UN MODELO DE COMPETENCIA ESPACIAL DUOPOLISTICA VIA PRECIOS CON DIFERENTES ELASTICIDADES DE LA DEMANDA*

P. Dorta González, D.R., Santos Peñate y R. Suárez Vega, Dpto. de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

RESUMEN
La elasticidad de la demanda condiciona la política de precios. En este trabajo se analizan dos escenarios diferentes, el de demanda totalmente inelástica al precio y el de demanda lineal, como caso particular de demanda elástica. En el problema estudiado, dos empresas deben decidir sus ubicaciones en una red y los precios fijados en un conjunto de mercados separados espacialmente. El proceso de competencia se modela como un juego de dos etapas, en la primera de las cuales las firmas deciden sus ubicaciones y en la segunda los precios. Se prueba la existencia de un equilibrio de Nash en precios para la segunda etapa del juego y que las localizaciones de equilibrio en la primera etapa se encuentran en los nodos de la red.

Palabras clave: competencia, duopolio, localización, elasticidad, juegos.

ABSTRACT
Demand elasticity affect to price policy. In this work, two different sceneries are analyzed: inelastic demand and linear demand as a particular case of elastic demand. In this problem two firms decide locations on a network and prices in a set of spatial separated markets. The competence process is modeled as a two-stage game, locations are decided first and then prices. Nash equilibrium existence in the second stage and a nodal property on the first stage are proved.

Key words: competition, duopoly, location, elasticity, games.

MSC:91A10

1 INTRODUCCION

La competencia espacial, conocida también como localización competitiva, es un tema de investigación en el área de la Investigación Operativa, la Organización Industrial y la Ciencia Regional. En general, los modelos se centran en las decisiones de localización, de fijación de precios y de niveles de producción, que tienen que realizar una o varias empresas que quieren entrar o están operando en un mercado espacial. El objetivo principal de estas empresas es la maximización de los beneficios o la cuota de mercado, siendo más competitivas que las otras empresas que operan en el mercado. Existe una extensa literatura sobre el tema, de la cual destacamos las revisiones bibliográficas de Serra y ReVelle (1995), Eiselt, Laporte y Thisse (1993), Hakimi (1990), Friesz, Miller y Tobin (1988). Labbé, Peeters y Thisse (1995) recopilan los principales resultados en redes.

El trabajo de Cournot publicado en 1838, constituye la primera discusión formal sobre un problema de competencia, al considerar un modelo de duopolio donde las empresas deciden su nivel de producción. En 1883, Bertrand introduce la competencia vía precios como una alternativa a la competencia vía cantidades. Sin embargo, el estudio de Hotelling (1929) constituye el primer análisis que incorpora la localización como una variable de elección determinante. En este trabajo, Hotelling estudia las estrategias de dos competidores respecto al precio y la localización, en un mercado lineal acotado con demanda totalmente inelástica al precio y uniformemente distribuida. El modelo de Hotelling ha tenido gran trascendencia en la literatura económica, dando origen a un importante grupo de trabajos que analizan la localización desde el punto de vista de las preferencias de los consumidores (ver Andaluz, 1995, para una recopilación de trabajos sobre este tema). Destaca su aplicación al análisis de la diferenciación del producto, donde el espacio geográfico pasa a ser el espacio de características, la localización del consumidor se interpreta como su variedad ideal, la localización de la empresa representa la variedad ofrecida y el coste de transporte indica la pérdida de utilidad.

*Esta investigación está financiada parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia, ayuda PB95-1237-CO3-03.

Numerosas contribuciones han modificado y generalizado algunas de las suposiciones originales de Hotelling (ver Eiselt y Laporte, 1996, para una buena revisión de resultados), de donde se desprende que los modelos de localización competitiva son intrínsecamente inestables, incluso pequeñas modificaciones de las hipótesis o los parámetros alteran sustancialmente los resultados. En el modelo original de Hotelling no existe equilibrio, sin embargo, cuando el coste de transporte es una función cuadrática existe equilibrio con diferenciación máxima. Si los precios están fijados, existe equilibrio con diferenciación mínima en el modelo de Hotelling, sin embargo, cuando en este mismo modelo compiten tres firmas no existe nuevamente equilibrio. En la práctica, se observa que mientras los restaurantes de comida rápida tienden a concentrarse en algunas zonas, no se observa este hecho con las librerías y tiendas de muebles, por ejemplo.

En el problema general de competencia espacial se determinan los precios (o niveles de producción) y las localizaciones de p empresas entrantes que competirán con q ya establecidas, además de entre ellas, por proveer un bien homogéneo a un mercado, teniendo en cuenta que en el futuro r nuevas empresas pueden entrar a competir. El criterio seguido suele ser la maximización de la cuota de mercado o del beneficio. Para r = 0, surge el problema del medianoide formulado por Hakimi (1983); si además p = 1, aparece el problema de máxima captura ampliamente estudiado por ReVelle (1986), Serra y ReVelle (1995). Cuando q = 0, se tiene el problema del centroide, formulado por Hakimi (1983) y conocido también como el problema de localización con anticipación (Serra y ReVelle, 1994). En el caso particular en que q = r = 0, aparece el problema del juego espacial, en el cual un grupo de empresas pretenden entrar a operar simultáneamente en un mercado. Este problema ha sido estudiado para p = 2 por Labbé y Hakimi (1991), Lederer y Thisse (1990) sobre redes, Hurter y Lederer (1985) sobre el plano y por el propio Hotelling (1929) sobre un segmento. Para 3 o más firmas han sido estudiado por Sarkar, Gupta y Pal (1997), quienes generalizan el modelo de Labbé y Hakimi (1991) para demanda no lineal.

