

PLANTEAMIENTO Y SOLUCION DE CIERTO PROBLEMA DE PROGRAMACION IMPOSITIVA: UN ANALISIS COMPARATIVO

Manuel A. Gómez¹, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de A Coruña, España

RESUMEN

En este trabajo se efectúa un análisis comparativo, tanto teórico como práctico, de dos planteamientos alternativos de un problema de programación impositiva y de los algoritmos propuestos para su solución. El problema considerado puede ser encuadrado en una clase general de programas cuadráticos parametrizados, donde las únicas restricciones son cotas sobre las variables. La función objetivo es una función cuadrática cuya matriz hessiana es diagonal y definida positiva, a la que se añade un término de penalización de no conseguir una determinada meta. Esta penalización puede introducirse como una desviación en valor absoluto o cuadrática.

Palabras clave: modelos de programación impositiva, métodos de conjunto activo, programación paramétrica.

Clasificación MSC: 90C20, 90C31, 90A70

ABSTRACT

In this paper, we compare, from a theoretical and a practical viewpoint, two settings of a certain tax-programming problem and the algorithms proposed for solving it. This problem may be modelled as a parametric quadratic-programming problem having lower and upper bounds on the variables. The objective function is a quadratic function whose Hessian matrix is diagonal and positive. A term is added that penalizes not to achieving a certain goal. This penalization can be formulated either as an absolute or as a quadratic deviation.

Key words: tax-programming problems, active set methods, parametric programming.

1. INTRODUCCION

Best y Chakravarti (1992) presentan un método de conjunto activo de complejidad $O(n^2)$ para la solución del programa cuadrático paramétrico:

$$(QP1) \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x^T D x - a^T x + (\lambda/2)(\gamma^T x - c)^2, \\ \text{sujeto a :} & l \leq x \leq b. \end{array}$$

λ es un parámetro que toma cualquier valor no negativo, D es una matriz diagonal definida positiva, a , l y b son vectores arbitrarios de orden n , con $l \leq b$, c es un escalar arbitrario, y el vector γ de orden n es estrictamente positivo. El algoritmo propuesto resuelve en el límite, cuando $\lambda \rightarrow \infty$, el problema de

$$(QP2) \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x^T D x - a^T x, \\ \text{sujeto a :} & \gamma^T x = c, \\ & l \leq x \leq b, \end{array}$$

o bien determina que el problema (QP2) es infactible.

Gómez (1999) desarrolla un algoritmo de complejidad $O(n^2)$ para la solución de un problema relacionado con el problema (QP1), consistente en minimizar una función objetivo cuadrática con un término de penalización en valor absoluto:

¹Email:mago@udc.es

$$(QP3) \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & \frac{1}{2} x^T D x - a^T x + \lambda \left| \gamma^T x - c \right|, \\ \text{sujeto a :} & l \leq x \leq b. \end{array}$$

El problema (QP3) es equivalente a (QP2) para todo $\lambda \geq |t|$, siendo t el multiplicador de la restricción de igualdad en el óptimo de (QP2), siempre que éste tenga solución (véase, p.e., Fletcher, 1987).

Tres son los objetivos principales de este trabajo. En primer lugar, se presenta un modelo de programación impositiva que puede ser planteado de forma natural como un problema (QP1) o como un problema (QP3). Su formulación y la discusión de sus ventajas relativas son objeto de estudio en la sección 2. En segundo lugar, se describen los algoritmos propuestos para la solución de los problemas (QP1) y (QP3). Esto se realiza en la sección 3. En tercer lugar, se efectúa una comparación, tanto teórica como numérica, de ambos algoritmos. Los resultados obtenidos se exponen en la sección 4. Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo.

2. UN MODELO DE PROGRAMACION IMPOSITIVA

En esta sección se muestra cómo puede ser formulada una variación del modelo de programación impositiva presentado en Yitzakhi (1982) como un problema (QP1) o un problema (QP3).

