SOLUCIONES A DIFERENTES PROBLEMAS DENTRO DEL CAMPO DE LA COMUNICACION ESTADISTICA

J. Navarro Moreno, J.C. Ruiz Molina y R.M. Fernández Alcalá, Departamento de Estadística e Investigación Operacional, Universidad de Jaen, España

RESUMEN

En esta comunicación se tratan diversos problemas muy comunes en el ámbito de la ingeniería, proporcionando a estos soluciones fácilmente implementables desde un punto de vista práctico. En concreto, se abordan los problemas de estimar un funcional de una señal aleatoria que viene perturbada por un ruido blanco, y el de detectar una señal, aleatoria o determinística, en ruido Gaussiano. Para ello, en primer lugar se presentarán los denominados desarrollos aproximativos tipo Karhunen-Loève de un proceso estocástico, y posteriormente haciendo uso de sus excelentes propiedades desde un punto de vista computacional, se aplicarán a los problemas anteriores obteniéndose las diferentes soluciones.

Palabras clave: desarrollos aproximativos tipo Karhunen-Loève, estimación en media cuadrática, detección de una señal en ruido Gaussiano.

ABSTRACT

This paper addresses different problems with are very common in communication engineering. In particular, the problem of estimating a functional of a signal process on the basis of noisy observations and the problem of detecting a deterministic signal in Gaussian noise are considered. For this purpose, firstly, we show the approximate Karhunen-Loève expansions of a stochastic process. Afterwards, these expansions are applied to solve the previous problems, obtaining solutions which are computationally feasible and can be easily implemented on a computer.

Key words: developments approximate type Karhunen-Loève, estimate in quadratic stocking, detection of a sign in noise Gaussiano.

MSC: 60G12.

1. DESARROLLOS APROXIMATIVOS

Sea un proceso de segundo orden $\{x(t),\ t \in [0,T]\}$ definido sobre el espacio de probabilidad (Ω, B, P), centrado, continuo en media cuadrática y con función de covarianza $R(t,s)$. Entonces:

(a) La función de covarianza admite el siguiente desarrollo (Teorema de Mercer):

$$R(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(t) \phi_i(s) \qquad t,s \in [0,T]$$

siendo la convergencia absoluta y uniforme en $[0,T] \times [0,T]$. Las constantes λ_i y las funciones $\phi_i(t)$ son los autovalores y autofunciones propios, respectivamente, de la siguiente ecuación integral de Fredholm:

$$\lambda_i \phi_i(t) = \int_0^T R(t,s)\phi_i(s)ds \tag{1}$$

(b) El proceso $x(t)$ tiene la siguiente representación (desarrollo de Karhunen-Loève):

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \phi_i(t) \qquad t \in [0,T]$$

donde la anterior serie converge en media cuadrática uniformemente en $t \in [0,T]$, y b_i se define:

$$b_i = \int_0^T \phi_i(t)x(t)dt \quad \text{m.c.} \tag{2}$$

Desde un punto de vista práctico, el desarrollo de Karhunen-Loève presenta la dificultad de que no existe un método general para resolver la ecuación integral (1). Una alternativa consiste en utilizar procedimientos numéricos: el método de Rayleigh-Ritz (Baker, 1977). A partir de un conjunto de k funciones $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t),...,\varphi_k(t),...\}$, extraídas de un sistema ortonormal completo de $L^2[0,T]$ arbitrario, este método permite obtener las autofunciones aproximadas.

$$\tilde{\phi}_{i,k}(t) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\varphi_j(t) \qquad i = 1,...,n \qquad k = 1,2,...$$

donde los coeficientes a_{ij} y los autovalores aproximados $\tilde{\lambda}_{i,k}$ se obtienen a partir del siguiente problema de autovalores:

$$Aa_i = \tilde{\lambda}_{i,k} Ba_i \qquad i = 1,...,n$$

siendo los elementos de las matricez $A = (A_{ij})$ y $B = (B_{ij})$ de la forma:

$$A_{i,j} = \int_0^T\int_0^T R(t,s)\,\varphi_i(s)\varphi_j(t)dtds, \qquad i,j = 1,...,k$$

$$B_{i,j} = \int_0^T \varphi_i(s)\varphi_j(t)dt = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,...,k$$

y los autovectores: $a_i = (a_{i1,...,}a_{ik})'$, i = 1,...,n.

