Fractal Theory", **Proceedings of International Conference on Intelligent Technologies in Human-Related Sciences**, León, Spain, 423-430.

DUBBOIS, D. and H. PRADE (1980): "Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications", Academic Press Inf.

FISHER, R. and W. URY (1983): **Getting to Yes Negotiating Agreement Without Giving**. In: New York, Penguin Books.

GIL ALUJA, J. (1996): "Lances y desventuras del nuevo paradigma de la decisión", **Proceedings of the International Society Congress on Management and Fuzzy Economy**, Buenos Aires, 95-106.

GREENBERG, J. (1994): "Coalition Structure". In: R.J. Aumann and S. Hart (editors) (1992): **Handbook of Game Theory**, Elsevier, Amsterdam. Vol. II.

JELASSI, T.; G. KERSTEN and S. ZIONTS (1990): "An introduction to Group Decision and Negotiation Support", In: C.A. Bana e Costa (ed.) **Readings in Multiple Criteria Decision Aid**, Springer Verlag, Berlin, 537-568.

JELASSI, T.; M.T. and B.H. JONES (1988): "Getting to Yes with NSS: How Computers Can Support Negotiation". **Organizational Decision Support Systems**. R.M. Lee and P. Migliarese. Amsterdam, North-Holland: 75-85.

KAUFMANN, A. y J. GIL ALUJA (1990): **Las matemáticas del azar y de la incertidumbre**. Editorial Centro de estudios *Ramón Areces*. Madrid.

LUCAS, W.F. (1992): "Von Neuman-Morgenstern Stable Sets": In: R.J. Aumann and S. Hart (editors) (1992): **Handbook of Game Theory**. Elsevier, Amsterdam. Vol. I.

MASCHLER, M. (1992): "The Bargaining Set, Kernel and Nucleolus". In: R.J. Aumann and S. Hart (editors) (1992): **Handbook of Game Theory**, Elsevier, Amsterdam. Vol. I.

Mc NEIL, D. and P. FREIBERGER (1993): **Fuzzi Logic**. Simon & Schuster, New York.

OSBORNE, M. and A. RUBINSTEIN (1994): **A Course in Game Theory**. Cambridge, Mass: MIT Press.

____________________________ (1998): "Games with Procedurally Rational Players", **American Economics Review** 88, 39-48.

RAIFFA, H. (1982): **The art and Science of Negotiation**, Harvard University Press, London.

ROTH, A. (ed.) (1985): **Game Theoretic Models of Bargaining**, Cambridge.

_______ (1995): "Bargaining Experiments", In: Kagel H. and Roth A. (eds.) **Handbook of Experimental Economy**, Princeton University Press, 253-348.

RUBINSTEIN, A. (1998): **Modelling Bounded Rationality**. The MIT Press University. Cambridge.

RUST, J.; J.H. Miller and R. Palmer (1992): **Behavior of Trading Automata in a Computarized Double Auction Market**, in **The Double Auction Market**. D. Friedman and J. Rust, Editor. Addison-Wesley: Reading, MA. p. 155-198.

SAMUELSON, L. (1998): **Evolutionary Games and Equilibrium Selection**. The MIT Press. Cambridge.

SHELL, G.R. (1995): "Computer-assisted Negotiation and Mediation. Where We Are and Where we are goin". **Negotiation Journal** 11(2):117-121.

SIEGEL, S. (1974): "Estadística no paramétrica aplicada a las ciencias de la conducta". Méjico. Ed. Trillas.

THOMAS, L.C. (1983): "Games. Theory and Applications", Ellis Horwood Series. **Mathematics and its applications**.

VON ALTROCK, C. (1995): **Fuzzi Logic and Neurofuzzy Applications in Bussines and Finance**. Prentice Hall, New Jersey.