# TEORIA DE LA VALORACION MEDIANTE MODELOS FINANCIEROS ESTOCASTICOS, EN TIEMPO DISCRETO Y EN TIEMPO CONTINUO

Josefina Martínez Barbeito, Universidade de A Coruña, España
Julio García Villalón, Universidad de Valladolid, España

**RESUMEN**
En este trabajo se analizan los conceptos y resultados principales de la matemática financiera estocástica y se desarrollan las aplicaciones de tales resultados a la teoría de la valoración en los modelos estocásticos financieros en tiempo discreto y continuo.Consideramos el problema de la cobertura de opciones y otros activos en mercados libres de arbitraje. Nuestro objetivo se refiere a títulos Europeos que se negocian en mercados completos e incompletos, más que a opciones Americanas. Se tratan los problemas de la valoración de opciones para lograr una valoración racional y estrategias de cobertura.

**Palabras clave**: mercados de finanzas, martingales, modelos de Brownian.

**ABSTRACT**
In this paper the concepts and main results of stochastic mathematical finance are analyzed and they are applied to the Value Theory in stochastic finance models with continous and discrete time. We consider the option coverture problem and other actives in free arbitrage markets. Our objective is linked weith europeans assets negociated in complete and incomplete markets, more than American options. The option valoration problems are treated for obtaining a rational valoration and coverture strategies.

**Key words**: finance markets, martingales, Brownian models.

MSC: 91B28.

## 1. INTRODUCCION

En este trabajo se trata de analizar las estructuras financieras que operan con recursos financieros en los Mercados Financieros.

Se incluyen entre los instrumentos financieros derivados:

- las opciones
- contratos de futuros
- certificados (warrants)
- permutas financieras
- combinaciones entre títulos y diferenciales diversos, entre otros.

La ingeniería financiera se entiende, a menudo, como la manipulación de títulos derivados (con el fin de obtener beneficios y reducir los riesgos ocasionados por el carácter incierto de la situación del mercado en el futuro).

Los principales ingredientes de los mercados financieros son la moneda propia, las divisas de otros países, los metales preciosos, las cuentas bancarias, las obligaciones y las acciones.

Todos estos elementos se cotizan en Mercados Financieros, organizados o no, según existan unas normas para la negociación, o que éstas se hagan más libremente.

Para los empresarios es fundamental conocer la situación financiera de algunas empresas que emiten títulos, las cotizaciones de éstos en los mercados y la evolución de los precios.

La información sobre el estado global de la economía y de los mercados, se expresa mediante varios índices compuestos, generalizados, cosa que es importante para la buena marcha de la economía.

Existen diarios internacionales que publican en su sección "Índice del Mercado de Títulos" las actividades de los Mercados Financieros más importantes, entre ellos el Wall Street Journal y el Financial Times.

Nosotros tratamos de obtener la valoración de títulos en unos mercados financieros, donde no exista arbitraje. En primer lugar, establecemos modelos financieros y estocásticos con cobertura, en mercados completos e incompletos. Los títulos pueden ser de tipo Europeo o de tipo Americano, dependiendo de si el momento de su liquidación es la fecha de expiración o en cualquier momento anterior. Nos centraremos en la valoración de títulos Europeos en tiempo discreto y en tiempo continuo.

El primer intento hacia una descripción matemática de la evolución de los precios de la acción $S = (S_t), t > 0$, la hizo Louis Bachélier (en el mercado de París), sobre la base de conceptos probabilistas, en su tesis "*Théorie de la Spéculation*" (1900), donde propuso considerar $S = (S_t),\ t \geq 0$ como un proceso aleatorio.

Llegó a considerar: $S_t = S_0 + \mu t + \sigma w_t,, t \geq 0$ donde $w = (w_t)_{t \geq 0}$ es un proceso aleatorio aditivo, introducido por Bachélier.

La fórmula de Bachélier se adelantó a la de Black-Scholes y Merton (1973), quienes propusieron un movimiento Browniano geométrico

$$S_t = S_0 e^{\sigma w_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$$

La fórmula inicial de Black-Scholes nos proporciona el precio racional de una opción sobre una acción, en el caso de que ésta no reparta dividendos. Nosotros hacemos referencia a estudios posteriores que incluyen el reparto de dividendos.

Se estudian los contratos de futuros y los contratos a plazo, para su valoración.

Con respecto a los Mercados Financieros abordamos cuestiones como:

- ¿Qué pretendemos saber acerca de su Teoría y su práctica?
- ¿Cómo operan los mercados financieros en ambiente de incertidumbre?
- ¿Qué conceptos y teorías se han de usar para el cálculo?
- ¿ Se puede predecir el desarrollo futuro de los precios?
- ¿Cuáles son los riesgos de los distintos instrumentos financieros?

En nuestras descripciones de las evoluciones de los precios, y, valoración de los instrumentos financieros, operaremos en un mercado sin oportunidades de arbitraje. Matemáticamente, esta hipótesis económica significa que existe una medida de probabilidad conocida por martingala (neutral respecto al riesgo), tal que los precios actualizados de los títulos son martingalas respecto a ella. Esto, a su vez, nos da la oportunidad de aplicar la operatoria del cálculo estocástico para el estudio de la evolución de los precios.

La década de los 1920 se considera como el período de nacimiento de la Teoría financiera. El desarrollo posterior procedió a lo largo de dos enfoques: hipótesis de certidumbre y de incertidumbre. Respecto al primer enfoque tenemos los resultados de I. Fisher (1930), F. Modigliani y Merton Miller (1963), que buscaban soluciones óptimas para problemas de optimización de funciones de varias variables. En el segundo caso se ha de singularizar a H. Markowitz (1959) y a M. Kendall (1973).

El trabajo de Markowitz estableció una base para la teoría de la cartera de inversión, y se centró en la optimización de decisiones de inversión bajo incertidumbre. Aportó un método probabilista, que fue fundamental para la aportación posterior de W. Sharpe (1964) y S. Ross (1976), con sus teorías:

- CAPM – Capital Asset Pricing Model, (Modelo de Equilibrio de los Activos Financieros MEDAF) (Término introducido por el Prof. García Villalón)
- APT – Arbitrage Pricing Theory, (Teoría de la valoración mediante arbitraje)

Estas teorías se dirigen hacia la reducción de riesgos. Para tratar de cubrirse de los riesgos financieros se desarrollan sistemas de recogida de datos estadísticos, que sirven también para la predicción de los precios de mercado. Esta es la finalidad de la cobertura, un conjunto de técnicas que tienen en cuenta cambios aleatorios de los precios futuros y tienen por finalidad la reducción de los riesgos de posibles efectos desfavorables de estos cambios.

Las aportaciones de M. Kendall tratan de aclarar el comportamiento de los precios del mercado, cuestionándose cuáles son los procesos estocásticos asociados a su evolución. Con esto llegamos a la Teoría del Mercado de Capitales Eficiente. ECM (Efficient Capital Market).

