DISTRIBUCIONES GENERADAS POR LA FUNCION HIPERGEOMETRICA ${}_{p+1}F_p(\alpha_1,...,\alpha_{p+1}; \gamma_1,...,\gamma_p; \lambda)$

José Rodríguez Avi, Antonio Conde Sánchez[1] y Antonio José Sáez Castillo
Departamento de Estadística e Investigación Operacional, Universidad de Jaén

RESUMEN
En este artículo presentamos una familia de distribuciones discretas de Pearson generada por la función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p$, extensión univariante de la función de Gauss. Esto nos permite generalizar el estudio de este tipo de distribuciones, para cualquiera que sea el orden de la función hipergeométrica considerada de este tipo. Nosotros estudiamos las propiedades que presentan, como la relación de recurrencia que verifican los momentos, a partir de la cual se puede utilizar el método de los momentos para estimar los parámetros. Asimismo se ha encontrado un resultado de sumación mediante el cual se pu ede calcular la función masa de probabilidad y los momentos de una amplia clase de distribuciones.

Palabras clave: familia Pearson's, función hipergeométrica, distribuciones discretas.

MSC: 60E05, 62E15.

ABSTRACT
In this paper we present a family of Peraron's discrete distributions which are generated by the hypergeometric function ${}_{p+1}F_p$, an univariate extension of the Gaussian hypergeometric function. It allows us to generalize the study of this type of distributions, whatever the order of the hypergeometric function which is considered. We study the propertie sthat they present, like a recurrencerelation that the moments verify, from which we can use the moment´s method to estimate the parameters. Also we have obtained a summation result through which we can calculate the probability mass function and the moments of a wide class of distributions.

Key words: Pearso's family, hypergeometric function, discrete distributions.

1. INTRODUCCION

En general la familia de distribuciones discretas de Pearson verifican la siguiente ecuación en diferencias:

$$G(r)f_{r+1} - L(r)\, f_r = 0 \qquad (1)$$

donde L y G son funciones en principio cualesquiera. En el caso en que dichas funciones sean polinomios, las soluciones a la ecuación (1) pueden expresarse en términos de funciones hipergeométricas.

El caso más estudioso es aquel en el que ambos polinomios son de segundo grado y además una de las raíces de G es -1, en el que la solución viene dada en término de la función hipergeométrica de Gauss. Esto se debe, entre otras consideraciones, a que es la versión discreta de la solución debe, entre otras consideraciones, a que es la versión discreta de la solución de la ecuación diferencial que verifica, por ejemplo, la distribución Normal (Pearson, 1895). A esta familia pertenecen la mayoría de las distribuciones discretas más usuales como la Binomial, la Hipergeométrica, la Binomial Negativa, la Distribución Univariante Generalizada de Waring (Irwing, 1975; Xekalaki, 1983) y en general la familia de Ord. (Ord, 1972)

Se han considerado extensiones sucesivas de dicha familia de distribuciones, tomando bien polinomios de orden 3, de forma que se obtiene la familia de distribuciones generada por la ${}_3F_2$ (Gutiérrez y Rodríguez, 1997), bien polinomios de orden 4, con la familia generada por la ${}_4F_3$ (Rodríguez **et al**. 1999).

Nuestra intención es generalizar el estudio de estas familias partiendo de polinomios de orden cualesquiera p + 1 con p > 1, como coeficientes de la ecuación en diferencias (1). De esta forma las familias de distribuciones anteriores quedan incluidas en esta y aplicando la metodología general podemos estudiar estas distribuciones.

[1]**E-mail**:aconde@ujaen.es

2. RESULTADOS GENERALES

Consideremos L y G los polinomios siguientes:

$$G(r) = (\gamma_1 + r) \dots (\gamma_p + r)(r + 1)$$

$$L(r) = (\alpha_1 + r) \dots (\alpha_{p+1} + r)\lambda \tag{2}$$

con α_i, i = 1,…,p+1; γ_j, j = 1,…,p y λ reales, en principio, cualesquiera.