El método de Rayleigh-Ritz garantiza la convergencia de los autovalores y autofunciones aproximados en el siguiente sentido: $\|\phi_i(t) - \tilde{\phi}_{i,k}(t)\|_2 \to 0$ y $\tilde{\lambda}_{i,k} \to \lambda_i$, cuando $k \to \infty$, donde $\|\cdot\|_2$ denota a la norma definida en $L^2[0,T]$.

Basado en estos autovalores y autofunciones aproximados se construye el siguiente desarrollo en serie aproximativo tipo Karhunen-Loève, denominado desarrollo aproximado:

$$\tilde{x}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_{i,k}\tilde{\phi}_{i,k}(t) \qquad t \in [0,T]$$

donde $n \leq k$ y $\tilde{b}_{i,k} = \int_0^T \tilde{\phi}_{i,k}(t)x(t)dt$ (m.c.), i = 1,...,n, son v.a. con $E\left[\tilde{b}_{i,k}\tilde{b}_{j,k}\right] = \tilde{\lambda}_{i,k}\delta_{ij}$.

Gutiérrez **et al**. (1992) han demostrado que

$$\left\|x(t) - \tilde{x}_n(t)\right\|_H \xrightarrow{n\uparrow\infty} 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

donde $\|\cdot\|_H$ es la norma definida en el subespacio H(x) de $L^2(\Omega,B,P)$ generado por las variables aleatorias x(t).

La principal objeción de las autofunciones aproximadas $\tilde{\phi}_{i,k}(t)$ es que no convergen de forma puntual necesariamente a las verdaderas $\phi_i(t)$. Para salvar este problema, en Ruiz-Molina **et al**. (1999a) se define un nuevo tipo de autofunción aproximada, denominada autofunción modificada, de la forma:

$$\hat{\phi}_{i,k}(t) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_{i,k}}\int_0^T R(t,s)\tilde{\phi}_{i,k}(s)ds \qquad t \in [0,T]$$

y se demuestra que

(a) $\left\| \phi_i(t) - \hat{\phi}_{i,k}(t) \right\|_\infty \xrightarrow{k\uparrow\infty} 0,$ donde $\|.\|_\infty$ denota a la norma del supremo en [0,T].

(b) $\left\| R(t,s) - \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_{i,k} \hat{\phi}_{i,k}(t) \hat{\phi}_{i,k}(s) \right\|_\infty \xrightarrow{k\uparrow\infty} 0,$ en $[0,T] \times [0,T]$.

(c) A partir de las $\hat{\phi}_{i,k}(t)$ se puede definir un nuevo desarrollo aproximativo, denominado desarrollo modificado, de la forma:

$$\hat{x}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_{i,k} \hat{\phi}_{i,k}(t) \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

que verifica

$$\left\| x(t) - \hat{x}_n(t) \right\|_H \xrightarrow{k\uparrow\infty} 0$$

uniformemente en $t \in [0,T]$.

(d) Si $\dfrac{\partial^{2m}}{\partial t^m \partial s^m} R(t,s)$ existe y es continua en $[0,T] \times [0,T]$, entonces la derivada m-ésima en el sentido de la media cuadrática de x(t), $x^{(m)}(t)$, puede aproximarse de la siguiente forma:

$$\left\| x^{(m)}(t) - \hat{x}_n^{(m)}(t) \right\|_H \xrightarrow{n\uparrow\infty} 0$$

uniformemente en $t \in [0,T]$, siendo

$$\hat{x}_n^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_{i,k} \hat{\phi}_{i,k}^{(m)}(t) \tag{4}$$

donde $\hat{\phi}_{i,k}^{(m)}(t)$ es la derivada m-ésima de $\hat{\phi}_{i,k}(t)$.

En consecuencia, el método de Rayleigh-Ritz proporciona una base para construir desarrollos en serie aproximativos con propiedades muy similares al de Karhunen-Loève y que puede sustituir a este en aquellos casos en que la resolución de la ecuación (1) sea difícil.