En la década de los 30, varios estadísticos, entre ellos: A. Cowles (1933, 1944), H. Working (1934) y H. Jones (1937) se cuestionaron si son predecibles los movimientos de los precios, y cuáles son sus valores. Se llegó así al camino aleatorio (suma de variables aleatorias independientes), que finalizó con la creencia de que los precios tenían sus regularidades. Se llegó a la conclusión de que los logaritmos de los precios siguen un camino aleatorio.

Las aportaciones de H. Roberts (1959) y M. F. Osborne (1959) señalaban que estaban a favor del criterio del camino aleatorio asociado a los precios. Samuelson (1965) introdujo en la teoría y práctica de la financiación el movimiento Browniano geométrico. Fue esta conjetura la que dio lugar al concepto de mercado racional (o eficiente). Eficiencia significa aquí que el mercado responde eficientemente a la nueva información.

Es importante el concepto de información, pues la incertidumbre en el mercado está asociada a la aleatoriedad, dentro de un cierto espacio de probabilidad.

Otro trabajo en el que incidimos es en el de la diversificación de una cartera, de H. Markowitz (1959), que es un medio de disminuir los riesgos no sistemáticos de una cartera en función de la varianza o de la desviación típica, ya que los riesgos sistemáticos son inherentes al mercado.

Tratamos de obtener unos resultados generales para la valoración de modelos financieros estocásticos.

## 2. RELACIONES DE ARBITRAJE PARA LA VALORACION DE TITULOS DERIVADOS

Se ha considerado que los títulos derivados son los que han influido en el hundimiento de algunas corporaciones como Gibson, Proctor y Gamble & Barrings, entre muchas otras.

Un título derivado es un contrato financiero emitido sobre un activo financiero cuyo valor se deduce del activo subyacente, que puede ser una acción, una letra del Tesoro, divisas o incluso índices de un mismo título derivado. Entre los títulos derivados incluimos las opciones, los contratos de futuros y los contratos a plazo.

Los títulos derivados son criticados porque son instrumentos complejos y con un gran endeudamiento, lo que conduce a que cambios pequeños en el precio de los activos subyacentes puedan causar grandes alteraciones en el precio del derivado. Si no se es consciente de esta característica, se pueden obtener grandes pérdidas. Los títulos derivados son instrumentos excelentes para la especulación y para crear seguros; esta última característica se conoce como cobertura (hedging).

Antes de pasar a la valoración y cobertura de títulos derivados, describimos algunos de ellos (los más importantes) y desarrollamos también dos conceptos cuyo conocimiento es imprescindible para tratar con derivados financieros. Son estos: el arbitraje y la cobertura.

Existen dos clases de mercados; mercados organizados y no organizados. En los primeros se compravenden títulos, de acuerdo con unas normas, tanto para la negociación, como para la liquidación. En los mercados no organizados, a los que nos referimos a veces como el interbancario o mercado OTC (over the counter), la negociación es más libre, más a la carta, producto de un pacto entre mediadores e inversores.

En los mercados organizados se negocian dos tipos de títulos derivados -futuros y opciones-. Los contratos a plazo, por el contrario, se negocian en mercados no organizados y son acuerdos que consisten en comprar o vender una cantidad especificada de un activo a un precio prefijado con entrega en un momento y lugar establecido, precio conocido por precio de entrega. En el momento en que se emite el contrato, el precio de entrega es tal que el valor del contrato a plazo es cero. Esto se hace por convenio, de forma que no haya cambio de liquidez entre las partes que entran en el contrato.

Para formalizar este contrato contamos con dos parámetros que especificamos: el momento del contrato, $t$, la fecha de vencimiento o entrega, T y el precio a plazo que denotamos por $f(t,T)$.

Cuando se inicia el contrato, el precio a plazo, por definición, iguala al precio de entrega $K(t)$. El precio de entrega se fija durante la vida del contrato.

Los contratos de futuros son acuerdos que consisten en comprar o vender una cantidad especificada de un activo a un precio determinado y en un momento y lugar fijados. Las diferencias con los contratos a plazo son 4: los contratos de futuros permiten a los participantes que realicen ganancias o pérdidas en una base diaria y el precio de entrega se realiza mediante unas aportaciones durante la vida del contrato; los contratos de futuros son contratos estándar con respecto a la cantidad y calidad del activo que subyace en el contrato, en la fecha de vencimiento y lugar (si existe entrega física). Además, los contratos de futuros se liquidan a través de una cámara de compensación (Clearing House), que actúa como mediadora, por lo que se minimiza el riesgo de crédito. La cuarta diferencia es que los mercados de futuros están regulados mientras que los contratos a plazo no lo están.

Tenemos también los contratos de opciones, opciones de compra y opciones de venta, que son los derivados financieros más conocidos, donde las opciones de compra ofrecen el **derecho** a comprar y las de venta a vender.

Los parámetros a considerar en una opción son: la prima, el precio del subyacente ($S(t)$ si es una acción), el precio de ejercicio K y la fecha de vencimiento, T.

Hemos de considerar también las inversiones a tanto fijo, y estudiamos:

**Obligaciones-cupón-cero -** Una obligación que no paga intereses ni cupón durante su vida. Se compra a un precio inicial y los intereses obtenidos están determinados por el desembolso en la fecha de vencimiento. Sea un bono cupón cero que paga una unidad monetaria en $T(T \geq t)$. La relación entre los precios de los $B(t,T)$ el valor en t de bonos cupón cero y sus vencimientos (T) se denomina estructura a plazo de los tantos de interés.

Nuestro fin es usar argumentos de arbitraje para comprender la relación entre el precio a plazo y el precio al contado del contrato subyacente. Hemos de definir el concepto de arbitraje, que es el concepto clave para la mayoría de los resultados a obtener aquí. El arbitraje es una estrategia de negociación que no exige dinero efectivo, que tiene la posibilidad de hacer beneficios, sin riesgo alguno de pérdida, lo que se expresa por "free lunch with vanishing risk".

Si existen oportunidades de arbitraje, las actividades de los arbitrajistas (los que aprovechan las oportunidades de arbitraje) darán lugar, ocasionalmente, a que se ajusten los precios hasta que no sea posible el arbitraje. No se puede esperar que se logren oportunidades de arbitraje en mercados de capital que funcionan bien.

Desde el punto de vista económico, la existencia de oportunidades de arbitraje implica que la economía está en un desequilibrio económico, que es una situación en la que los negociadores están insatisfechos con sus composiciones de cartera actuales, y que negocian. Su negociación obliga a que cambien los precios, moviéndose hacia un nuevo equilibrio económico; en este equilibrio los negociadores deben estar satisfechos con sus carteras, por lo que ya no existen oportunidades de arbitraje. De otro modo, continuarían negociando y los precios se ajustarían hasta que se desvanezca la motivación de negociación. En síntesis, si los precios se generan mediante un equilibrio económico, entonces no hay oportunidades de arbitraje en la economía.