En este trabajo se analiza un juego espacial, en el cual dos empresas deciden sus ubicaciones y los precios de sus productos en un conjunto de mercados separados espacialmente. Se consideran dos escenarios diferentes según la elasticidad de la demanda. En el primero, la demanda es totalmente inelástica al precio y ha sido estudiado por Hurter y Lederer (1985) sobre el plano y Lederer y Thisse (1990) sobre redes. Este tipo de demanda totalmente inelástica corresponde a bienes de primera necesidad sin sustitutos cercanos. En el estudio de Lederer y Thisse (1990) las firmas deciden, además del precio, la forma de combinar los imputs para producir los outputs (tecnología de producción), que depende de sus respectivas ubicaciones. El problema analizado en nuestro trabajo es similar al considerado por estos autores, asumiendo en esta ocasión que las firmas deciden localizaciones y precios. Se propone un algoritmo para la obtención del equilibrio de Nash subjuego-perfecto basado en un resultado que garantiza la inexistencia de ciclos en un proceso de elección secuencial. Por último, se obtiene una propiedad de minimización del coste social, similar a la obtenida por Hurter y Lederer (1985) para un problema similar definido sobre el espacio continuo.

En el segundo escenario la demanda es elástica al precio. Este supuesto junto con el de competencia vía precios es novedoso y no ha sido tratado con anterioridad en la literatura sobre el tema. Por simplicidad se ha asumido que la demanda es lineal, aunque recuérdese que esta función de demanda presenta todos los tipos de elasticidad a lo largo de la curva. En este caso, se prueba la existencia de un equilibrio de Nash en precios para la segunda etapa del juego y que la búsqueda del equilibrio en localización puede reducirse a los nodos de la red. Un resultado similar surge al considerar colusión en precios.

El resto del trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el apartado 2 se formula el modelo y se establece la notación común a ambos escenarios. En los apartados 3 y 4 se estudian los escenarios descritos con anterioridad y en el 5 se muestra un ejemplo. Finalmente, la última parte se dedica a algunas conclusiones del trabajo y unas notas sobre el efecto renta.

2. FORMULACION

El mercado está representado por una red no dirigida y conectada N (V, E) donde $V = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ es el conjunto de nodos, que representan mercados separados espacialmente, y E es el conjunto de aristas. Un centro de servicios puede ubicarse en cualquier punto de la red y los consumidores están situados únicamente en los nodos. Las firmas deciden además de sus ubicaciones, x_A y x_B, los precios a fijar en cada uno de los n mercados, n > 1 (el caso n = 1 es evidente).

La función $C_i(q_i)$ representa el coste de producción para la firma i, i = A, B, con costes marginales positivos y constantes ($C_i^{'} = dC_i/dq_i > 0$). Se asumen costes marginales de producción constantes (no dependen de la cantidad producida) para que los mercados puedan ser tratados independientemente una vez conocidas las localizaciones de las empresas. El coste de transporte unitario $t_i^k(x) = t_i(\delta_{xk})$ es una función positiva y creciente de la distancia[1], δ_{xk}, entre x y k, k = 1,....,n, e indica el coste que supone a la empresa i trasladar una unidad del bien desde su ubicación x hasta el mercado k. Denotaremos por $C_i^k(x) = C_i^{'} + t_i^k(x)$ al coste marginal en destino, es decir, el coste de suministrar una unidad de producto en el mercado k para la firma i localizada en x.. Finalmente, existe un coste fijo F_i para cada firma que por simplicidad supondremos que no depende de su localización.

El objetivo de cada firma es determinar su ubicación y el precio que fijará en cada uno de los mercados ("delivered price"), de forma que maximice su beneficio, que se obtiene como ingresos totales menos costes de producción y de transporte. Este proceso de competencia puede modelarse como un juego no cooperativo en dos etapas, en la primera de las cuales se eligen las localizaciones y en la segunda, conocidas éstas, los precios. Una solución de equilibrio para este juego, es decir, una situación que ninguna de las empresas tenga unilateralmente incentivo a alterar, se denomina equilibrio subjuego-perfecto (Selten, 1975).

El precio en la segunda etapa está condicionado por las localizaciones elegidas en la etapa anterior. Sea $p_i^k(x_A, x_B)$ el precio al que ofrecerá la empresa i el bien en el mercado k, si las firmas A y B están ubicadas en x_A y x_B respectivamente. Se asume que los productos son homogéneos, es decir, los consumidores adquirirán el bien de aquella empresa que se lo ofrezca a un precio en destino más bajo, es decir, si $p_i^k(x_A, x_B) < p_j^k(x_A, x_B)$, los consumidores situados en k comprarán a la firma i al precio p_i^k. Si en un determinado mercado los precios coinciden, supondremos que ambas firmas se reparten la demanda. Se asume también que las firmas no bajarán los precios por debajo de sus costes, que es la conducta esperada si no existe comportamiento predatorio[2], es decir, si $p^k < C_i^{'} + t_i^k$ entonces $q_i^k = 0$.

