OPTIMIZACION DEL COSTE DE TRABAJO BASADA EN UN MODELO NO-LINEAL EN EL CASO DE LA FORMACION DEL TRABAJADOR

Stefan Balint[1], Departamento de Matemáticas, West University of Timisoara, Rumania
Josefina Martínez Barbeito[2], Departamento de Economía Aplicada, Universidade da Coruña, España
Constantin Chilărescu[3], Departamento de Economía, West University of Timisoara, Rumania
Ovidiu Ciorica[4], Departamento de Economía, West University of Timisoara, Rumania

RESUMEN
El objetivo de esta comunicación es optimizar la función del coste del trabajo, en el caso de la formación del trabajador, dentro del marco de un Modelo No-Lineal, siguiendo dos hipótesis distintas. La primera hipótesis sostiene que el personal externo de la empresa forma parte de este mercado competitivo y la segunda, más realista, asume la no inclusión de este tipo de mano de obra.

Palabras clave: Cobb-Douglas, mercado competitivo, solución bang-bang.

ABSTRACT
The main aim of this paper is to optimize the decision of job training in the framework of a non-linear model undet two different hypothesis. First hypothesis states that outside labor is available on the competitive market and the second one, more realistic, assumes that the outside labor is not available.

Key words: Cobb-Douglas, competitive market, bang-bang solution.

MSC: 91B74

1. PRIMER MODELO MATEMATICO

Supongamos que la empresa forma parte de una economía de mercado perfecto. Bajo la primera hipótesis, la producción de la empresa por unidad de tiempo está dada por la suma de dos funciones de producción separables de Cobb-Douglas:

$$F(L_1, K_1, L_2, K_2) = a_1 L_1^{\alpha} K_1^{1-\alpha} + a_2 L_2^{\beta} K_2^{1-\beta} \qquad (1)$$

donde $L_1 = L_1(t)$ es el input de trabajo del que disponemos en el mercado competitivo, $L_2 = L_2(t)$ es el input de trabajo dentro de la empresa, y K_1 y K_2 representan el capital correspondiente a L_1 y a L_2; respectivamente (L_1 y L_2 medidos por sus salarios). Consideraremos que el nivel de la productividad del trabajo exterior a la empresa es constante e igual a un valor deseado Z y la productividad del trabajo X(t) dentro de la empresa es una función del tiempo, que depende, de hecho, del nivel de formación. Denotando por x(t) la productividad relativa dada por el ratio X(t)/Z, el ajuste salarial interno está dado por la siguiente ecuación:

$$L_2(t) = \left[\gamma x_0 + (1-\gamma)x(t)\right] L_1(t) \qquad (2)$$

donde se puede considerar a γ como un coeficiente de lealtad.

El coste laboral de la empresa, en el caso de que exista la formación laboral, representa la suma de los salarios laborales internos y externos, y el coste de formación, y está dado por la siguiente ecuación:

$$C(t) = L_1(t) + L_2(t) + cu(t)L_2(t) \qquad (3)$$

donde c representa el coste de formación por unidad de tiempo, que se supone constante, y u(t) es la variable de control que refleja la decisión de la empresa de formar a sus empleados.

E-mail: [1]balint@balint.uvt.ro
[2]barbeito@ares.six.udc.es
[3]kyly@fsel.uvt.ro
[4]cciorica@fse1.uvt.ro

Las evoluciones o dinámicas de la productividad relativa x(t), del personal interno de la empresa, está determinada por la decisión de formación y está gobernada por la siguiente ecuación de estado:

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t)\left[\varphi + \delta x(t)\right] - \delta x(t) \tag{4}$$

Las ecuaciones (1) - (4) definen el modelo matemático de la empresa en el caso de la formación del personal. La empresa tiene alternativas diferentes para optimizar su actividad dependiendo de la variable de control u(t): minimizar el coste laboral o maximizar el nivel de producción. Debido a ciertas dificultades de la alternativa primera, en este caso elegiremos el máximo nivel de producción bajo la restricción de un total del importe fijo del coste salarial.