Supongamos que los N individuos de una población tienen ingresos y_i , $i = 1, \dots, N$. El gobierno ha de decidir las tasas del impuesto sobre la renta t_i , $i = 1, \dots, N$, para el individuo i -ésimo. Estas tasas deben de satisfacer ciertas cotas, al menos que $0 \leq t_i \leq 1$, $i=1, \dots, N$, aunque es posible que otras consideraciones aconsejen establecer cotas más exigentes. Supongamos que T es la cantidad que ha de recaudar el gobierno a través de los impuestos y que \bar{y}_i es el ingreso considerado deseable para el i -ésimo individuo. Si el gobierno pretende minimizar la desviación entre los ingresos después de impuestos y los ingresos deseables para toda la población, resolverá el problema tipo (QP2):

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \sum_{i=1}^N (y_i(1-t_i) - \bar{y}_i)^2, \\ \text{sujeto a :} & \sum_{i=1}^N y_i t_i = T, \\ & l \leq t \leq b. \end{array}$$

Supongamos ahora que la restricción de ingresos del gobierno no ha de ser satisfecha exactamente, sino que T es un objetivo de ingresos. En este caso, el gobierno debe resolver un problema de programación multiobjetivo con dos metas: minimizar la desviación entre los ingresos después de impuestos y los ingresos deseables de la población, y minimizar la desviación del objetivo presupuestario. Una formulación tipo (QP1) apropiada del problema del gobierno es

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \sum_{i=1}^N (y_i(1-t_i) - \bar{y}_i)^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^N y_i t_i - T \right)^2, \\ \text{sujeto a :} & l \leq t \leq b, \end{array}$$

donde λ es un parámetro no negativo que mide la importancia que le da el gobierno a la satisfacción del objetivo de ingresos del gobierno. Ésta es la formulación propuesta por Yitzakhi (1982) y Best y Chakravarti (1992). Sin embargo, una formulación alternativa consistiría en introducir el objetivo presupuestario en la función objetivo como una desviación en valor absoluto, empleando el planteamiento como un problema (QP3):

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \sum_{i=1}^N (y_i(1-t_i) - \bar{y}_i)^2 + \lambda \left| \sum_{i=1}^N y_i t_i - T \right|, \\ \text{sujeto a :} & l \leq t \leq b. \end{array}$$

En cualquier caso, una vez resuelto el problema parametrizado, el gobierno elegiría un valor apropiado de λ y las tasas de impuestos óptimas.

El planteamiento tipo (QP3) tiene la ventaja de que, si el problema (QP2) tiene solución, a partir de un valor del parámetro λ , la solución de (QP3) también lo es de (QP2). En consecuencia, asignando un peso lo bastante grande al objetivo presupuestario, este objetivo se ve cumplido. Esto no ocurre en el planteamiento (QP1), salvo cuando el multiplicador de la restricción lineal general de (QP2) es nulo en el óptimo. Esto sólo es posible cuando la solución del problema

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^N (y_i(1-t_i) - \bar{y}_i)^2, \\ & \text{sujeto a:} \quad l \leq t \leq b, \end{aligned}$$

satisface exactamente la restricción $\sum_{i=1}^N y_i t_i = T$ (véase, p. e., Fletcher, 1987). En otro caso, con independencia del peso λ asignado a la consecución del objetivo presupuestario, la solución óptima de (QP1) no alcanza esa meta. Por otra parte, el planteamiento (QP1) presenta la ventaja sobre el planteamiento (QP3) de que ambas desviaciones son tratadas de forma cuadrática, con lo que el tratamiento dado es más homogéneo.