3. DEMANDA TOTALMENTE INELASTICA

Sea λ_k la demanda en el mercado k-ésimo, que no depende del precio del bien en ese mercado. Estudiemos en primer lugar la existencia de un equilibrio de Nash para la segunda etapa del juego. Para ello, dadas dos localizaciones, denotemos por k_A y k_B, los mercados captados por A y B respectivamente, y por k_M el mercado marginal, es decir,

$$k_A = \left\{k : p_A^k < p_B^k\right\}$$

$$k_B = \left\{k : p_A^k > p_B^k\right\}$$

$$k_M = \left\{k : p_A^k = p_B^k\right\}$$

Entonces, el beneficio para la firma i se escribe de la siguiente manera.

$$\pi_i(p_A, p_B) = \sum_{k \in k_i} (p_i^k - c_i^k)\lambda_k + \frac{1}{2} \sum_{k \in k_M} (p_i^k - c_i^k)\lambda_k - F_i$$

Proposición 1. Dadas dos localizaciones, el único equilibrio de Nash en precios es $\bar{p}^k = \max\{c_A^k, c_B^k\}$, k =1,....,n.

Dem. Dadas dos ubicaciones y p_B^k, k = 1,......,n, la decisión óptima para A en el mercado k es

$$p_{A_\varepsilon}^k = \max\left\{c_A^k, p_B^k - \varepsilon\right\}$$

donde $\varepsilon > 0$ es una cantidad tan pequeña como se desee. La empresa B, conocedora de la política de A, es decir, reducir mientras tenga margen de beneficio el precio fijado por B, adoptará el precio.

[1]camino mínimo sobre la red.
[2]En un modelo donde se intenta maximizar el beneficio presente y no futuro, es difícil justificar un comportamiento predatorio en precios.

$$\overline{p}^k_{B_\varepsilon} = \max\left\{c^k_B, c^k_A - \varepsilon\right\}$$

al que responderá A con

$$\overline{p}^k_{A_\varepsilon} = \max\left\{c^k_A, c^k_B - \varepsilon\right\}$$

Esto significa que la empresa con menores costes marginales en un determinado mercado lo capta completamente y que el precio fijado será algo inferior al coste de su competidora. Las empresas tomarán ε arbitrariamente pequeño, y en el límite.

$$\overline{p}^k_A = \overline{p}^k_B = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{p}^k_{i_\varepsilon} = \max\left\{c^k_A, c^k_B\right\} = \overline{p}^k \qquad \blacksquare$$

Este es un resultado conocido en la teoría sobre discriminación de precios, que asegura que el precio pagado por los consumidores es igual al coste marginal en destino de la empresa con costes superiores.

En el equilibrio, ambas firmas tendrán los mismos precios en cada mercado, así que bajo la regla usada para definir la cuota de mercado, ambas empresas se dividirán la demanda. Sin embargo aquella con mayores costes no obtendrá beneficios, es más, bastaría con que su competidora redujese mínimamente su precio para quedarse con toda la demanda del mercado, así que parece bastante razonable redefinir esta regla de forma que cada mercado sea cubierto por la firma con menor coste. Bajo los precios de equilibrio, podemos definir entonces los mercados cubiertos por cada empresa como

$$k_A = \left\{k : c^k_A < c^k_B\right\}$$

$$k_B = \left\{k : c^k_A > c^k_B\right\}$$

$$k_M = \left\{k : c^k_A = c^k_B\right\}$$

y puesto que ninguna empresa obtiene beneficio en k_M, el beneficio para la firma i en la primera etapa puede escribirse de la siguiente manera

$$\pi_i(x_A, x_B) = \pi_i(x_A, x_B, \overline{p}) = \sum_{k \in K_i} (c^k_j(x_j) - c^k_i(x_i))\lambda_k - F_i, \quad i = A, B; \ \ j \neq i$$

Según Lederer y Thisse (1990), el coste social (CS) es el coste mínimo para cubrir toda la demanda, es decir,

$$CS(x_A, x_B) = \sum_{k=1}^{n} \min\left\{c^k_A(x_A), c^k_B(x_B)\right\}\lambda_k + F_A + F_B \,.$$

Proposición 2. El beneficio de cada firma en la primera etapa puede descomponerse de la siguiente manera.

$$\pi_i(x_A, x_B) = \sum_{k=1}^{n} c^k_j(x_j)\lambda_k + F_j - CS(x_A, x_B), \ \ i = A, B; \ \ j \neq i$$

Dem. Se deduce de forma inmediata teniendo en cuenta los mercados captados por cada empresa $\blacksquare$

Este resultado indica que el beneficio de una firma es el coste que supone a su rival cubrir toda la demanda menos el coste social, que es el coste mínimo si lo hiciesen conjuntamente.