Si pretendemos obtener una teoría para la valoración de modelos financieros estocásticos, se ha de tener en cuenta que la calidad de cualquier teoría es un resultado directo de la calidad de las hipótesis subyacentes. Las hipótesis determinan el grado en que la teoría se ajusta a la realidad. Hemos de tener, pues, en cuenta las siguientes hipótesis:

1. No existen fricciones de mercado, o sea, no existen costes de transacción, ni diferenciales de precios de compra y venta, ni exigencias de pago de márgenes, ni restricciones a la venta en descubierto (que se puedan vender títulos que no se tienen) y no existen impuestos.

2. Los participantes en el mercado no corren el riesgo del otro contratante; los contratantes no dejarán impagados los contratos que asumen.

3. Los mercados son competitivos. Los participantes en el mercado actúan como precio-aceptantes y no tienen influencia sobre los precios.

4. Los participantes en el mercado prefieren más riqueza que menos.

5. Los precios se han establecido de forma que no existan oportunidades de arbitraje.

Pasamos ahora a usar argumentos simples de arbitraje para establecer resultados generales respecto a los precios de las opciones, sin hacer hipótesis explícitas acerca de la distribución de probabilidad que describe el valor futuro del activo subyacente. Se establecerán cotas superiores e inferiores para los precios de las opciones de compra y venta. Si el precio de una opción está fuera de estas cotas, indica una posible oportunidad de arbitraje. El objetivo principal de obtener estos resultados es mejorar nuestra comprensión de los contratos de opciones. Ahora, supondremos que el activo subyacente no emite flujos de caja, pero luego podemos generalizar al caso de que existan.

## 3. DINAMICA DEL PRECIO DEL ACTIVO

Se han obtenido cotas superiores e inferiores para los precios de las opciones usando argumentos simples de arbitraje. Aunque estas cotas limitan el precio de la opción, estos intervalos no pueden ser demasiado largos. Para valorar opciones más exactamente, hemos de hacer hipótesis adicionales respecto a la distribución de probabilidad asociada a los cambios posibles del activo subyacente.

Necesitamos un modelo para la evolución del precio del activo, un modelo que ha de ser sencillo para el análisis y complejo para ofrecer una aproximación razonable a la evolución actual de los movimientos del precio del activo. El modelo seleccionado es el de la distribución log-normal, que será el caballo de batalla para la valoración de opciones/futuros.

La subsiguiente distribución log-normal se utiliza en los modelos continuos de negociación y en su cálculo. Ahora bien, creemos que los modelos de negociación continuos (y su cálculo) son menos intuitivos que los modelos de negociación discreta (y el uso del álgebra), por lo que se introduce el modelo binomial, que opera en tiempo discreto. Si se construye cuidadosamente el modelo binomial, puede servir como aproximación a la distribución log-normal.

El modelo estándar que se usa en la economía financiera es la distribución log-normal para los rendimientos del precio de la acción, partiendo de hipótesis razonables sobre el comportamiento aleatorio de los rendimientos de una acción. Estas hipótesis caracterizan la distribución log-normal de un modo intuitivo. Esta intuición es importante porque la distribución log-normal es la base de la teoría siguiente. Partimos de que:

El precio futuro de una acción es incierto y muy difícil de predecir.

Se subdivide el tiempo en n subintervalos igualmente espaciados de longitud h.

Si denotamos por z(n) el rendimiento en el campo continuo respecto al último subintervalo, tenemos:

$$S(n) \equiv S(n-1)e^{z(i)} ,$$

definiendo z(n) por T = nh.

Repitiendo este análisis:

$$z(T) \equiv l[S(T) / S(0)]$$

El rendimiento continuo sobre la acción en el periodo [0,T] es la suma de rendimientos continuos en los n-subintervalos.

Se imponen ahora más hipótesis admisibles sobre las distribuciones de probabilidad asociadas a los rendimientos continuos de los subintervalos, con el fin de obtener un modelo simple y realista de la evolución de los precios de la acción. Partimos de varias hipótesis:

- Los rendimientos $\{z(j)\}$ están distribuidos independientemente.
- Los rendimientos $\{z(j)\}$ están idénticamente distribuidos.
- El rendimiento continuo esperado puede escribirse de la forma: $E[z(t)] = \mu.h.$, donde $\mu$ es el rendimiento esperado continuo por unidad de tiempo, que es independiente de la longitud del subintervalo h.
- La varianza del rendimiento continuo se puede escribir de la forma: $var[z(t)] = \sigma^2 h$ donde $\sigma^2$ es la varianza del rendimiento continuo por unidad de tiempo, que es independiente del subintervalo.

Dadas las 4 hipótesis anteriores, el rendimiento continuo en $[0,T]$ es:

$$E[z(T)] = \mu T$$

La varianza del rendimiento continuo en $[0,T]$ es:

$$var[z(T)] = \sigma^2 T$$

Las hipótesis 1 a 4 son hipótesis rigurosas e implican que para subintervalos de tiempo inifinitesimales la distribución sea normal con media $\mu h$ y varianza $\sigma^2 h$. Este resultado se basa en la teoría central del límite de la teoría de la probabilidad.

Mencionada la distribución log-normal para los movimientos del precio de la acción, consideramos el modelo binomial.

Se puede representar el precio de una acción al final de un período $S_1$, del siguiente modo:

$$S_1 = \begin{cases} U_0 S_0 & \text{si el movimiento del precio es ascendente} \\ D_0 S_0 & \text{si el movimiento del precio es descendente} \end{cases}$$

La hipótesis de que el precio de la acción puede tomar sólo uno de los dos valores posibles al final de cada intervalo es la hipótesis binomial. Puede suceder que sea posible tomar varios valores, lo que permitiría generalizar esto a varios periodos.

Se trata de ver como puede aproximarse el modelo binomial a la distribución log-normal. Esto se hace eligiendo las magnitudes ascendente y descendente de precios U y D, de un modo adecuado.

Como la representación binomial asume que, al final de cada intervalo, el rendimiento de la acción toma sólo uno de dos valores, tomemos la representación binomial como sigue:

$$l[S(t+1)/S(t)] = z(t) = \begin{cases} \mu h + \sigma\sqrt{h},\ p = \dfrac{1}{2} \\ \mu h - \sigma\sqrt{h};\ p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

El rendimiento esperado es:

$$E[z(t)] = (\mu h + \sigma\sqrt{h})\tfrac{1}{2} + (\mu h - \sigma\sqrt{h})\tfrac{1}{2} = \mu h$$

y la varianza es:

$$\mathrm{var}\left[z(t)\right] = (\sigma\sqrt{h})^2\,\tfrac{1}{2} + (-\sigma\sqrt{h})^2\,\tfrac{1}{2} = \sigma^2 h$$

Se conoce el rendimiento esperado por tendencia. La raíz cuadrada del término $\sigma^2$ se llama volatilidad $(\sigma)$.

La expresión del $l\left[S(t+1)/S(t)\right]$ satisface las hipótesis 1 a 4. En primer lugar , las z(t) son independientes y están idénticamente distribuidas, puesto que las probabilidades 1/2, la deriva $\mu$ y la volatilidad $\sigma$ no cambian con T. También se emplean las hipótesis 3 y 4.