3. DESCRIPCIÓN DE LOS ALGORITMOS

3.1. Notación empleada

En el resto de este trabajo se emplea la siguiente notación. Sean $u(\lambda)$ y $v(\lambda)$ los multiplicadores correspondientes a las cotas inferiores y superiores, respectivamente, en la solución óptima $x(\lambda)$ del problema (QP1) o (QP3), según el caso, para un valor dado de λ . En una iteración determinada, se conocen los valores de $x(\lambda)$, $u(\lambda)$ y $v(\lambda)$ para $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$, donde $\bar{\lambda}$ es el valor actual de λ . Sean los conjuntos $L = \{j: 1 \leq j \leq n, x_j(\bar{\lambda}) = l_j\}$, $F = \{j: 1 \leq j \leq n, l_j < x_j(\bar{\lambda}) < b_j\}$ y $U = \{j: 1 \leq j \leq n, x_j(\bar{\lambda}) = b_j\}$. Sean $g(\lambda) = \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j(\lambda) - c$, y

$$G = G(L, F, U) = \sum_{j \in L} \gamma_j l_j + \sum_{j \in F} \frac{\gamma_j a_j}{d_j} + \sum_{j \in U} \gamma_j b_j - c. \quad (1)$$

3.2. Algoritmo I

El algoritmo propuesto por Best y Chakravarti (1992) para la solución del Problema (QP1) es el siguiente (considerando que $G = g(0) < 0$):

Paso 0. Inicialización. Determine $x(0)$, $u(0)$ y $v(0)$ según

$$x_j(0) = \begin{cases} l_j, & \text{si } a_j/d_j \leq l_j, \\ a_j/d_j, & \text{si } l_j < a_j/d_j < b_j, \\ b_j, & \text{si } a_j/d_j \geq b_j, \end{cases} \quad (2)$$

$$u_j(0) = \begin{cases} d_j l_j - a_j, & \text{si } a_j/d_j \leq l_j, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3)$$

$$v_j(0) = \begin{cases} a_j - d_j b_j, & \text{si } a_j/d_j \geq b_j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4)$$

Determine L , F , U , y el valor actual $G = g(0)$, empleando la Eq. (1). Sea $\bar{\lambda} \leftarrow 0$.

Paso 1. Determinación de la solución óptima $x(\lambda)$ y multiplicadores $u(\lambda)$ y $v(\lambda)$ para el siguiente intervalo. Calcule la solución óptima $x(\lambda)$ y los multiplicadores $u(\lambda)$ y $v(\lambda)$ para el siguiente intervalo $[\bar{\lambda}, \lambda_{\max}]$ empleando que $g(\lambda) = G / (1 + \lambda \sum_{j \in F} \gamma_j^2 / d_j)$, mediante las relaciones siguientes:

$$x_j(\lambda) = \begin{cases} l_j, & \text{si } j \in L, \\ (a_j - \gamma_j \lambda g(\lambda)) / d_j, & \text{si } j \in F, \\ b_j, & \text{si } j \in U, \end{cases} \quad (5)$$

$$u_j(\lambda) = \begin{cases} d_j l_j - a_j + \gamma_j \lambda g(\lambda), & \text{si } j \in L, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (6)$$

$$v_j(\lambda) = \begin{cases} -d_j b_j + a_j - \gamma_j \lambda g(\lambda), & \text{si } j \in U, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (7)$$

Paso 2. Determinación de λ_{\max} , el punto final del siguiente intervalo. Si $G = 0$, entonces $\lambda_{\max} = \infty$. Vaya al Paso 3.1. En otro caso, para cada j , $1 \leq j \leq n$, determine λ_j como

$$\lambda_j = \begin{cases} \text{si } j \in L, & \begin{cases} \infty, & \text{si } a_j - d_j l_j \leq \gamma_j G / \sum_{k \in F} (\gamma_k^2 / d_k), \\ \frac{a_j - d_j l_j}{\gamma_j G - (a_j - d_j l_j) \sum_{k \in F} (\gamma_k^2 / d_k)}, & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ \text{si } j \in F, & \begin{cases} \infty, & \text{si } a_j - d_j b_j \leq \gamma_j G / \sum_{k \in F} (\gamma_k^2 / d_k), \\ \frac{a_j - d_j b_j}{\gamma_j G - (a_j - d_j b_j) \sum_{k \in F} (\gamma_k^2 / d_k)}, & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ \text{si } j \in U, & \infty. \end{cases} \quad (8)$$

Halle

$$\lambda_{\max} = \min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j. \quad (9)$$

Si $\lambda_{\max} < \infty$, vaya al Paso 3.2. En otro caso ($\lambda_{\max} = \infty$), vaya al Paso 3.3.