Un equilibrio de Nash subjuego-perfecto viene dado por un par de localizaciones, $\overline{x}_A$ y $\overline{x}_B$, y los correspondientes precios de equilibrio de la segunda etapa, tales que

$$\pi_i((\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \max_{x \in N} \pi_i(x, \bar{x}_j), \quad i = A, B; \quad j \neq i.$$

Si asumimos x_j fijo, es el coste que supone para la firma j suministrar todo el mercado es constante, por lo que el beneficio de la firma i se maximiza en aquella localización que minimice el coste social. Por tanto, se trata de estudiar si existen localizaciones, $\bar{x}_A$ y $\bar{x}_B$, tales que

$$CS(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = \min_{x \in N} CS(x, \bar{x}_B) = \min_{x \in N} CS(\bar{x}_A, x)$$

Proposición 3. Si las funciones de coste de transporte unitario son continuas, entonces las localizaciones óptimas sociales[3] constituyen un equilibrio de Nash para la primera etapa del juego.

Dem. Como CS es una función continua en el compacto N, CS tiene mínimo global. Dicho mínimo, es decir, las localizaciones que minimizan el coste social, son un equilibrio de Nash. ■

Aunque pueden existir equilibrios que no tienen porqué ser mínimos globales de esta función, el mínimo del coste social, además de ser un óptimo de Pareto, constituye un equilibrio de Nash. En otras palabras, la minimización del coste social es una condición suficiente para el equilibrio aunque no necesaria.

Por otro lado, en equilibrio dos empresas con iguales costes marginales y de transporte, no se localizarán en el mismo nodo siempre que exista otro con demanda no nula. Esto es debido a que sí las localizaciones son coincidentes, ambas tendrán beneficio cero, mientras que una de ellas podría relocalizarse en otro nodo con demanda no nula, obteniéndose beneficios para ambas.

Proposición 4. Si las funciones de coste de transporte son cóncavas, entonces existe un equilibrio de Nash en un conjunto de nodos de la red.

Dem. Es consecuencia inmediata de la concavidad de CS. Sea $(\bar{x}_A, \bar{x}_B)$ un equilibrio. Si $\bar{x}_A$ y $\bar{x}_B \in V$ estaría probado el resultado. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer entonces que $\bar{x}_A \notin V$. Esto significa que existe una arista $[v_L,v_u]$ en la red de forma que $\bar{x}_A \in]v_L, v_U[$. Como $t_A^k(x)$ es una función cóncava en $[v_L,v_U]$, la siguiente función es también cóncava en $[v_L,v_U]$ por ser suma de mínimos de funciones cóncavas.

$$CS(x, \bar{x}_B) = \sum_{k=1}^{n} \min\left\{t_A^k(x) + C'_A, t_B^k(\bar{x}_B) + C'_B\right\}\lambda_k + F_A + F_B$$

Por hipótesis, el mínimo de la función cóncava CS está en el interior de $[v_L,v_U]$, por tanto CS debe ser constante en $[v_L,v_U]$ y entonces cualquiera de los extremos del intervalo es también un equilibrio. ■

En virtud de este resultado, la búsqueda de un equilibrio de Nash puede efectuarse con un método de enumeración que recorra las n^2 posibilidades. Si el número de posibles localizaciones es elevado, podría utilizarse un algoritmo de búsqueda que no recorra completamente el conjunto factible, aunque de esta forma no podría asegurarse que el equilibrio alcanzado sea un óptimo de Pareto. Puede partirse de una localización inicial para una de las empresas y obtener consecutivamente la localización que minimiza el coste social dada la elección de la otra. En virtud del siguiente resultado, podemos asegurar que este proceso acaba en un número finito de pasos en un equilibrio de Nash.

Proposición 5. Dada una localización de partida para una de las empresas, el proceso de relocalizaciones alternativas a una ubicación con menor coste social acaba en un número finito de pasos.

Dem. Puesto que el conjunto factible es finito, bastará con comprobar que no existen ciclos. Supongamos por reducción al absurdo que existen dos subconjuntos $\left\{x_A^1, x_A^2, \ldots, x_A^s\right\}$ y $\left\{x_B^1, x_B^2, \ldots, x_B^s\right\}$ de localizaciones factibles que representan las decisiones tomadas por A y B respectivamente, siendo A la primera en decidir, que producen un ciclo en el paso s. Se tendrá entonces que

[3] aquellas que minimizan el coste social.

$$CS(x_A^2, x_B^1) < CS(x_A^1, x_B^1)$$
$$CS(x_A^2, x_B^2) < CS(x_A^2, x_B^1)$$
$$CS(x_A^3, x_B^2) < CS(x_A^2, x_B^2)$$
$$\vdots$$
$$CS(x_A^1, x_B^s) < CS(x_A^s, x_B^s)$$
$$CS(x_A^1, x_B^1) < CS(x_A^1, x_B^s)$$

Sumando todas las inecuaciones se tiene

$$\sum_{j=1}^{s}\left[CS(x_A^{j+1}, x_B^{j}) + CS(x_A^{j+1}, x_B^{j+1})\right] < \sum_{j=1}^{s}\left[CS(x_A^{j}, x_B^{j}) + CS(x_A^{j+1}, x_B^{j})\right]$$

donde $x_i^{s+1} = x_i^1, i = A, B.$ Pasando todo al primer miembro, agrupando bajo el mismo sumatorio y simplificando, resulta.

$$\sum_{j=1}^{s}\left[CS(x_A^{j+1}, x_B^{j+1}) - CS(x_A^{j}, x_B^{j})\right] < 0$$

Como el primer término se anula, se obtiene la contradicción buscada (0<0). ■

La búsqueda de un equilibrio de Nash subjuego-perfecto puede hacerse aplicando el siguiente algoritmo, donde en cada proceso de relocalización se minimiza el coste social.