La solución de la ecuación en diferencias (1) viene dada por:

$$f_r = f_0 \frac{(\alpha_1)_r \dots (\alpha_{p+1})_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \dots (\gamma_p)_r r!} \tag{3}$$

Para que la función (3) sea una función masa de probabilidad, debe verificar las siguientes condiciones,

1. Condición de positividad. Esta condición va a imponer restricciones a los parámetros α_i, γ_j, λ, de forma que:

$$L(r)G(r) \geq 0$$

2. Condición de convergencia. En este caso,

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_0 \frac{(\alpha_1)_r \dots (\alpha_{p+1})_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \dots (\gamma_p)_r r!}$$

que es la función $f_0 \{{}_{p+1}F_p(\alpha_1,\dots,\alpha_{p+1}; \gamma_1,\dots,\gamma_p; \lambda) - 1\}$, la cual converge para $|\lambda| < 1$, mientras que para $|\lambda| < 1$, mientras que para $|\lambda| = 1$ los parámetros han de cumplir las siguientes restricciones:

(a) si $\omega > 0$, entonces es absolutamente convergente.

(b) si $-1 < \omega \leq 0$, en condicionalmente convergente.

(c) si $\omega \leq -1$, es divergente.

donde $\omega = \sum_{j=1}^{p} \gamma_1 - \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i$

3. Condición de normalización

$$f_0 = {}_{p+1}F_p(\alpha_1,\dots,\alpha_{p+1}; \gamma_1,\dots,\gamma_p; \lambda)^{-1}$$

Podemos observar que es necesario conocer el valor de la función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p$ para obtener las probabilidades exactas de estas distribuciones.

2.1. Funciones generatrices

La función generatriz de probabilidad para las distribuciones con función de probabilidad (3) es:

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r t^r = f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r \dots (\alpha_{p+1})_r (\lambda t)^r}{(\lambda_1)_r \dots (\lambda_p)_r r!}$$

esto es,

$$g(t) = \frac{{}_{p+1}F_p(\alpha_1,\dots\alpha_{p+1}; \gamma_1,\dots,\gamma_p; \lambda t)}{{}_{p+1}F_p(\alpha_1,\dots\alpha_{p+1}; \gamma_1,\dots,\gamma_p; \lambda)} \tag{4}$$

que existe si es convergente para $|t| \leq 1$, lo cual se verifica atendiendo a las condiciones anteriores. EN concreto, o $|\lambda| < 1$, lo cual implica que $|\lambda t| < 1$ para $|t| \leq 1$; o $|\lambda| = 1$ y $\omega > 0$. De ahí el nombre de esta familia de distribuciones.

Dichas funciones generatrices de probabilidad se pueden caracterizar a través de la ecuación diferencial que verifican, que se obtiene siguiendo la metodología presentada en Gutiérrez y Rodríguez (1997). Para ello es necesario expresar G en función de r + 1, esto es,

$$G(r) = \sum_{i=0}^{p+1} b_i (r+1)^i$$

por lo que los coeficientes b_i serán:

$$\begin{aligned}
b_{p+1} &= 1 \\
b_p &= \sum_{i_1=1}^{p} (\gamma_{r_1} - 1) \\
b_{p-1} &= \sum_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 \neq i_2}}^{p} (\gamma_{i_1} - 1) \cdots (\gamma_{i2} - 1) \\
&\vdots \\
b_2 &= \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_{p-1} = 1 \\ i_1 \neq \ldots \neq i_{p-1}}}^{p} (\gamma_{r_1} - 1) \cdots (\gamma_{ip-1} - 1) \\
b_1 &= (\gamma_1 - 1) \cdots (\gamma_p - 1) \\
b_0 &= 0
\end{aligned} \qquad (5)$$

y el polinomio L de la siguiente forma:

$$L(r) = \sum_{i=0}^{p+1} a_i r^i$$

donde se tienen los siguientes valores para los coeficientes a_i,