Paso 3. Actualización/Cálculo de la solución óptima \bar{x} y multiplicadores \bar{u} , \bar{v} y t de (QP2).

Paso 3.1. $x(\bar{\lambda})$ es la solución óptima de (QP1) $\forall \lambda \geq \bar{\lambda}$; $u(\bar{\lambda})$ y $v(\bar{\lambda})$ son los multiplicadores asociados; $\bar{x} = x(\bar{\lambda})$ es la solución óptima de (QP2); y los multiplicadores asociados son $\bar{u} = u(\bar{\lambda})$, $\bar{v} = v(\bar{\lambda})$ y $t = 0$. Pare.

Paso 3.2. Para todo j , $1 \leq j \leq n$, tal que $\lambda_j = \lambda_{\max}$, realice las siguientes operaciones. Si $j \in L$, entonces $L \leftarrow L \setminus \{j\}$, $F \leftarrow F \cup \{j\}$. Si $j \in F$, entonces $F \leftarrow F \setminus \{j\}$, $U \leftarrow U \cup \{j\}$. Haga $\bar{\lambda} \leftarrow \lambda_{\max}$. Recalcule $G \leftarrow G(\bar{L}, \bar{F}, \bar{U})$. Vaya al Paso 1.

Paso 3.3. Las expresiones obtenidas para $x(\lambda)$, $u(\lambda)$ y $v(\lambda)$ siguen siendo válidas para todo $\lambda \geq \bar{\lambda}$. Si $F = \emptyset$, entonces pare: el problema (QP2) es infactible. En otro caso (si $F \neq \emptyset$) calcule la solución óptima \bar{x} y los multiplicadores \bar{u} , \bar{v} y t de (QP2) según las siguientes fórmulas y pare:

$$\bar{x}_j = \begin{cases} a_j / d_j - (\gamma_j / d_j) G / \sum_{k \in F} (\gamma_k^2 / d_k), & \text{si } j \in F, \\ x_j(\bar{\lambda}), & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (10)$$

$$\bar{u}_j = \begin{cases} d_j l_j - a_j + \gamma_j G / \sum_{k \in F} (\gamma_k^2 / d_k), & \text{si } j \in L, \\ u_j(\bar{\lambda}), & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (11)$$

$$\bar{v}_j = \begin{cases} -d_j b_j + a_j - \gamma_j G / \sum_{k \in F} (\gamma_k^2 / d_k), & \text{si } j \in U, \\ v_j(\bar{\lambda}), & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (12)$$

$$t = -G / \sum_{k \in F} (\gamma_k^2 / d_k). \quad (13)$$

3.3. Algoritmo II

El algoritmo propuesto por Gómez (1999) para la solución de (QP3) es el siguiente (considerando que $G = g(0) < 0$):

Paso 0. Inicialización. Determine $x(0)$, $u(0)$ y $v(0)$ empleando las Eqs. (2) - (4). Determine los conjuntos L , F , U y el valor actual $G = g(0)$, empleando la Eq. (1). Sea $\bar{\lambda} \leftarrow 0$.

Paso 1. Cálculo de la solución óptima $x(\lambda)$ y multiplicadores asociados $u(\lambda)$ y $v(\lambda)$ en el siguiente intervalo. Halle la solución óptima $x(\lambda)$ y los multiplicadores $u(\lambda)$, $v(\lambda)$ en el siguiente intervalo $[\bar{\lambda}, \lambda_{\max}]$, según:

$$x_j(\lambda) = \begin{cases} l_j, & \text{si } j \in L, \\ (a_j + \lambda\gamma_j)/d_j, & \text{si } j \in F, \\ b_j, & \text{si } j \in U, \end{cases} \quad (14)$$

$$u_j(\lambda) = \begin{cases} d_j l_j - a_j - \lambda\gamma_j, & \text{si } j \in L, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (15)$$

$$v_j(\lambda) = \begin{cases} -d_j b_j + a_j + \lambda\gamma_j, & \text{si } j \in U, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (16)$$