Algoritmo. Obtención de un equilibrio para el juego.

Paso 0. Hacer h = 0. Tomar un par de localizaciones iniciales x_A^h y x_B^h de V, y hacer CS^h = CS (x_A^h, x_B^h).

Paso 1. (Relocalización de A) Hallar x_A^* tal que CS $(x_A^*, x_B^h) = \min_{x\in V} CS\,(x, x_B^h)$.

Si CS $(x_A^*, x_B^h) = CS^h$ y h ≠ 0, parar. Las localizaciones son x_A^h y x_B^h, los precios $\overline{p}^k = \max\left\{c_A^k(x_A^h), c_B^k(x_B^h)\right\}$, k = 1,....,n, y el coste social es CS^h. En otro caso, hacer $x_A^{h+1} = x_A^*$ y $CS^{h+1} = CS\,(x_A^*, x_B^h)$.

Paso 2. (Relocalización de B) Hallar x_B^* tal que CS $\left(x_A^{h+1}, x_B^*\right) = \min_{x\in V} CS\left(x_A^{h+1}, x\right)$. Si $CS\left(x_A^{h+1}, x_B^*\right) = CS^{h+1}$, parar. Las localizaciones son x_A^{h+1} y x_B^h, los precios $\overline{p}^k$ = max $\left\{c_A^k\left(x_A^{h+1}\right), c_B^k\left(x_B^h\right)\right\}$, k = 1, ...,n, y el coste social es CS^{h+1}. En otro caso, hacer $x_B^{h+1} = x_B^*, CS^{h+1} = CS\left(x_A^{h+1}, x_B^*\right)$, h = h+1 e ir al paso 1.

El resultado anterior garantiza que este proceso finaliza en un número finito de pasos, a lo sumo n. En cada paso, se determina un mínimo en V, por lo que este algoritmo tiene complejidad 0 (n^2).. Finalmente, obsérvese que en el paso 0 podría tomarse una localización inicial x_A^0 y elegir x_B^0 tal que CS $\left(x_A^0, x_B^0\right) = \min_{x\in V} CS\left(x_A^0, x\right)$.

4. DEMANDA ELASTICA AL PRECIO. EL CASO LINEAL

Supongamos que la función de demanda viene dada por

$$q^k(p^k) = \begin{cases} \alpha_k - \beta_k p^k & \text{si } 0 \le p^k \le a_k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\alpha_k > 0$, $\beta_k > 0$ y $a_k = \frac{\alpha_k}{\beta_k} > 0$ es la disposición a pagar de los consumidores del mercado k, k = 1, ...,n.

Para descartar comportamientos monopolísticos y garantizar que se satisfaga la demanda de cada mercado, asumiremos que la disposición a pagar de los consumidores es suficientemente grande, satisfaciendo $\alpha_k \geq c_i^k$, i = A, B, para cada localización potencial. Esta suposición garantiza competencia en cada mercado y no supone una condición muy restrictiva siempre que el coste de transporte no sea demasiado grande.

En primer lugar consideremos localizaciones x_A y x_B dadas, y estudiemos la existencia de un equilibrio de Nash en precios. El beneficio de las empresas se expresa de la siguiente manera

$$\pi_i(p_A,p_B) = \sum_{k=1}^{n} (p_i^k - c_i^k)\, q_i^k(p_A^k, p_B^k) - F_i$$

siendo

$$q_i^k(p_A^k,p_B^k) = \begin{cases} \alpha_k - \beta_k p_i^k & \text{si } p_i^k < p_j^k \\ \frac{1}{2}(\alpha_k - \beta_k p_i^k) & \text{si } p_i^k = p_j^k, \quad i = A,B; \quad j \neq i \\ 0 & \text{si } p_i^k > p_j^k \end{cases}$$

Entonces,

$$\pi_i(p_A, p_B) = \sum_{k \in k_i} (p_i^k - c_i^k)(\alpha_k - \beta_k p_i^k) + \frac{1}{2}\sum_{k \in k_M} (p_i^k - c_i^k)(\alpha_k - \beta_k p_i^k) - F_i$$

Proposición 6. Dadas dos localizaciones, existe un único equilibrio de Nash en precios dado por

$$\bar{p}^k = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(a_k + c_A^k\right) & \text{si } c_B^k \geq \frac{1}{2}\left(a_k + c_A^k\right) \\ c_B^k & \text{si } c_A^k \leq c_B^k < \frac{1}{2}\left(a_k + c_A^k\right) \\ c_A^k & \text{si } c_B^k < c_A^k < \frac{1}{2}\left(a_k + c_B^k\right) \\ \frac{1}{2}\left(a_k + c_B^k\right) & \text{si } c_A^k \geq \frac{1}{2}\left(a_k + c_B^k\right) \end{cases}$$

k = 1,....,n.