El precio de la acción en t + 1 es:

$$S(t+1) = S(t)\begin{cases} e^{\mu h+\sigma\sqrt{h}} \text{ con prob } \tfrac{1}{2} \\ \\ e^{\mu h-\sigma\sqrt{h}} \text{ con prob } \tfrac{1}{2} \end{cases}$$

Tenemos entonces:

$$U = e^{\mu h+\sigma\sqrt{h}}$$

$$D = e^{\mu h-\sigma\sqrt{h}}$$

Como estamos sólo interesados en aproximar una distribución lognormal cuando h tiende a cero, mediante una distribución binomial, la representación de los movimientos del precio de la acción no está determinada de forma unívoca, sino que existen otros modos de representar los precios de la acción, que satisfagan las hipótesis 1 a 4.

**Ecuaciones diferenciales estocásticas como instrumento de valoración**

La representación de los precios de una acción, log-normalmente distribuidos, para la valoración de opciones, implica el conocimiento de la ecuación diferencial estocástica.

Un modo elegante de representar las hipótesis 1 a 4 para los rendimientos compuestos es:

$$z(t+1) = \left|\mu h + \sigma\Delta W(t)\right|$$

Donde $\Delta W_t$ es una variable aleatoria normalmente distribuida con media cero y varianza h. La ecuación anterior se expresa usualmente en función de los cambios del precio de la acción. Recordemos que, por definición:

$$z(t+1) = l\left(S(t+1)/S(t)\right)$$

con lo que podemos escribir:

$$S(t+1) = S(t) + S(t+1) - S(t) \equiv S(t) + \Delta S(t)$$

donde $\Delta S(t)$ denota el cambio del precio de la acción en el intervalo [t, t + 1]. Sustituyendo, esto da:

$$z(t+1) = l\left[1 + \Delta S(t)/S(t)\right] \simeq \frac{\Delta S(t)}{S(t)}$$

De aquí podemos escribir las hipótesis 1 a 4 como:

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \mu h + \sigma\Delta W_t$$

Para términos infinitesimales, la ecuación anterior se escribe de forma más general y abstracta, como sigue: $\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu[t, S(t)]dt + \sigma[t, S(t)]dW_t$, donde dS(t) representa el cambio en el precio de la acción desde t a t + dt, siendo dt un cambio infinitesimal en el tiempo; $\mu[t, S(t)]$ es el rendimiento instantáneo por unidad de tiempo; $\sigma[t, S(t)]$ es la desviación típica instantánea del rendimiento por unidad de tiempo y $dW_t$ es un movimiento Browniano. Un movimiento Browniano, por definición, es una variable aleatoria que está normalmente distribuida, con media cero, varianza dt que tiene incrementos independientes e idénticamente distribuidos. Obsérvese que, en esta forma general, tanto la media como la volatilidad, son funciones de t y del valor actual de la acción S(t). La expresión anterior es una ecuación diferencial porque el precio de la acción S(t) se define sólo implícitamente, describiendo sus cambios a lo largo del tiempo.

Hipótesis diferentes respecto a la forma de la volatilidad dan lugar a soluciones diferentes de S(t) para esta ecuación diferencial estocástica. La hipótesis estándar es suponer que $\mu$ y $\sigma$ son constantes. La solución de S(t) es una distribución lognormal.

Sintetizando, para valorar cualquier forma de derivado, necesitamos un modo de representar la evolución de los precios futuros de un activo.

Desarrollamos ahora el modelo de valoración binomial que ofrece una aproximación para comprender la valoración y cobertura de títulos derivados.

El modelo binomial supone que, al final de cada intervalo, el precio de la acción puede tomar dos valores posibles, por lo que la opción de compra tomará dos valores posibles. Se valorará la opción mediante una reproducción sintética. Es decir, para valorar la opción de compra, construimos una cartera de una acción y una inversión sin riesgo para reproducir el valor de la opción. Esta opción de compra sintética debido a la ausencia de arbitraje, ha de ser igual al precio de la opción de compra negociada. En otro caso, surgirían oportunidades de arbitraje. El procedimiento de la reproducción sintética no nos da sólo un modo de valorar opciones de compra, sino que ofrece un modo de establecer una cobertura.

La solución binomial para la valoración de opciones de compra nos aporta percepciones importantes para la valoración y cobertura de todos los títulos derivados. Si se comprende la lógica básica de esta solución, se comprenderá la lógica subyacente para la mayoría de los modelos de títulos derivados en uso actualmente. Se puede usar el modelo de valoración binomial para caracterizar los precios de futuros, para contratos de futuros emitidos sobre una acción. De algún modo, los contratos de futuros son los títulos derivados fundamentales hoy en día. Por tanto, el análisis de los contratos de futuros es muy importante.

Se ha visto cómo construir una opción sintética, usando una acción y la inversión sin riesgo. Con el fin de evitar el arbitraje, el coste de construir la opción sintética ha de ser igual al de la opción negociada. Con esto llegamos al principio de valoración neutral frente al riesgo.

Hacemos referencia aquí al delta de una opción, uno de los conceptos más importantes de la teoría. Consideremos la reproducción de una opción de compra Europea; el número de acciones del activo subyacente a usar en la cartera reproductora se conoce como el ratio de cobertura, mide la relación entre el precio de la prima de una opción y el precio de los contratos de futuros y es igual a la diferencia en el precio de la opción al final del periodo, dividido por la diferencia en el precio de la acción.

Se pueden usar los mismos argumentos de arbitraje para caracterizar los precios de futuros. Construimos una cartera reproductora, usando una acción y un activo sin riesgo para ajustar el valor y el flujo de caja (cash flow) de un contrato de futuros. Este contrato de futuros sintético tiene un precio cuyo valor ha de ser igual al precio de los futuros del contrato de futuros negociados. En otro caso, existirá oportunidad de arbitraje.

Los contratos de futuros son contratos para comprar o vender en una fecha y a un precio convenidos, llamados “fecha de ejercicio” y “precio de ejercicio” respectivamente. Al comienzo de cada período de negociación, se establece el precio del futuro de modo que el valor del contrato es cero. Al final del periodo de negociación, el contrato está marcado según el mercado (marked to market).

Ahora surge un concepto fundamental para la valoración de activos financieros en situación de ausencia de arbitraje, en cuyo caso se presentan probabilidades únicas, denominadas “probabilidades martingalas equivalentes”, que se pueden utilizar para valorar opciones y futuros.

En el modelo binomial se planteó la existencia de las medidas martingalas equivalentes, su unicidad y su importancia para valorar títulos derivados, ahora se pretende explicar que estos resultados son aplicables a economías más complejas que las del modelo binomial.

En el modelo binomial usamos el procedimiento de valoración neutral frente al riesgo, lo cual muestra que se puede determinar el valor de una opción calculando el valor futuro esperado de la opción usando las probabilidades martingalas equivalentes, y luego actualizando mediante el tanto de interés sin riesgo.