Paso 2. Cálculo de λ_{\max} , punto final del siguiente intervalo. Para cada j , $1 \leq j \leq n$, halle λ_j y $\hat{\lambda}$ según:

$$\lambda_j = \begin{cases} (d_j l_j - a_j)/\gamma_j, & \text{si } j \in L, \\ (d_j b_j - a_j)/\gamma_j, & \text{si } j \in F, \\ \infty, & \text{si } j \in U, \end{cases} \quad (17)$$

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} -G / \sum_{k \in F} (\gamma_k^2 / d_k), & \text{si } F \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (18)$$

Halle

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ \min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j, \hat{\lambda} \right\}. \quad (19)$$

Si $\lambda_{\max} = \hat{\lambda}$, vaya al Paso 4. En otro caso, vaya al Paso 3.

Paso 3. Actualización. Para todo j , $1 \leq j \leq n$, tal que $\lambda_j = \lambda_{\max}$, realice las siguientes operaciones. Si $j \in L$, entonces $L \leftarrow L \setminus \{j\}$, $F \leftarrow F \cup \{j\}$. Si $j \in F$, entonces $F \leftarrow F \setminus \{j\}$, $U \leftarrow U \cup \{j\}$. Haga $\bar{\lambda} \leftarrow \lambda_{\max}$. Recalcule $G \leftarrow G(L, F, U)$. Vaya al Paso 1.

Paso 4. Determinación de la solución óptima \bar{x} y multiplicadores \bar{u} , \bar{v} y t para el problema (QP2). Si $\lambda_{\max} = \hat{\lambda} = \infty$ vaya al Paso 4.1; en otro caso ($\lambda_{\max} = \hat{\lambda} < \infty$), vaya al Paso 4.2.

Paso 4.1. $x(\lambda)$, $u(\lambda)$ y $v(\lambda)$ dados por (14) - (16) son la solución óptima y los multiplicadores asociados de (QP3) para todo $\lambda \geq \bar{\lambda}$. El problema (QP2) es infactible. Pare.

Paso 4.2. $x(\hat{\lambda})$ es la solución óptima de (QP3) para todo $\lambda \geq \hat{\lambda}$; $u(\hat{\lambda})$ y $v(\hat{\lambda})$ son los multiplicadores asociados. Además, $\bar{x} = x(\hat{\lambda})$ es la solución óptima de (QP2); y los multiplicadores asociados son $\bar{u} = u(\hat{\lambda})$, $\bar{v} = v(\hat{\lambda})$ y $t = \hat{\lambda}$. Pare.

4. ANALISIS COMPARATIVO DE LOS ALGORITMOS I Y II

4.1. Comportamiento teórico

De la descripción dada en la sección 3 se deduce que el número de operaciones por iteración es superior en el algoritmo I. Fundamentalmente, esta diferencia se aprecia en las operaciones necesarias para determinar λ_{\max} en el algoritmo I, Eqs. (8) y (9), y en el algoritmo II, Eqs. (17) - (19).

Otro aspecto destacable es que los conjuntos L, F y U obtenidos por los algoritmos I y II coinciden en cada iteración. Una consecuencia inmediata es que ambos algoritmos realizan el mismo número de iteraciones. En lo que resta de esta sección, los superíndices I y II harán referencia a cantidades determinadas en los algoritmos I y II respectivamente.