Dem. Obsérvese que, salvo constante, la expresión del beneficio en un mercado marginal ($k \in k_M$) coincide con la de uno captado completamente ($k \in k_i$), por lo que el objetivo a optimizar para la empresa i, independientemente del tipo de mercado, es $f(p_i^k) = (p_i^k - c_i^k)(\alpha_k - \beta_k p_i^k)$. Como además estamos asumiendo costes marginales de producción constantes (no hay economías de escala), bastará con maximizar el beneficio en cada mercado, esto es

$$\max f(p_i^k)$$
$$\text{s.a.} \quad c_i^k \leq p_i^k \leq p_j^k$$
$$p_i^k \leq a_k$$

i = A, B; $j \neq i$. La función $f(p_i^k)$ es una parábola cóncava con vértice $p_i^k = \frac{1}{2}(a_k + c_i^k)$. Teniendo en cuenta que el precio de mercado $p^k = \min \{p_A^k, p_B^k\}$, puede comprobarse que $\bar{p}^k$ es el precio de equilibrio. ■

Cuando $\bar{p}^k = \frac{1}{2}(a_k + c_A^k)$ o $\bar{p}^k = c_B^k$, la firma B queda fuera del mercado. En otro caso, es la firma A la que no suministra ninguna cantidad al mercado k.

Si ambas firmas se ponen de acuerdo, de tal forma que cada mercado es cubierto por aquella con menores costes, se obtiene un óptimo de Pareto para las empresas. En tal caso, los precios colusivos que maximizan el beneficio conjunto de las firmas vienen dados por el siguiente resultado.

Proposición 7. Dadas dos localizaciones, el precio colusivo que maximiza el beneficio conjunto es

$$p^k = \frac{1}{2}\left(a_k + \min\{c_A^k, c_B^k\}\right)$$

Dem. Hemos asumido que el acuerdo entre las empresas asigna cada mercado a la firma con menor coste en destino. Además, el precio de monopolio en el mercado k es $\frac{1}{2}(a_k + c_i^k)$, de donde se deduce el resultado. ■

Este precio colusivo no es un equilibrio de Nash. Obsérvese que aumenta con la disposición a pagar y con los costes en destino de la empresa más eficiente. Entonces, la otra empresa tendrá incentivos a reducir costes para colocarlos por debajo de su oponente y controlar dicho mercado.

Finalmente, se trata de estudiar la existencia de un equilibrio de Nash para la primera etapa.

Corolario 1. El beneficio en la primera etapa $\pi_i(x_A, x_B)$, adelantando el equilibrio de Nash en precios en la segunda, es

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in K_i^m(x_A, x_B)} \prod_i^k (x_i) + \sum_{k \in K_i^d(x_A, x_B)} (c_j^k(x_j) - c_i^k(x_i))(\alpha_k - \beta_k c_j^k(x_j)) - F_i,$$

i = A,B; $j \neq i$, donde

$$\prod_i^k (x_i) = \left(\left(a_k - c_i^k(x_i)\right)\left(\alpha_k - \tfrac{1}{2}\beta_k(a_k + c_i^k(x_i)\right)\right) \text{ y}$$

$$K_i^m(x_A, x_B) = \left\{k : c_j^k(x_j) \geq \frac{1}{2}(a_k + c_i^k(x_i))\right\}$$

$$K_i^d(x_A, x_B) = \left\{k : C_i^k(x_i) \leq C_j^k(x_j) \langle \frac{1}{2}(\alpha_k + C_i^k(x_i))\right\}$$

Dem. Se obtiene sustituyendo el equilibrio de Nash en precios en la función de beneficio de las empresas y teniendo en cuenta que $\left| K_A^m \cup K_A^d \cup K_B^m \cup K_B^d \right| = n$ ■

Corolario 2. El beneficio en la primera etapa, adelantando colusión en precios en la segunda, es

$$\pi_i^c(x_A, x_B) = \frac{1}{2} \sum_{k \in K_i(x_A, x_B)} \prod_i^k (x_i) + \frac{1}{4} \sum_{k \in K_M(x_A, x_B)} \prod_i^k (x_i) - F_i,$$

donde $K_i(x_A, x_B) = \left\{k : c_i^k(x_i) < c_j^k(x_j)\right\}$ y

$$K_M(x_A, x_B) = \left\{ k : c_A^k(x_A) = c_B^k(x_B) \right\}, \quad i = A, B; \ \ j \neq i.$$

Dem. Se obtiene sustituyendo el precio colusivo en la función de beneficio de las empresas. ■

Proposición 8. Si los costes de transporte son funciones cóncavas de clase dos, las funciones $\pi_i(x_A, x_B)$ y $\pi_i^c(x_A, x_B)$ son convexas cuando x_i se desplaza a lo largo de una arista de la red, i = A, B.