Tenemos:

$$c(t) = \frac{1}{R(h_t)}\left[ Mc(t+1)^{+} + (1-M)c(t+1)^{-} \right]$$

donde c(t) es el valor de la opción en t; $c(t + 1)^{+}$ es el valor de la opción en (t + 1) en el estado ascendente; $c(t + 1)^{-}$ es el valor de la opción en (t + 1) en el estado de precio descendente; M es la probabilidad martingala equivalente en el estado ascendente y $R(h_t)$ es el valor en (t+1) de la inversión en t de una unidad monetaria en el activo sin riesgo, con vencimiento $h_t$ .

## 4. LA TEORIA ECM (EFICIENCIA DE LOS MERCADOS DE CAPITAL)

La eficiencia significa que el mercado responde racionalmente a la información nueva. Esto implica que, en este mercado:

1) Las correcciones de los precios son instantáneas y el mercado está siempre en equilibrio, los precios son equitativos y no dan a los participantes ocasión de arbitraje; es decir, de obtener beneficios de los diferenciales de precios.
2) Los intermediarios son uniformes en su interpretación de la información obtenida y corrigen sus decisiones instantáneamente cuando pasan a disponer de nueva información.
3) Los participantes son homogéneos en sus objetivos; sus acciones (actividades) son colectivamente racionales.

Incidentalmente, en el aspecto formal del tema, el concepto de eficiencia debe considerarse dependiente de la naturaleza de la información que llega al mercado y a sus participantes.

Se distinguen usualmente 3 clases de informaciones accesibles:

1º Los valores pasados de los precios.

2º La información de carácter más amplio de los precios, contenida generalmente en fuentes accesibles (periódicos, boletines, etc).

3º Toda la información concebible, incluso información privilegiada.

Para una formalización conveniente de nuestro concepto de información, partimos de la hipótesis de que la incertidumbre en el mercado se puede describir como aleatoriedad, expresada en el contexto de cierto espacio de probabilidad $(\Omega, F, p)$. Como siempre, aquí:

$\Omega = \{W\}$ es el espacio de resultados de probabilidad.

F es un álgebra de subconjuntos de W.

p es una medida de probabilidad en $(\Omega, F)$.

Es conveniente dotar al espacio de probabilidad de una filtración $(F_t, t \geq 0)$, familia de $\sigma$-álgebras sobre $\Omega$ tal que $F_m \subset F_t$, para todo $0 \leq m \leq n$. Es decir, de una corriente creciente de información.

Interpretamos los sucesos en $F_n$ como la información accesible a un observador hasta el instante n.

En el cálculo estocástico se denominan espacios $(\Omega,F,p)=\left((F_n),p\right)$ con flujos distintos $F=(F_n)$, a un flujo de información. Usando este concepto podemos distinguir varias formas de mercados eficientes como sigue. Supongamos que hay 3 corrientes de $\sigma$-álgebras:

$$F^1=(F_n^1)\,;\; F^2=(F_n^2)\,;\; F^3=(F_n^3)$$

en $(\Omega,F,p)$, donde $F_n^1\leq F_n^2\leq F_n^3$ e interpretamos cada una de las $\sigma$-álgebras $F_n^i$ como los datos de la clase i-ésima que se presenta en el instante n.

¿Por qué creemos que es natural la conjetura de la propiedad martingala que es inherente al concepto de mercado eficiente?. Hay varias respuestas. La mejor explicación puede darse en el marco de la teoría de los mercados sin arbitraje, que asocia directamente la eficiencia de un mercado a la ausencia de oportunidades de arbitraje. En lo que sigue, la última propiedad da lugar a la aparición de las martingalas.

Para dar idea del modo en que aparecen las martingalas, presentamos los siguientes argumentos elementales.

Sea $S=(S_n)$ $n\geq 1$, donde $S_n$ es el precio de una acción en n. Sea

$$\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}},\; n\geq 1.$$

(donde $\Delta S_n=S_n-S_{n-1}$ es el cambio relativo de los precios).

El cambio relativo de los precios (el tanto de interés). Supongamos que el mercado está organizado de tal modo que, con respecto al flujo $F=(F_n)$ de datos accesibles, las variables $S_n$ son $F_n$-medibles y con probabilidad próxima a 1, $E(\rho_n|F_{n-1})=r$, para cierta constante r.

Por las dos últimas fórmulas:

$$S_n=(1+\rho_n)S_{n-1}\Rightarrow\frac{S_n}{S_{n-1}}=1+\rho_n\Rightarrow p_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}-1=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}}=\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}$$

y suponiendo $1+r\neq 0\Rightarrow S_{n-1}=\dfrac{E(S_n|F_{n-1})}{1+r}$ por hipótesis: $\Delta S_n=\rho_n S_{n-1},\; n\geq 1$.

Veamos también que, juntamente con una acción, consideramos una cuenta bancaria:

$$B=(B_n)\;\; n\geq 0$$

tal que:

$$\Delta B_n=rB_{n-1},\; n\geq 1$$

donde r es el tanto de interés de la cuenta y $B_0>0$.

Puesto que $B_n=B_0(1+r)^n$, de las relaciones anteriores tenemos:

$$\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}=E\left(\frac{S_n}{B_n}\Big|F_{n-1}\right)$$

Esto significa que la sucesión $\left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)$ para $n\geq 1$ es una martingala con respecto a la filtración:

$$F=(F_n)\;\text{para}\; n\geq 1.$$

Nuestra hipótesis anterior permite que $E\left(\rho_n \middle| F_{n-1}\right) = r$ con probabilidad próxima a 1 o $E\left(\rho_n \middle| F_{n-1}\right) < r$, ó $E\left(\rho_n \middle| F_{n-1}\right) > r$, por lo que los inversores encontrarán que es más beneficioso restringir su inversión a la cuenta bancaria o a la acción. Dicho de otro modo, si un título domina a otro, entonces el de menos valor desaparecerá rápidamente, como debe ser en un mercado bien organizado, en un mercado eficiente.

Consideremos ahora una versión más complicada de nuestro modelo $S_n = (1+\rho_n)S_{n-1}$, de la evolución de los precios de la acción.

Suponiendo que en "$n-1$" se compra una acción al precio $S_{n-1}$, y que se vende en "n" a un precio $S_n$; el beneficio bruto (que puede ser positivo o negativo) es $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$. Es más sensato medir el beneficio en valores relativos $\left(\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}\right)$, que en términos absolutos, $\Delta S_n$.

En aras a la brevedad, tenemos beneficios relativos en los rendimientos o en los coeficientes de crecimiento.

De acuerdo con nuestra interpretación de los rendimientos $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$, como beneficios de comprar en $n-1$ y vender en n. Supongamos ahora que tenemos una fuente adicional de ingresos, que suponemos que son $F_n$-medibles, e iguales a $\delta_n$ en el momento n.

Entonces, nuestros beneficios brutos totales son:

$$\Delta S_n + \delta_n$$

mientras que su valor relativo es:

$$p_n = \frac{\Delta S_n + \delta_n}{S_{n-1}}$$

Sería interesante tener una noción del posible modelo global de los precios ($S_n$), con tal de que el comportamiento local se describa por la expresión anterior. Para contestar a esta cuestión se han de hacer hipótesis acerca de $(p_n)$ y ($\delta_n$).