Nota 1. En la construcción de los anteriores desarrollos en serie aproximativos no es exclusivamente necesario el uso del método de Rayleigh-Ritz para el cálculo de los autovalores y autofunciones aproximados. Puede aplicarse cualquier método numérico, tal como el método de colocación, de forma que se garantice la convergencia de los autovalores y autofunciones aproximados obtenidos a los verdaderos. Las razones de utilizar de partida el método de Rayleigh-Ritz se deben a la propiedad adicional de acotación sobre los autovalores aproximados que tiene este, en la que se garantiza que $\tilde{\lambda}_i \leq \lambda_i$; y al estudio efectuado en Gutiérrez **et al**. (1992), en el cual se realiza un análisis comparativo de este método con el de colocación, obteniéndose unos mejores resultados con el primero.

Con el objeto de abreviar la notación, a partir de ahora omitiremos el subíndice k en $\hat{\phi}_{i,k}, \tilde{\phi}_{i,k}, \tilde{\lambda}_{i,k}$ y $\tilde{b}_{i,k}$.

2. ESTIMACION LINEAL

La primera aplicación de los desarrollos aproximativos se encuentra en el problema clásico de estimación lineal óptima de una señal aleatoria interferida por ruido blanco.La formulación de este problema puede realizarse de la siguiente manera. Consideremos un proceso estocástico de segundo orden $\{x(t),\ t \in [0,T]\}$, centrado y continuo en media cuadrática. Supongamos que este proceso no es accesible directamente al investigador sino que aparece interferido por un ruido blanco v(t) con parámetro de varianza r > 0 e independiente de x(t). De esta forma, el investigador observa realmente un proceso que responde a un modelo del tipo:

$$y(t) = x(t) + v(t) \qquad t \in [0,T]$$

El problema consiste en estimar x(t) en el sentido de que se minimice el error en media cuadrática, a partir de la información proporcionada por y(t) y utilizando un estimador de la forma:

$$\hat{x}(t/t) = \int_0^t h(t,\tau)y(\tau)d\tau$$

Puede comprobarse (Van Trees, 1968) que el impulso de respuesta h que proporciona un estimador óptimo debe satisfacer la siguiente ecuación integral:

$$rh(t,\tau) + \int_0^t h(t,s)R(\tau,s)ds = R(t,\tau) \qquad 0 \le \tau \le t \le T \tag{5}$$

La resolución de la anterior ecuación integral es difícil en general. Por ello, considerando el desarrollo en serie modificado (3), en Navarro-Moreno **et al** (2000) se propone el siguiente estimador subóptimo:

$$\hat{x}_n(t/t) = \int_0^t \hat{h}_n(t,\tau)y(\tau)d\tau \tag{6}$$

siendo $\hat{h}_n(t,\tau)$ la solución de la ecuación integral:

$$r\hat{h}_n(t,\tau) + \int_0^t \hat{h}_n(t,s)\hat{R}(\tau,s)ds = \hat{R}(t,\tau) \qquad 0 \le \tau \le t \le T$$

y $\hat{R}_n(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i \hat{\phi}_i(t)\hat{\phi}_i(s)$ es la función de covarianza del desarrollo modificado.

La ventaja de esta ecuación sobre (5) es que se puede resolver fácilmente, obteniéndose la siguiente solución:

$$\hat{h}_n(t,\tau) = r^{-1}\hat{\Phi}'_n(t)\left[\tilde{\Lambda}_n^{-1} + r^{-1}\int_0^t \hat{\Phi}_n(s)\hat{\Phi}'_n(ds)\right]^{-1}\hat{\Phi}_n(\tau) \qquad 0 \le \tau \le t \le T \tag{7}$$

siendo $\hat{\Phi}_n(t)$ un vector n × 1 con entrada i-ésima la autofunción modificada $\hat{\Phi}'_n(t)$ y $\tilde{\Lambda}_n$ una matriz diagonal con elementos los autovalores aproximados $\tilde{\lambda}_i$, con i = 1,..,n.

Puede comprobarse (Navarro-Moreno **et al**., 2000) que se verifica

(a) $\left\|\hat{x}(t/t) - \hat{x}_n(t/t)\right\|_H \to 0$ uniformemente en t ∈ [0,T].