Dem. Sea x_j fijo. Tanto f(x) = a_k - $c_i^k(x)$ como g(x) = α_k - $\frac{1}{2}\beta_k(a_k + c_i^k(x))$ son funciones convexas positivas. Además $f' \cdot g' = \frac{1}{2}\beta_k((c_i^k)')^2 \geq 0$, por lo que f · g es convexa. Entonces π_i^c es convexa, i = A, B. Finalmente, h(x) = $(c_j^k - c_i^k(x))(\alpha_k - \beta_k c_j^k)$ es convexa, así que π_i también lo es. ■

Proposición 9. Si los costes de transporte son funciones cóncavas de clase dos, la búsqueda de un equilibrio de Nash para la primera etapa puede reducirse a los nodos de la red tanto con precio colusivo como con precio de Nash.

Dem. Es consecuencia inmediata de la convexidad de las funciones de beneficio a lo largo de una arista. ■

Con colusión en precios puede no existir equilibrio en la primera etapa, como muestra el siguiente ejemplo. Se considera el segmento de longitud unidad $[1,2]$ con nodos de demanda situados en los extremos. No se consideran costes fijos ($F_A = F_B = 0$) y las funciones de demanda son

$$q^k(p^k) = \alpha_k - \beta_k p^k, \ 0 \leq p^k \leq \frac{\alpha_k}{\beta_k}$$

con $a_1 = 8$, $a_2 = 4$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0.5$. Los costes marginales y los costes de transporte son $C_A' = 1$, $C_B' = 2$ y $t_i^k(x) = 2\delta_{xk}$, i = A, B; k = 1,2. Como puede observarse en el siguiente cuadro, cuando el precio es colusivo no hay equilibrio en la primera etapa sobre los nodos de la red. Entonces, en virtud de la proposición 9, no hay equilibrio en localización.

x_A	$(\pi_A^c(x_A, x_B), \pi_B^c(x_A, x_B))$ $x_B = 1$	$x_B = 2$
1	(15.37, 0)	(2.25, 4.5)
2	(6.12, 9)	(12.37, 0)

5. EJEMPLO

El siguiente ejemplo compara los resultados obtenidos para los dos escenarios analizados con demanda lineal: equilibrio de Nash y colusión en precios. Se considera la red de la figura 1 y que el coste marginal para ambas firmas es de una unidad, al igual que el coste de transporte por unidad entre cualesquiera dos vértices, es decir,

$$c_i^k(x_k) = 1 \ \text{y} \ c_i^k(x_l) = 2, \quad i = A,B, \quad k,l = 1,2,3, \quad l \neq k$$

No se consideran costes fijos ($F_A = F_B = 0$) y las funciones de demanda son

$$q^k(p^k) = \alpha_k - \beta_k p^k, \quad 0 \leq p^k \leq \frac{\alpha_k}{\beta_k}.$$

con $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 9$, $\beta_1 = \beta_3 = 1$, $\beta_2 = 0{,}5$. Las elasticidades de la demanda son

$$\in_1 = -\frac{8-q}{q}, \in_2 = -\frac{4-q}{q} \ \text{y} \ \in_3 = -\frac{9-q}{q}$$

El tercer mercado es el más elástico y presenta también la mayor disposición a pagar $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$, mientras que con el segundo mercado ocurre justo lo contrario. En la Tabla 1 aparecen marcados con un superíndice todos los equilibrios del problema discreto en los dos escenarios descritos con anterioridad.

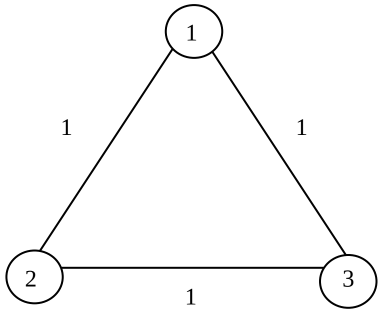

Figura 1. Red considerada en el ejemplo.

Tabla 1. Equilibrios con demanda lineal.

	x_A	$(\pi_A(x_A, x_B),\pi_B(x_A, x_B))$		
		$x_B = 1$	$x_B = 2$	$x_B = 3$
Precio de Nash	1	(0, 0)	(6, 3)	(6, 7)[1]
	2	(3, 6)	(0, 0)	(3, 7)
	3	(7, 6)[2]	(7, 3)	(0, 0)
Precio colusivo	1	(14.50, 14.50)	(18.37, 12.25)	(14.50, 18.25)
	2	(12.25, 18.37)	(13.69, 13.69)	(10.62, 20.50)
	3	(18.25, 14.50)	(20.50, 10.62)	(14.75, 14.75)[3]

La Tabla 2 muestra los precios y elasticidades en cada mercado para cada uno de los equilibrios de la Tabla 1. En todos ellos, al menos una de las firmas se sitúa en el tercer mercado, que recordemos es aquel con mayor elasticidad-precio y disposición a pagar de los consumidores. Además, en uno de los casos son ambas firmas las que se sitúan en este mercado. En los otros dos casos, la firma que se ubica en el tercer mercado es la que obtiene mayores beneficios. Obsérvese que en el escenario de Nash las localizaciones coincidentes no pueden constituir un equilibrio porque ambas firmas obtienen beneficio nulo. En colusión los precios son elevados (más del doble) y aún así se obtienen importantes beneficios, mucho mayores que con competencia. Nótese que incluso pactando un reparto del mercado en la segunda etapa (precio colusivo), en equilibrio ambas firmas se sitúan en el mismo nodo, con lo que se reparten la demanda de cada mercado y obtienen así los mismos beneficios.