Suponemos, por ejemplo, que:

$$E(\rho_n | F_{n-1}) \equiv r \geq 0 \,,\ \forall_n \geq 1$$

Si, además, $E(S_n) < \infty$, y $E(\delta_n) < \infty$, entonces:

$$S_{n-1} = \frac{1}{1+r} E(S_n | F_{n-1}) + \frac{1}{1+r} E(\delta_n | F_{n-1})$$

donde $E(\cdot | F_{n-1})$ es una esperanza condicional.

De un modo similar:

$S_n = \frac{1}{1+r} E(S_n + 1 | F_n) + \frac{1}{1+r} E(\delta_{n+1} | F_n)$, lo que nos conduce a la igualdad:

$$S_{n-1} = \frac{1}{(1+r)^2} E(S_{n+1} | F_{n-1}) + \frac{1}{(1+r)^2} E(\delta_{n+1} | F_{n-1}) + \frac{1}{1+r} E(\delta_n | F_{n-1})$$

Seguidamente, veremos que:

$$S_n = \frac{1}{(1+r)k} E\left(S_{n+k} \middle| F_n\right) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(1+r)i} E\left(\delta_{n+i} \middle| F_n\right), \quad \forall k \geq 1 \text{ , y } \; n \geq 1 .$$

La clase de martingalas es amplia. Por ejemplo, contiene el camino aleatorio y, además, la propiedad martingala

$$E\left(X_n \middle| F_{n-1}\right) = X_{n-1}$$

muestra que, con respecto a las predicciones de los valores de los incrementos $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$, lo mejor que podemos sacar de los datos $F_{n-1}$, es que el incremento se anula en promedio (con respecto a $F_{n-1}$). Esto concuerda con nuestra percepción innata de que las ganancias condicionales $E(\Delta X_n | F_{n-1}) = 0$ en un mercado equitativo, bien organizado, que se puede interpretar como la imposibilidad de obtener beneficios sin riesgo. Fue en este contexto en el que Bachélier escribió "La esperanza matemática del especulador es cero".

Finalmente señalamos, como se muestra en el análisis empírico de la evolución del precio, que la autocorrelación de las variables

$$h_n = h\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right), \; n \geq 1$$

tiende a cero, lo que puede considerarse un argumento (aunque indirecto) a favor de la conjetura martingala.

## 5. DIVERSIFICACION DE MARKOWITZ

El trabajo de Markowitz fue decisivo para el desarrollo y práctica de la gestión y de la ingeniería financiera. El punto más atractivo para los inversores en su teoría fue la idea de la diversificación de una cartera de inversión, porque no demuestran simplemente una posibilidad teórica de reducir los riesgos de inversión (no sistemáticos), sino que dan recomendaciones de cómo lograr esto en la práctica.

El tema de la diversificación es un medio de reducción de los riesgos no sistemáticos a un nivel arbitrario bajo, medido en función de la varianza o de la desviación típica.

El fenómeno de la correlación negativa, conocido como fenómeno de Markowitz, es una de las ideas básicas de la diversificación de inversión: al construir una cartera de inversión se debe invertir en el mayor número posible de títulos no correlacionados.

El fenómeno de la ausencia de correlación indica que, en caso de inversión en títulos no correlacionados, su número N debe ser, lo más grande posible para reducir el riesgo (es decir, la varianza).

Si la covarianza entre los títulos es cero, entonces usando la diversificación, con N suficientemente grande, podemos reducir el riesgo de inversión a un nivel arbitrariamente bajo. Desgraciadamente, los títulos en un mercado tienen correlación positiva (cambian de un modo coordinado, en la misma dirección) y, por ello, la covarianza no tiende a cero cuando N tiende a infinito. El valor límite de la covarianza es justo, el riesgo sistemático (o de mercado), inherente al mercado en cuestión, que no puede reducirse por diversificación, mientras que los riesgos no sistemáticos se reducen por diversificación.

El concepto de mercado eficiente, como se ha visto, es la hipótesis de que los precios asimilan instantáneamente la información nueva y se establecen de un modo que no se proporciona la oportunidad de comprar barato y vender inmediatamente a un precio superior, o sea, que no hay oportunidades de arbitraje.

Se ha mostrado ya que la idea de un mercado equitativo, racionalmente organizado, aporta los precios normalizados de mercado, expresado mediante martingalas (con respecto a cierta medida equivalente a la medida de probabilidad inicial).

Los fundamentalistas toman sus decisiones considerando el estado de la economía a largo plazo, o de algunos de sus sectores; las perspectivas de desarrollo son de interés particular para ellos; construyen su análisis bajo la hipótesis de que las acciones de los agentes del mercado son racionales.

## 6. INCERTIDUMBRE E IRREGULARIDAD EN EL COMPORTAMIENTO DE LOS PRECIOS. SU DESCRIPCIÓN Y REPRESENTACIÓN EN TÉRMINOS PROBABILISTAS

Supongamos que medimos el tiempo en días n = 0,1,2... y sea $S = (S_n)$, $n \geq 0$ el precio de mercado de una acción, el tanto de cambio de dos divisas, u otro índice financiero (tiempo de vida ilimitado, en contraste a, por ejemplo, los precios de bonos). Un estudio empírico de $S_n$, $n \geq 0$, muestra que los precios varían de un modo altamente irregular.

Bachélier, como se ha dicho, fue el primero en describir los precios $(S_n)$, $n \geq 0$, usando los conceptos y los métodos de la teoría de la probabilidad, que ofreció una estructura para el estudio de los fenómenos empíricos, caracterizados, tanto por la incertidumbre estadística, como por la estabilidad de las frecuencias estadísticas.

Tomamos el enfoque estadístico y usamos la axiomática de A.N. Kolmogorov (1941) sobre la teoría de la probabilidad, que es generalmente aceptada ahora, suponiendo que nuestras consideraciones se llevan a cabo con respecto al espacio de probabilidad $(\Omega, F, p)$, donde:

- $\Omega$ es el espacio de sucesos elementales $\omega$ (situaciones del mercado).
- F es una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\Omega$.
- p es una probabilidad en F.

Se ha dicho ya que el tiempo y las evoluciones en el mismo, son partes integrantes de la teoría financiera. Por esta razón, parece válido definir nuestro espacio de probabilidad $(\Omega, F, p)$ más específicamente, suponiendo que tenemos una familia $F = (F_n)$ $n \geq 0$ de $\sigma$-álgebras, de modo que:

$$F_0 \subseteq F_1 \subseteq ... \subseteq F_n \subseteq ... \subseteq F$$

La razón de introducir esta familia de $\sigma$-subálgebras no decrecientes de F, que se conoce por filtración, es evidente mediante la interpretación siguiente:

$F_n$ es el conjunto de sucesos observables a lo largo del tiempo.

Se puede entender que $F_n$ es la información sobre la situación del mercado de que dispone un observador, hasta el momento "n" inclusive (en la estructura de un mercado eficiente, esto puede ser, por ejemplo, una de las tres $\sigma$-álgebras $F_N^1, F_N^2, F_N^3$.