(b) $E\left[x(t) - \hat{x}_n(t/t)\right]^2 \le E\left[x(t) - \hat{x}(t/t)\right]^2 + T\alpha^2\hat{\beta}_n^2(t)$ donde $\| y(\tau) \|_H \le \alpha \le \infty$ y $\hat{\beta}_n(t) = \| h(t,.) - \hat{h}_n(t,.) \|_2 \to 0$ uniformemente en t ∈ [0,T].

Nota 2. El filtro subóptimo (6) generaliza al propuesto por ruiz-Molina y Valderrama (1996) basado en el desarrollo aproximado, evitando el problema de la constante actualización de las autofunciones aproximadas conforme el instante de estimación varía.

Nota 3. En Navarro-Moreno **et al**. (2000) se generaliza la expresión del estimador (6) al caso en el que interesa estimar un funcional de la señal. En particular, basándose en (4) se propone el siguiente estimador subóptimo para la derivada $x^{(m)}(t)$:

$$\hat{x}_n^{[m]}(t/t) = \int_0^t \hat{h}_n^{[m]}(t,\tau)y(\tau)d\tau$$

siendo

$$\hat{h}_n^{[m]}(t,\tau) = r^{-1}\hat{\Phi}_n^{(m)\prime}(t)\left[\tilde{\Lambda}_n^{-1} + r^{-1}\int_0^t \hat{\Phi}_n(s)\hat{\Phi}_n'(s)ds\right]^{-1}\hat{\Phi}_n(\tau)$$

para $t \geq \tau$, con $\hat{\Phi}_n^{(m)}(t)$ un vector $n \times 1$ con entrada i-ésima $\hat{\Phi}_i^{(m)}(t)$.

3. DETECCION DE UNA SEÑAL DETERMINISTICA

La segunda aplicación que proponemos está encuadrada dentro del campo de la detección de señales. El problema de detectar una señal conocida en ruido Gaussiano puede formularse de la siguiente manera: una señal determinística s(t) es transmitida en un período de tiempo [0,T]. La transmisión está deteriorada por un ruido centrado Gaussiano x(t) con función de covarianza R(t,s). Así, la señal recibida viene dada por una de las siguientes hipótesis:

$$H_0 : y(t) = x(t) \qquad 0 \leq t \leq T$$

$$H_1 : y(t) = s(t) + x(t) \qquad 0 \leq t \leq T$$

Se supone que la señal s(t) es continua y que la función de covarianza R(t,s) es definida positiva y continua.

El procedimiento habitual para resolver este problema es transformar el proceso observación $\{y(t), t \in [0,T]\}$ en un conjunto numerable de v.a. $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ a partir de las que se ha de construir el estadístico de decisión óptimo. Estas v.a., denominadas coordenadas observables, pueden ser obtenidas a través del desarrollo de Karhunen-Loève del ruido: $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i\phi_i(t)$. De esta forma, el problema anterior puede expresarse equivalentemente:

$$H_0 : y_i = b_i \qquad i = 1,2,...$$

$$H_1 : y_i = s_i + b_i \qquad i = 1,2,...$$

donde b_i están definidas en (2) y $s_i = \int_0^T \phi_i(t)s(t)dt$, $i = 1,2,...$. Sean P_0 y P_1 las medidas de probabilidad asociadas a H_0 y H_1, respectivamente. Se demuestra (Poor, 1994) que $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2/\lambda_i < \infty$ entonces P_0 y P_1 son equivalentes y

$$\log\frac{dP_1}{dP_0}(y) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{s_i}{\lambda_i}y_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{s_i^2}{\lambda_i} \tag{8}$$

en el sentido de la media cuadrática, donde $y_i = \int_0^T \phi_i(t)s(t)dt$ (m.c.), i = 1,2,... .