Consideremos la restricción k -ésima. Si $k \in U$, de las Eqs. (8) y (17) resulta que $\lambda_k^I = \lambda_k^{II} = \infty$. Si $k \in F$, reordenando la Eq. (8) y empleando las definiciones de λ_k^{II} y $\hat{\lambda}^{II}$ de las Eqs. (17) y (18), se obtiene la siguiente relación:

$$\lambda_k^I = \begin{cases} \infty, & \text{si } \lambda_k^{II} = (d_k b_k - a_k)/\gamma_k \geq -G/\sum_{j \in F} (\gamma_j^2/d_j) = \hat{\lambda}^{II}, \\ \frac{\lambda_k^{II}}{-G - \lambda_k^{II} \sum_{j \in F} (\gamma_j^2/d_j)}, & \text{si } \lambda_k^{II} < \hat{\lambda}^{II}, \end{cases} \quad (20)$$

donde se ha utilizado que

$$\lambda_k^I = \frac{a_k - d_k b_k}{\gamma_k G - (a_k - d_k b_k) \sum_{j \in F} \gamma_j^2/d_j} = \frac{(d_k b_k - a_k)/\gamma_k}{-G - (d_k b_k - a_k)/\gamma_k \sum_{j \in F} \gamma_j^2/d_j} = \frac{\lambda_k^{II}}{-G - \lambda_k^{II} \sum_{j \in F} \gamma_j^2/d_j}.$$

Si $k \in L$, de las Eqs. (8), (17) y (18), se obtiene la siguiente relación:

$$\lambda_k^I = \begin{cases} \infty, & \text{si } \lambda_k^{II} = (d_k l_k - a_k)/\gamma_k \geq -G/\sum_{j \in F} (\gamma_j^2/d_j) = \hat{\lambda}^{II}, \\ \frac{\lambda_k^{II}}{-G - \lambda_k^{II} \sum_{j \in F} (\gamma_j^2/d_j)}, & \text{si } \lambda_k^{II} < \hat{\lambda}^{II}, \end{cases} \quad (21)$$

donde se ha utilizado que

$$\lambda_k^I = \frac{a_k - d_k l_k}{\gamma_k G - (a_k - d_k l_k) \sum_{j \in F} \gamma_j^2/d_j} = \frac{(d_k l_k - a_k)/\gamma_k}{-G - (d_k l_k - a_k)/\gamma_k \sum_{j \in F} \gamma_j^2/d_j} = \frac{\lambda_k^{II}}{-G - \lambda_k^{II} \sum_{j \in F} \gamma_j^2/d_j}.$$

Supongamos, en primer lugar, que $\lambda_{\max}^I = \lambda_k^I = \min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j^I < \infty$, de modo que se produce la actualización de L, F y U y el algoritmo I continúa. De acuerdo con las Eqs. (20) y (21), tenemos que $\lambda_k^{II} < \hat{\lambda}^{II}$ ($k \notin U$, puesto que en este caso $\lambda_k^I = \infty$). Por otra parte, para todo i , $1 \leq i \leq n$, tal que λ_i^I es finito,

$$\lambda_k^I = \frac{\lambda_k^{II}}{-G - \lambda_k^{II} \sum_{j \in F} \gamma_j^2/d_j} \leq \frac{\lambda_i^{II}}{-G - \lambda_i^{II} \sum_{j \in F} \gamma_j^2/d_j} = \lambda_i^I. \quad (22)$$

Operando, es fácil comprobar que la Eq. (22) es equivalente a que $\lambda_k^{\text{II}} \leq \lambda_i^{\text{II}}$, y que $\lambda_k^{\text{I}} = \lambda_i^{\text{I}} \Leftrightarrow \lambda_k^{\text{II}} = \lambda_i^{\text{II}}$. Para todo i , $1 \leq i \leq n$, tal que $\lambda_i^{\text{I}} = \infty$, de las Eqs. (20) y (21) y del hecho de que si $i \in U$, entonces $\lambda_i^{\text{II}} = \infty$, resulta que $\lambda_i^{\text{II}} \geq \hat{\lambda}^{\text{II}}$. En definitiva, tenemos que $\lambda_{\text{max}}^{\text{II}} = \lambda_k^{\text{II}} = \min \left\{ \min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j^{\text{II}}, \hat{\lambda}^{\text{II}} \right\}$.