Suponemos que nuestro modelo probabilista subyacente es un espacio de probabilidad filtrado

$$\left(\Omega, F, (F_n) n \geq 0, p\right)$$

que se llama también base estocástica.

En muchos casos parece razonable generalizar el concepto de base estocástica suponiendo que, en lugar de una medida única de probabilidad, tenemos una familia entera P = {ρ} de medidas de probabilidad (la razón es que a menudo es necesario singularizar una medida $\rho$). Usando la terminología de la Teoría de la decisión estadística, llamamos a la familia $\left(\Omega, F, (F_n)\ n \geq 0, P\right)$ experimento filtrado estocástico.

Considerando $F_n$ como la información accesible a la observación (inclusive hasta n), es natural suponer que $S_n$ es $F_n$-medible o que los precios se forman sobre la base de desarrollos observables en los mercados hasta n (inclusive).

Considerando que $S_n$ es el precio (por ejemplo de una acción) en el tiempo n, supongamos que $S_n \geq 0$, $n \geq 0$.

Los dos métodos corrientes para la presentación de los precios $S = (S_n)$ $n \geq 0$ son:

Primero, una fórmula similar a la fórmula del interés compuesto:

$$S_n = S_0 e^{Hn}$$

donde $H_n = h_0 + h_1 + ... + h_n$, con $h_0 = 0$ y las variables aleatorias $h_1 = h_n(W)$, $n \geq 0$, son $F_n$-medibles. De aquí:

$$H_n = l\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$$

y los rendimientos logarítmicos se pueden valorar mediante la fórmula:

$$h_n = l\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) = l\left(1 + \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}\right)$$

donde $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$.

Entonces podemos decir que el primer método para la descripción de los precios es la expresión exponencial

$$S_n = S_0 e^{Hn}$$

mientras que el segundo implica la exponencial estocástica: $S_n = S_0 \; E(\hat{H}_n)$, donde $\hat{H}_n = \sum_{1 \geq K \geq n} \left(e^{\Delta H_k} - 1\right)$.

Con el objeto de pasar a la valoración de modelos financieros, introducimos unas definiciones y unas notaciones siguiendo a Albert N. Shiryaev, en su libro "Essentials of Estochastic Finance".

**Definición** Decimos que una sucesión de variables aleatorias $X = (X_n)$, definida en la base estocástica, es una sucesión estocástica, si $X_n$ es $F_n$-medible $\forall n \geq 0$.

Para enfatizar la propiedad de ser medible se escriben las sucesiones estocásticas como: $X = (X_n, F_n)$, incorporando en la notación las $\sigma$-álgebras $F_n$, con respecto a las que son medibles las $X_n$.

**Definición** Decimos que una sucesión estocástica $X = (X_n, F_n)$ $n \geq 0$ es:

una martingala

una supermartingala

una submartingala

Si $E\left|X_n\right| < \infty$ $\forall n \geq 0$ y si con probabilidad próxima a 1

$$E\left(X_n \middle| F_{n-1}\right) = X_{n-1}$$

$$E\left(X_n \middle| F_{n-1}\right) \leq X_{n-1}$$

$$E\left(X_n \middle| F_{n-1}\right) \geq X_{n-1}$$

respectivamente, $\forall n \geq 1$

Se puede establecer claramente que $E(X_n)$ = constante para una martingala, que las esperanzas son no crecientes para una supermartingala $(EX_n \leq EX_{n-1})$ y que son no decrecientes para una submartingala $(EX_n \geq EX_{n-1})$.

Dotados con los instrumentos y el bagaje del cálculo estocástico, tratamos de construir modelos estadísticos, cuya elección es una tarea complicada.

La teoría general de Series Temporales tiene varios modelos lineales estándar, que suponemos estacionarios. Citamos algunos como el MA(q) (el modelo de media móvil de orden q, el AR(p) (el modelo autoregresivo de orden p), y ARMA(p,q) (el modelo autoregresivo mixto de media móvil de orden (p,q)).

Existen modelos estocásticos no lineales, gaussianos, cuyo origen está en la búsqueda de explicaciones de fenómenos diversos (que aparecen tanto en la estadística financiera como en la economía), tales como los saltos inesperados, entre otras cosas. No existe unanimidad con respecto a los modelos no lineales, pues los indicadores económicos tienen tendencia a fluctuar entre sí.

Contamos con muchos indicadores macroeconómicos (volúmenes de producción, consumo o inversión, el nivel general de precios, los tantos de interés, las reservas del gobierno, etc).

La consideración de muchos índices económicos puede marcar tendencias, pero el movimiento se puede acelerar o no; el crecimiento puede ocurrir en ciclos de clases. Así pues, un analista de datos estadísticos relativos a la economía financiera, se encuentra frente a un problema no lineal relativo a la elección del modelo correcto.

## 7. VALORACION DE MODELOS FINANCIEROS EN TIEMPO DISCRETO Y EN TIEMPO CONTINUO

La Teoría de H. Markowitz (1990), tal como se expresa en su “análisis de la media varianza”, logra una aproximación de los riesgos de la valoración de inversiones y la reducción de su componente no-sistemática, que se basa en la diversificación de la selección de una cartera de inversión óptima.

Otros problemas de optimización que surgen en la Teoría financiera pueden, en función de las incertidumbres del entorno, clasificarse entre los problemas de optimización estocástica. En primer lugar, se ha de mencionar que la financiación implica una serie de problemas de optimización que no son típicos ni tradicionales y que se refieren a la cobertura, a cómo cubrir los riesgos. No son típicos en el sentido de que la cobertura óptima, como un control que es, ha de verificar ciertas propiedades con probabilidad 1, en lugar de verificarlas en términos medios de probabilidad, como es usual en la optimización estocástica.

Nosotros consideramos la cobertura como un método de control dinámico de una cartera de inversión. Este método es crucial para valorar instrumentos financieros tales como opciones.

En relación con la valoración de contratos de opciones, la importancia de la cobertura como instrumento de protección ha influido en el desarrollo de sus métodos básicos.

Los problemas de esta clase tienen una relación directa con la valoración de opciones europeas. Según la idea de Black-Scholes y Merton, que dicen:

“en los mercados completos con ausencia de arbitraje, la evolución de los precios de la opción ha de ser reproducida por la evolución del valor de la estrategia de cobertura óptima en el correspondiente problema de inversión”.

Nos situamos en la posición de un inversor en el mercado financiero (en el mercado B-S), que puede:

1) Depositar dinero en una cuenta bancaria u obtener dinero de ella.
2) Comprar y vender acciones.

Supondremos que una transferencia de dinero de una cuenta a otra se puede hacer sin costes de transacción y que los activos son infinitamente divisibles, es decir, que el inversor puede comprar o vender cualquier fracción del activo y retirar o depositar cualquier cantidad de la cuenta bancaria.

Damos ahora algunas definiciones relativas a la posición financiera de un inversor en el mercado B-S y sus acciones.

Un mercado Black-Scholes cuenta con carteras formadas por una cuenta bancaria y una acción.