Desde el punto de vista práctico, la implementación del sistema de detección anterior presenta dos inconvenientes. Por una parte la no finitud del desarrollo en serie (8), y por otra su explícita dependencia sobre los autovalores y autofunciones de R(t,s). Para resolver el primero de ellos se realiza un truncamiento del desarrollo (8) en un término M, de manera que la cantidad $\sum_{i=M+1}^{\infty} s_i^2/\lambda_i$, , sea intrascendente. Para la resolución del segundo en Ruiz-Molina **et al**. (1999b) se propone una solución alternativa basada en el desarrollo modificado de x(t) (3). Así, la función

$$\log \tilde{f}_n(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{s}_i}{\tilde{\lambda}_i} \tilde{y}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{s}_i^2}{\tilde{\lambda}_i} \tag{9}$$

donde $\tilde{y}_i = \int_0^T \tilde{\phi}_i(t)y(t)dt$ (m.c.) y $\tilde{s}_i = \int_0^T \tilde{\phi}_i(t)s(t)dt$, puede ser utilizada para aproximar (8).

Se demuestra (Ruiz-Molina, 1999b) que si se verifica que $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2/\lambda_i < \infty$, entonces

$$\left\| \log \frac{dP_1}{dP_0}(y) - \log \tilde{f}_n(y) \right\|_H \xrightarrow{n\uparrow\infty} 0$$

bajo H_0 y H_1. Además, el error tipo I que se comete utilizando (9) viene dado por

$$\tilde{\alpha}_n = 1 - \Phi\left(\frac{\log \sigma}{\tilde{d}_n} + \frac{\tilde{d}_n}{2} \right)$$

y el error tipo II

$$\tilde{\beta}_n = \Phi\left(\frac{\log \sigma}{\tilde{d}_n} - \frac{\tilde{d}_n}{2} \right)$$

donde $\tilde{d}_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{s}_i^2/\tilde{\lambda}_i$ y Φ denota la función de distribución de una v.a. N(0,1).

Nota 4. En Ruiz-Molina **et al**. (1999b) pueden encontrarse soluciones para el caso más general en el que la señal a detectar es aleatoria.

4. EJEMPLO

A modo ilustrativo vamos a considerar que x(t) es el proceso de Wiener estándar definido en el intervalo [0,1], con lo cual, R(t,s) = min(t,s), con t,s $\in$ [0,1]. Puede comprobarse (Van Trees, 1968) que los autovalores y autofunciones correspondientes son de la forma:

$$\lambda_i = \frac{1}{\left((i-0.5)\pi\right)^2} \qquad \phi_i = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left((i-0.5)\pi t\right)$$

A continuación, aplicaremos los resultados obtenidos anteriormente a este proceso. En primer lugar, nos centraremos en el problema de estimación lineal. Para ello, supondremos que el proceso de observación es

$$y(t) = x(t) + v(t) \qquad t \in [0,1]$$

donde v(t) es un ruido blanco, centrado, independiente de x(t) y con parámetro de varianza r = 1.

Es sencillo demostrar que el impulso de respuesta asociado al estimador óptimo viene dado por

$$h(t,\tau) = \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{e^{t} + e^{-t}} \qquad 0 \le \tau \le t \le 1$$

y el error cuadrático medio que se comete es igual a h(t,t).

Seguidamente, vamos a obtener el impulso de respuesta aproximado (7) a partir de los autovalores y autofunciones aproximados de R(t,s). Para aplicar el método de Rayleigh-Ritz vamos a considerar un sistema de funciones trigonométricas, del cual seleccionaremos k = 5 funciones. Después se verá que este valor es suficiente. Entonces, denotando

$$\left(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_5(t)\right)' = \left(1, \sqrt{2}\cos(2\pi t), \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2\pi t), \sqrt{2}\cos(4\pi t), \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(4\pi t)\right)'$$

y resolviendo el problema de autovalores asociado, se obtienen las siguientes autofunciones aproximadas

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1(t) \\ \tilde{\phi}_2(t) \\ \tilde{\phi}_3(t) \\ \tilde{\phi}_4(t) \\ \tilde{\phi}_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .9200 & -.0906 & -.3439 & -.0215 & -.1634 \\ .2680 & -.5385 & .7739 & -.0652 & .1873 \\ .2105 & .7618 & .5065 & -.2072 & -.2755 \\ .0949 & .1943 & -.1352 & -.5641 & .7853 \\ .1688 & .2894 & .0900 & .7963 & .4956 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \\ \varphi_4(t) \\ \varphi_5(t) \end{pmatrix}$$