Tabla 2. Precios y elasticidades en equilibrio.

Equilibrios	p^1	p^2	p^3	$-\epsilon_1$	$-\epsilon_2$	$-\epsilon_3$
1, 2	2	2	2	0.33	0.33	0.29
3	5	5	5	1.67	1.67	1.25

6. CONCLUSION

Se ha probado la existencia de un equilibrio de Nash subjuego-perfecto cuando la demanda es totalmente inelástica al precio. Además, el equilibrio óptimo de Pareto se alcanza cuando se minimiza el coste social, es decir, el coste mínimo para satisfacer toda la demanda. Esta idea lleva intrínseca cierta eficiencia al confluir en el equilibrio los intereses de las firmas, de maximización del beneficio, y de los consumidores. Además existen localizaciones de equilibrio en los vértices de la red y se propone un algoritmo de orden $O(n^2)$ para su obtención.

El caso de demanda elástica al precio se ha estudiado para demanda lineal. Existe equilibrio en la segunda etapa tanto si hay competencia como colusión en precios, mientras que en la primera etapa el equilibrio, en el caso de existir, se encuentra sobre los vértices de la red.

Para finalizar, una observación sobre el efecto renta. Tanto en este trabajo como en la literatura sobre el tema, se han considerado funciones de demanda compensadas o Hicksianas, cuya diferencia con las funciones de demanda directas o Marshallianas radica en que en las primeras se ha eliminado el efecto renta sobre la cantidad demandada. Mientras que la demanda directa es observable, la compensada no lo es, aunque puede ser estimada por técnicas econométricas. La curva de demanda Marshalliana q = q(p, I) recoge las variaciones en el consumo de un determinado bien ante cambios en su precio (efecto sustitución) y en la renta (efecto renta). Generalmente, suele suponerse que el bien tiene poco peso dentro del presupuesto del consumidor y, por tanto, que el efecto renta es nulo o próximo a cero. Si la cantidad demandada es función lineal del precio y la renta, la curva de demanda puede expresarse de la siguiente manera, donde I_k es el nivel de renta en el mercado k,

$$q^k(p^k, I_k) = \begin{cases} \alpha_k - \beta_k P^k + \gamma_k I_k & \text{si } \ 0 \leq p^k \leq \dfrac{\alpha_k + \gamma_k I_k}{\beta_k} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con α_k y $\beta_k > 0$, $\forall k, \gamma_k > 0$ en el caso de bienes normales y $\gamma_k < 0$ para bienes inferiores. Puesto que la renta no es una variable de decisión y se supone conocida, en estos casos los resultados que se muestran en el apartado 4 siguen siendo válidos sin más que sustituir α_k por $a_k + \gamma_k I_k$.

REFERENCIAS

ANDALUZ, J. (1995): "Competencia en localización y precios: influencia de los costes de transporte ", **Cuadernos Aragoneses de Economía**, 2, 343-358.

EISELT, H. A. and G. LAPORTE (1996): "Equilibrium results in competitive location models", **Middle East Forum**, 1, 63-92.

EISELT, H.A., G. LAPORTE and J. F. THISSE (1933) "Competitive location models: a framework and bibliography", **Transportacion Science**, 27, 44-54.

FRIESZ, T.L., T. MILLER and R. L. TOBIN (1988): "Competitive network facility location models: a survey ", **Papers of the Regional Science Association**, 65, 47-57.

HAKIMI, S.L. (1990): "Locations with spatial interactions: competitive locations and games", in **Discrete location theory**, Mirchandani, P. B. y R. L. Francis eds., 439-478.

__________ (1983): "On locating new facilities in a competitive environment", **European Journal of Operational Research**, 12, 29-35.

HOTELLING, H. (1929): "Stability in competition", **Economic Journal**, 39, 41-57.

HURTER, A. and P. LEDERER (1985): "Spatial duopoly with discriminatory pricing", **Regional Science and Urban Economics**, 15, 541-553.

LABBE, M. and S.L. HAKIMI (1991): "Market and location equilibrium for two competitors", **Operations Research**, 39, 749-756.

LABBE, M., D. PEETERS and J.F. THISSE. (1995): "Location on networks", **in Handbooks in Operations Research and Management Science**, 8, Network Routing , 551-624.

LEDERER, P. J. and J.F. THISSE (1990): "Competitive location on networks under delivered pricing", **Operations Research Letters**, 9, 147-153.

REVELLE, C. (1986): "The maximum capture or "sphere of influence" location problem: Hotelling revisited on a network", **Journal of Regional Science**, 26, 343-358.

SARKAR, J.; B. GUPTA and D. PAL (1997): "Location equilibrium for Cournot oligopoly in spatially separated markets", **Journal of Regional Science**, 2, 195-212.

SELTEN, R. (1975): "Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games", **International Journal of Game Theory**, 4, 25-55.

SERRA, D. and C. REVELLE (1995): "Competitive location in discrete space", in **Facility location: a survey of applications and methods**, Drezner, Z. ed. 367-386.

________________________ (1994): "Market capture by two competitors: the preemptive location problem", **Journal of Regional Science**, 34, 549-561.