Dado el importe fijo C del coste salarial, la ecuación (3) pasa a ser:

$$C = L_1(t)\left\{1 + \left[\gamma x_0 + (1-\gamma)x(t)\right]\left[1 + cu(t)\right]\right\} \tag{5}$$

Para un nivel deseado de productividad del trabajo exterior; se conoce el importe correspondiente de los salarios y se deduce que $L_1(t)$ es constante, digamos igual a L_1. Bajo esta hipótesis la ecuación anterior se puede escribir como sigue:

$$L_1 = C\left\{1 + \left[\gamma x_0 + (1-\gamma)x(t)\right]\left[1 + cu(t)\right]\right\}^{-1} \tag{6}$$

En estas condiciones, el ajuste salarial interno, dado por la ecuación (2) dependerá sólo de la variable de estado x(t) y la variable de control u(t):

$$L_2(t) = C\left[\gamma x_0 + (1-\gamma)x(t)\right]\left\{1 + \left[\gamma x_0 + (1-\gamma)x(t)\right]\left[1 + cu(t)\right]\right\}^{-1} \tag{7}$$

Bajo las consideraciones anteriores, la función de producción dada en la ecuación (1) pasa a ser:

$$F(t, x(t), u(t)) = \frac{aC^{\alpha}K_1^{1-\alpha}}{\left\{1 + \left[\gamma x_0 + (1-\gamma)x(t)\right]\left[1 + cu(t)\ \right]\right\}^{-1}} + \frac{bC^{\beta}K_2^{+1-\beta}\left[\gamma x_0 + (1-\gamma)x(t)\right]^{\beta}}{\left\{1 + \left[\gamma x_0 + (1-\gamma)x(t)\right]\left[1 + cu(t)\right]\right\}^{\beta}} \tag{8}$$

El Hamiltoniano del problema anterior está dado por:

$$H(t, x(t), u(t)) = F(t_1 x(t), u(t) + \lambda(t)\frac{dx(t)}{dt} \tag{9}$$

Las condiciones de optimalidad de primer orden son:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \lambda} &= \frac{dx}{dt} \\ \frac{\delta H}{\delta x} &= -\frac{d\lambda}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Denotando por:

$$A = aC^{\alpha}K_1^{1-\alpha}\text{''}\quad B = bC^{\beta}K_2^{1-\beta},$$

$$f_1 = \left[rx_0 + (1-\lambda)x(t)\right],$$

$$f_2 = \left\{1 + \left[\gamma x_0 + (1-\gamma)x(t)\right]\left[1 + cu(t)\ \right]\right\},$$

se pueden escribir las ecuaciones de primer orden como sigue:

$$\frac{\delta H}{\delta \lambda} = u(t)[\varphi + \delta x(t)] - \delta x(t) \quad (11)$$

$$\frac{\delta H}{\delta x} = -\frac{\alpha A(1-\gamma)[1+cu(t)]}{f_2^{\alpha+1}} + \frac{\beta B(1-\gamma)f_1^{\beta-1}}{f_2^{\beta+1}} + \delta\lambda(t)u(t) - \delta\lambda(t) \quad (12)$$

Puesto que el Hamiltoniano es no-lineal en la variable de control u(t), la aplicación del principio del máximo nos lleva a una situación muy complicada y, en consecuencia, la dinámica óptima del modelo (1) - (4) bajo la restricción establecida y el criterio óptimo elegido, se puede obtener solamente en un modo de simulación. Nuestra solución es, obviamente, más realista que la solución bang-bang propuesta por Fanchon y Melese (ver Sengupta-Fanchon (1997) para más detalle).

2. EL SEGUNDO MODELO MATEMATICO

Bajo la segunda hipótesis el output de la empresa por unidad de tiempo está dado por la siguiente función de producción de Cobb-Douglas:

$$F(L_1K) = aL^{\alpha}K^{1-\alpha} \quad (13)$$

donde L = L(t) es el factor trabajo y K representa el factor capital.