Los autovalores aproximados y verdaderos son

$$\begin{array}{ll} \tilde{\lambda}_1 = .3891 & \lambda_1 = .4053 \\ \tilde{\lambda}_2 = .0432 & \lambda_2 = .0450 \\ \tilde{\lambda}_3 = .0154 & \lambda_3 = .0162 \\ \tilde{\lambda}_4 = .0078 & \lambda_4 = .0083 \\ \tilde{\lambda}_5 = .0044 & \lambda_4 = .0050 \end{array}$$

En las Figuras 1 y 2 se comparan gráficamente las dos primeras autofunciones verdaderas con las correspondientes aproximadas y modificadas.

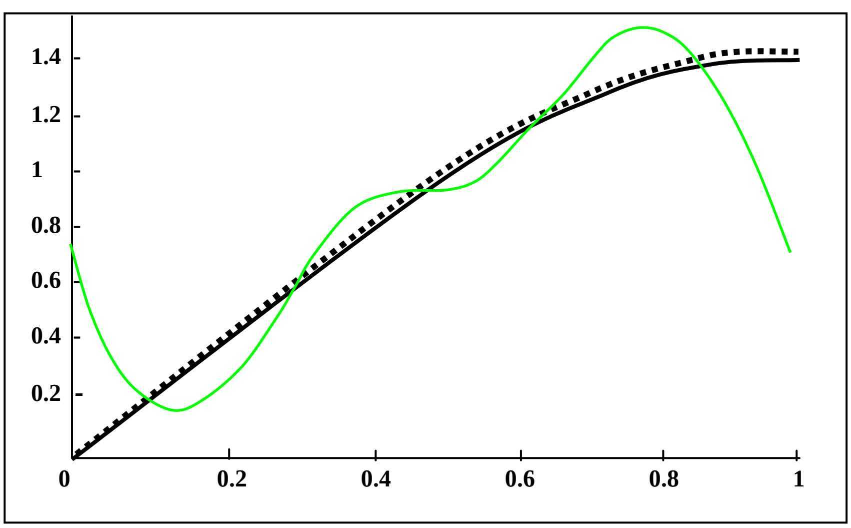

Figura 1. Primera autofunción verdadera (línea negra), aproximada (línea gris) y modificada (puntos).

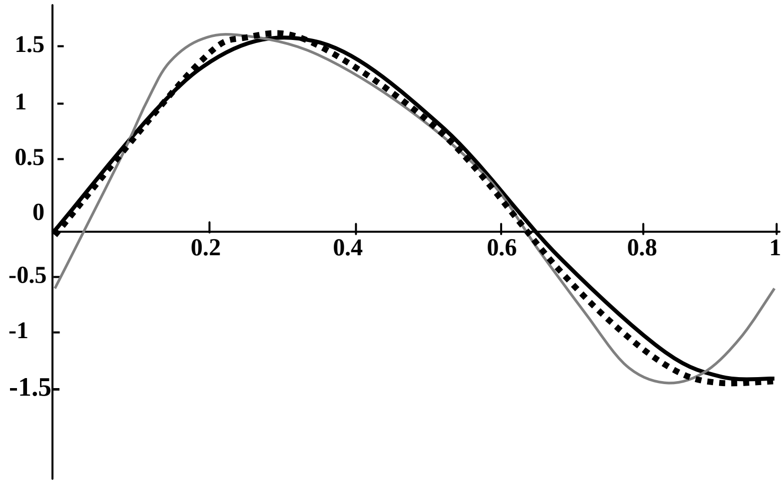

Figura 2. Segunda autofunción verdadera (línea negra), aproximada (línea gris) y modificada (puntos)

El número k = 5 de funciones es suficiente, debido a que $\sum_{i=1}^{5} \tilde{\lambda}_i = 0.4599$ con lo cual el desarrollo modificado con n = 5 explica un 91.98 % de la energía media del proceso de Wiener.