Un razonamiento similar muestra que si $\lambda_{\text{max}}^{\text{II}} = \lambda_k^{\text{II}} < \hat{\lambda}^{\text{II}}$, también se cumple que $\lambda_{\text{max}}^{\text{I}} = \lambda_k^{\text{I}} < \infty$. En consecuencia, los cambios a realizar en los conjuntos L, F y U son los mismos en ambos algoritmos. Puesto que los conjuntos L, F y U iniciales también coinciden, los conjuntos L, F y U obtenidos en las sucesivas iteraciones por los algoritmos I y II son los mismos.

Por otra parte, observando las Eqs. (20) y (21), y como $\lambda_i^{\text{II}} = \infty$ si $i \in U$, se deduce que si $\lambda_{\text{max}}^{\text{I}} = \infty$, entonces $\lambda_i^{\text{II}} \geq \hat{\lambda}^{\text{II}}$ para todo $1 \leq i \leq n$, de modo que $\lambda_{\text{max}}^{\text{II}} = \hat{\lambda}^{\text{II}}$. También se obtiene que si $\lambda_{\text{max}}^{\text{II}} = \hat{\lambda}^{\text{II}}$, entonces $\lambda_{\text{max}}^{\text{I}} = \infty$. En consecuencia, ambos algoritmos terminan en la misma iteración.

Obsérvese también que las Eqs. (20) y (21) permiten recuperar los intervalos de variación de la solución del problema (QP1) (los sucesivos valores de $\lambda_{\text{max}}^{\text{I}}$) a partir de los correspondientes valores del problema (QP3) (los valores de $\lambda_{\text{max}}^{\text{II}}$). De este modo, es posible obtener la solución de (QP1) al tiempo que se determina la solución de (QP3) (y viceversa). Por lo tanto, empleando este resultado, podrían tenerse en cuenta ambos problemas a la hora de decidir el valor más apropiado para el parámetro λ .

4.2. Experimentación numérica

Empleando el Mathematica v.3.0 para Windows'95, se han implementado los algoritmos I y II en un PC con procesador Pentium MMX 200Mhz y 32Mb de RAM. El algoritmo II se ha implementado de forma que obtiene la solución de los problemas (QP1) y (QP3), utilizando para ello las Eqs. (20) y (21). Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla I, donde n representa el número de variables del problema. Para cada uno de los valores especificados de n , se ha generado de forma aleatoria un conjunto de m problemas. Para cada una de las combinaciones de n y m , en la Tabla I se recoge el tiempo medio de ejecución de cada algoritmo (en segundos): $t\text{I}$ corresponde al algoritmo I, mientras que $t\text{II}$ corresponde al algoritmo II. Además, se calcula la desventaja relativa del algoritmo I respecto al II, calculada como la diferencia entre los tiempos medios de ejecución de los algoritmos I y II dividida por el tiempo medio de ejecución del algoritmo II. Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

Tabla I. Tiempos de ejecución de los algoritmos I y II

	tI	tII	(tI-tII)/tII
n = 10, m = 500	0.05886	0.05416	8.678 %
n = 25, m = 500	0.24218	0.22316	8.52 %
n = 50, m = 500	1.327	1.2251	8.326 %
n = 75, m = 100	3.5499	3.2811	8.192 %
n = 100, m = 100	3.996	3.7372	6.925 %
n = 150, m = 100	10.583	10.0047	5.78 %
n = 200, m = 100	21.4662	20.2929	5.78 %
n = 250, m = 100	36.8804	35.3057	4.46 %
n = 300, m = 100	59.1155	56.8601	3.96 %
n = 500, m = 100	243.504	236.869	2.80 %

En la Tabla I se observa que el tiempo medio de ejecución del algoritmo I es mayor que el del algoritmo II, para todos los valores de n considerados. La desventaja relativa del algoritmo II respecto del algoritmo I, medida como el cociente entre la diferencia en tiempo medio de ejecución y el tiempo medio de ejecución del algoritmo II, se representa gráficamente a continuación:

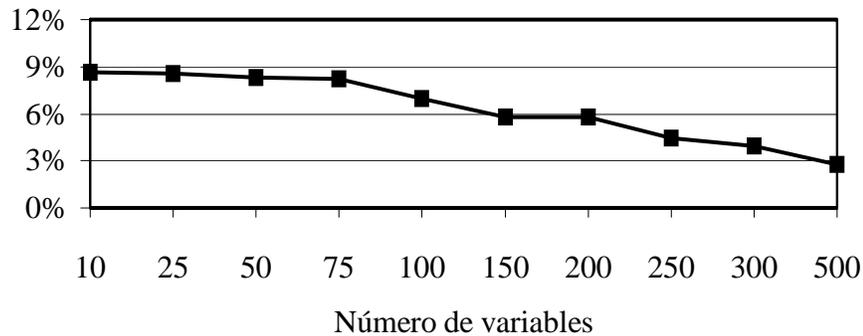


Gráfico I: Desventaja relativa del algoritmo I en tiempo medio de ejecución.

En este gráfico se observa la superioridad del algoritmo II frente al I en tiempo de ejecución, y la tendencia decreciente de esta ventaja. La explicación de este hecho radica en que la diferencia en el número de operaciones a efectuar por ambos algoritmos tiene un menor peso en el número total de operaciones a realizar a medida que aumenta el número de variables del problema. De todos modos, es importante señalar, que en la implementación empleada, el algoritmo II determina la solución tanto del problema (QP3) como del problema (QP1).

5. CONCLUSIONES

En la sección 2 se ha presentado un problema de programación impositiva, planteado como un problema (QP1) y como un problema (QP3). El planteamiento (QP1) presenta la ventaja teórica de que las desviaciones respecto de ambos objetivos son tratadas de igual modo. Sin embargo, esta ventaja se vería más que compensada por el hecho de que en el planteamiento tipo (QP3), si el problema (QP2) tiene solución, a partir de un determinado valor del parámetro λ que asigna el peso a la consecución del objetivo presupuestario, este objetivo se ve cumplido. Esto sólo ocurriría en el planteamiento (QP1) si la restricción correspondiente al objetivo presupuestario se satisface por la solución del problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \sum_{i=1}^N (y_i(1-t_i) - \bar{y}_i)^2, \\ &\text{sujeto a:} && l \leq t \leq b, \end{aligned}$$

lo cual no tiene por qué ocurrir.

La descripción de los algoritmos, realizada en la sección 3, evidencia la menor complejidad del algoritmo II, que precisa de menos operaciones por iteración que el algoritmo I. En la sección 4 también se ha mostrado que los conjuntos de trabajo (L, F y U) determinados en cada iteración por los algoritmos I y II coinciden. Partiendo de este hecho, se muestra que ambos algoritmos realizan el mismo número de iteraciones. Además, se ha mostrado que es posible recuperar la solución del problema (QP1) empleando la solución del problema (QP3), y viceversa. De este modo, podría tenerse en cuenta la solución de ambos problemas a la hora de determinar el valor más apropiado para el parámetro λ . La experimentación numérica presentada en la sección 4 concuerda con estos resultados, mostrando un mejor comportamiento del algoritmo II, en lo que respecta a tiempo de ejecución.

REFERENCIAS

- BEST, M. J. and N. CHAKRAVARTI (1992): "An $O(n^2)$ active set method for solving a certain parametric quadratic program", **Journal of Optimization Theory and Applications** 72, 213-224.
- FLETCHER, R. (1987): **Practical Methods of Optimization**, 2ª edición, John Wiley&Sons, Chichester.
- GOMEZ, M.A., (1999): "An $O(n^2)$ active set algorithm for the solution of a parametric quadratic program", **Numerical Algorithms** 22, 305-316.
- YITZAKHI, S. (1982): "A tax programming model", **Journal of Public Economics** 19, 107-120.