Suponemos también que la empresa es parte de una economía de mercado perfecto. Aceptamos que, en caso de ausencia de cursos de formación, el decrecimiento de la productividad laboral genere una reducción de los salarios y que en caso de formación, se esperará un crecimiento de la productividad laboral y, en consecuencia, un crecimiento del nivel salarial. Bajo esta hipótesis, se puede escribir la ecuación de ajuste de los salarios como sigue:

$$L(t) = L_0 e^{[x(t)-\rho t]} \quad (14)$$

donde x(t) es la tasa de cambio del factor trabajo (que se puede interpretar como el ratio de salarios) en el caso de presencia de formación, y ρ es el tanto de depreciación del factor trabajo en el caso de ausencia de formación. La decisión de formación u(t) tiene consecuencias sobre el tanto de cambio del factor trabajo y está gobernada por la siguiente ecuación de estado:

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t)[\varphi + \delta x(t)] - \delta x(t) \quad (15)$$

El coste salarial de la empresa, en el caso de formación en el trabajo, representa el coste de los salarios y el coste de formación, y está dado por la ecuación siguiente:

$$C(t) = L_0 + CL_0 u(t) e^{x(t)-\rho t} \quad (16)$$

Las ecuaciones (13) - (16) definen el modelo matemático de la empresa en el caso de formación laboral. La decisión de la empresa es minimizar el coste laboral bajo la restricción de un total de producción deseado, F.

Con las consideraciones anteriores, la función de producción dada en la ecuación (13) pasa a ser:

$$F = aL_0^{\alpha}K^{1-\alpha}e^{\alpha[x(t)-\rho t]} \quad (17)$$

De la ecuación anterior y bajo la hipótesis de que F sea constante, obtendremos:

$$L_0 = \left[a^{-1}FK^{\alpha-1}\right]^{\frac{1}{\alpha}} e^{\rho t - x(t)} = Ae^{\rho t - x(t)} \quad (18)$$

El coste salarial de la empresa, en el caso de que existan cursos de formación, dado en la ecuación (16), pasa a ser:

$$C(t, x(t), u(t)) = Ae^{\rho t - x(t)} + cAu(t) \tag{19}$$

El Hamiltoniano del problema anterior está dado por:

$$H(t, x(t), u(t)) = C(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)\frac{dx(t)}{dt} \tag{20}$$

Las condiciones de optimización de primer orden son:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \lambda} &= \frac{dx}{dt} \\ \frac{\delta H}{\delta x} &= -\frac{d\lambda}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Las condiciones de primer orden se pueden escribir como sigue:

$$\frac{\delta H}{\delta \lambda} = u(t)\left[\varphi + \delta x(t)\right] - \delta x(t) \tag{22}$$

$$\frac{\delta H}{\delta x} = -Ae^{\rho t - x(t)} + \delta\lambda(t)u(t) - \delta\lambda(t) \tag{23}$$

Al igual que sucedió con el primer modelo, el Hamiltoniano es no-lineal en la variable de control u(t). La aplicación del principio del máximo nos lleva a una solución complicada y en consecuencia, las dinámicas óptimas del modelo (13)-(16) bajo la restricción y el criterio óptimo elegido, pueden obtenerse mediante simulación. De nuevo, nuestro modelo es más realista que la solución bang-bang propuesta por Franchon y Melese (ver Sengupta-Fanchon (1997) para más detalles).

El problema del estudio cualitativo de las soluciones y del problema de simulación se tratará en una ponencia futura.

REFERENCIAS

CIORICA, O.; C. CHILĂRESCU; E. CASAS and S. BALINT (2001): "Linear model based simulation of the evolution of the labour cost in the case of job training", Asepelt, España, **Anales de Economía Aplicada**. A Coruña, 21-22 junio.

SENGUPTA, J. and P. FANCHON (1997): **Control Theory Methods in Economics**, Kluver Academic Publisher, Boston.