A partir de estos autovalores y autofunciones aproximados el impulso de respuesta aproximado (7) puede ser obtenido fácilmente. En las Figuras 3 y 4 puede observarse el comportamiento de $\hat{h}_n(t,\tau)$ frente a $h(t,\tau)$ para t = .6 y t = .8, respectivamente; y en la Figura 5 se comparan el error cuadrático medio que se comete con el estimador óptimo y el error del estimador subóptimo (6).

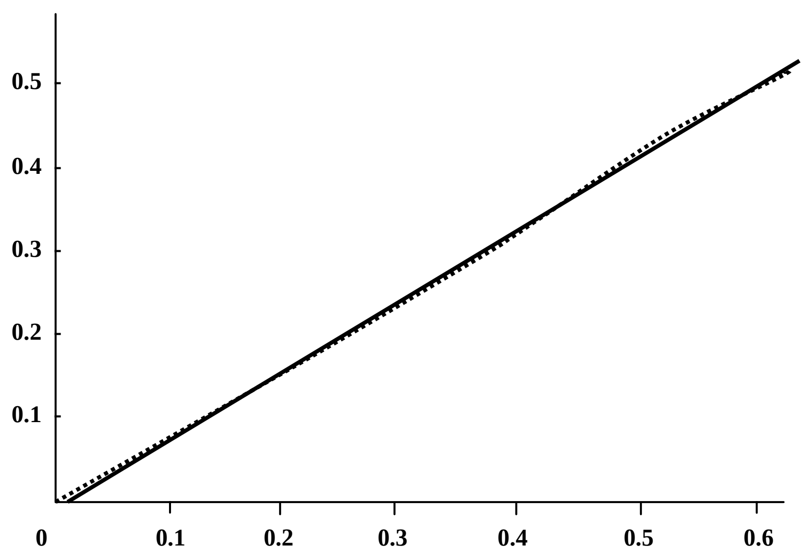

Figura 3. Impulso de respuesta óptimo (línea negra) y aproximado (puntos) para t = .6.

Finalmente, se va a considerar el problema de detectar la señal determinística $s(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(.5\pi t)$ interferida por el proceso de Wiener estándar. En la Figura 6, se representan la potencia obtenida con el estadístico de detección óptimo (8) y la potencia asociada con (9).

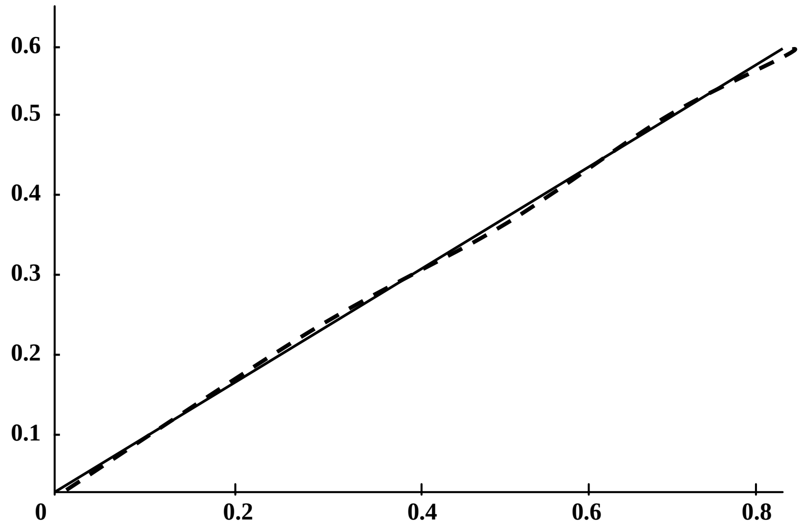

Figura 4. Impulso de respuesta óptimo (línea negra) y aproximado (puntos) para t = .8

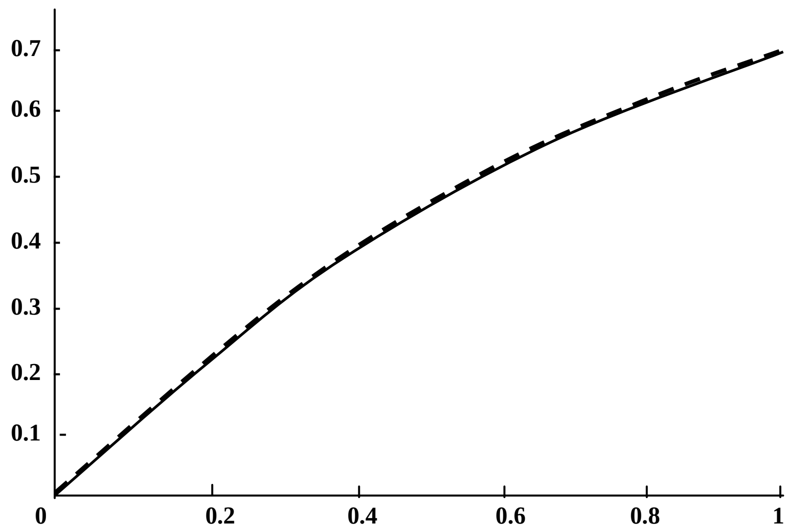

Figura 5. Error del estimador óptimo (línea negra) y error del estimador subóptimo (puntos).

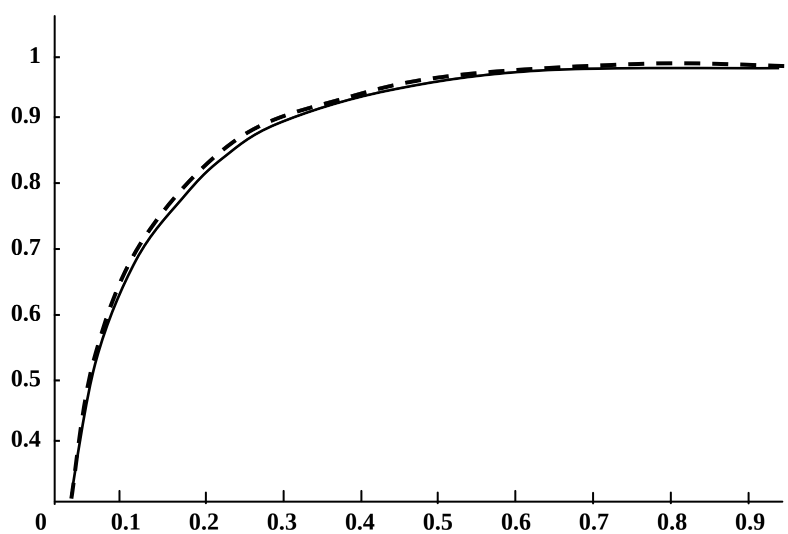

Figura 6. Potencia del sistema de detección óptimo (línea negra) y potencia del sistema subóptimo (puntos).

REFERENCIAS

BAKER, C.T.H. (1977): **The Numerical Treatment of Integral Equations**, Oxford University Press, Oxford.

GUTIERREZ, R.; J.C. RUIZ MOLINA and M.J. VALDERRAMA (1992): "On the Numerical Expansion of a Second Order Stochastic Process", **Appl. Stochastic Models Data Anal**. 8(2), 67-77.

NAVARRO MORENO, J.; .J.C. RUIZ MOLINA and M.J. VALDERRAMA (2000): "A Solution to Linear Estimation Problems Using Approximate Karhunen-Loève Expansions", **IEEE, Trans. Information Theory**, 46(4).

POOR, H.V. (1994): **An Introduction to Signal Detection and Estimation**, Springer-Verlag, New York.

RUIZ MOLINA, J.C.; J. NAVARRO and M.J. VALDERRAMA (1999a): "Differentiation of the Modified Approximative Karhunen-Loève Expansion of a Stochastic Process", **Statist. Prob. Lett**. 1, 91-98.

RUIZ MOLINA, J.C.; J. NAVARRO MORENO and A. OYA (1999b): "Signal Detection Using Approximative Karhunen-Loève Expansions", Sujeto a revisión en **IEEE, Trans. Information Theory**.

RUIZ MOLINA, J.C. and M.J. VALDERRAMA (1996): "On the Derivation of a Suboptimal Filter for Signal Estimation", **Statist. Prob. Lett**., 28, 239-243.

VAN TREES, H.L. (1968): **Detection, Estimation and Modulation Theory**, Part I, Wiley, New York.

*