**Definición** Una sucesión estocástica predecible $\Pi = (\beta, \gamma)$ donde $\beta = (\beta_n(w))$ $n \geq 0$ y $\gamma = (\gamma_n^1, ... \gamma_n^d)$ con $\beta_n(w)$ y $\gamma_n^i(w)$, $F_{n-1}$-medibles, $\forall_n \geq 0$, e i = 1,2,...,d (hacemos $F_{-1} = F_0$**)** se denomina cartera de inversiones en el mercado B-S.

Si d = 1, escribimos $\gamma_n$ y $S_n$, en lugar de $\gamma_n^i$ y $S_n^i$.

Las variables $\beta_n(w)$ y $\gamma_n^i(w)$ pueden ser positivas, negativas o cero.

El valor de una cartera de inversiones $\Pi$ es la sucesión estocástica en:

$$X^{\Pi} = (X_n^{\Pi}) \ n \geq 0,$$

donde se describen

$$X_n^{\Pi} = \beta_n B_n + \sum_{i=1}^{d} \gamma_n^i S_n^i$$

y las ganancias de capital en la cartera de inversión por la sucesión.

$$G_n^{\Pi} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k$$

Deducimos que el valor de la cartera en n es.

$$X_n^{\Pi} = \Pi_0^{\Pi} + GX_n^{\Pi}$$

Decimos que una cartera de inversión es autofinanciadora si su valor:

$X^{\Pi} = (X_n^{\Pi})$ $n \geq 0$, se puede representar como sigue:

$$X_n^{\Pi} = X_0^{\Pi} + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \Delta \beta_k + \gamma_k \Delta S_k), \ n \geq 1$$

El hecho de ser una cartera autofinanciada es equivalente a la condición que describe las carteras admisibles:

$$B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n = 0, \ n \geq 1$$

lo que implica que el cambio del importe de la cuenta bancaria puede deberse solamente al cambio del paquete de títulos y viceversa.

**Definición** El precio de cobertura perfecta Europea de un título contingente $F_n$-medible, $f_N$, es la cantidad

$$C(f_N;P) = \inf \ \{x : \exists \Pi \text{ con } X_o^{\Pi} = x, \text{con } X_N^1 = f_N \text{ (probabilidad próxima a 1)}$$

Puesto que el mercado en cuestión está libre de arbitraje y es completo, por hipótesis:

1) Existe una medida martingala $\widetilde{P}$, equivalente a P, tal que la sucesión $\left(\frac{S_n}{B_n}\right) n \leq N$ es una martingala (Primer Teorema fundamental), y

2) Esta medida es única y se puede reproducir cada título contingente; es decir, existe una cobertura (perfecta) $\Pi$, tal que $X_w^{\Pi} = f_N$ (segundo teorema fundamental).

De aquí que si $\Pi$ es una cobertura perfecta $(x, f_N)$, es decir, si $X_0^{\Pi} = x$ y $X_N^{\Pi} = f_N$ (con probabilidad casi 1) entonces $\frac{f_N}{B_N} = \frac{X_N^{\Pi}}{B_N} = \frac{X}{B_0} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta\left(\frac{S_K}{B_K}\right)$ y, por ello, $\tilde{E}\frac{f_N}{B_N} = \frac{x}{B_0} \Rightarrow x = B_0 \tilde{E}\left(\frac{f_N}{B_N}\right)$

Obsérvese que el segundo miembro de la expresión anterior es independiente de la estructura $(x, f_N, \Pi)$ en cuestión. Dicho de otro modo, si $\Pi^1$ es otra cobertura, entonces los precios iniciales *x* y $x^1$ son el mismo.

De aquí obtenemos el resultado siguiente:

**Teorema** Fórmula Principal del precio de cobertura perfecto (Europeo) en mercados completos. El precio $c(f_N;\rho)$ de cobertura perfecta en un mercado completo libre de arbitraje se describe por la fórmula:

$$C(f_N;\rho) = B_0 \tilde{E}\left(\frac{f_N}{B_N}\right)$$

Al establecer la cobertura se debe conocer no sólo el precio $C(f_N;\rho)$ sino también la composición de la cartera que proporciona una cobertura perfecta. Un método estándar es:

- Se construye la martingala $\Pi = (\Pi_n, F_n, \tilde{\rho})$ $n \le N$ con $M_n = \tilde{E}\left(\frac{f_N}{B_N} \middle| F_n\right)$

Puesto que nuestro mercado es completo, se deduce del Segundo Teorema Fundamental, que $\Pi$ tiene una representación $\frac{S}{B}$

$$\Pi_n = \Pi_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta\left(\frac{S_K}{B_K}\right)$$

con $F_{K-1}$, $\gamma_k$ -medible.

Hacemos $\Pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$, donde $\gamma^*$ es igual a $\gamma = (\gamma_n)$ y $\beta_n * = \Pi_n - \frac{\gamma_n S_n}{B_n}$.

Es fácil de comprobar que esta es una cartera autofinanciadora. Luego, por construcción:

$$\frac{X_0^{\Pi^*}}{B_0} = \Pi_0 \text{ e } \Delta\left(\frac{X_n^{\Pi^*}}{B_n}\right) = \gamma_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) = \Delta M_n$$

De aquí, $\forall 0 \le n \le N$, tenemos: $\frac{X_n^{\Pi^*}}{B_n} = M_n = \tilde{E}\left(\frac{f_N}{B_N} \middle| F_n\right)$.

## 8. FORMULA DE VALORACION PRINCIPAL DE COBERTURA. MERCADOS INCOMPLETOS

El precio $C(f_N;\rho)$ de cobertura perfecta en un mercado completo sin arbitraje, tiene la siguiente expresión:

$$C(f_N;\rho) = B_0 \tilde{E}\left(\frac{f_N}{B_N}\right)$$

donde $\tilde{E}$ es una media con respecto a la (única) medida martingala $\tilde{P}$, tal que $\frac{S}{B}$ es una $\tilde{P}$-martingala.

Puede plantearse una cuestión similar de los precios de cobertura en un mercado incompleto. Sin embargo, no necesariamente existe una cobertura perfecta autofinanciadora en tal mercado, por lo que debemos modificar nuestra definición del precio de cobertura hacia una clase en cierto modo más amplia que las estrategias autofinanciadoras a las que nos adherimos en caso de un mercado completo.

Recordemos que el valor $X^{\Pi}$ de una estrategia autofinanciadora $\Pi = (\beta, \gamma)$ en un mercado completo puede definirse de dos modos: o escribimos

$$X_n^{\Pi} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$$

con

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0 \text{ , ó } X_n^{\Pi} = X_0^{\Pi} + \sum_{k=1}^{n}\left(\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k\right)$$

La representación anterior es más conveniente en cierto sentido para visualizar las dinámicas del crecimiento del capital: $X_0^{\Pi}$ es la acción del capital inicial en $X_n^{\Pi}$, mientras que

$$\Delta X_n^{\Pi} = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n$$

es el incremento.

En el caso de cobertura en un mercado incompleto, parece razonable considerar, junto con la cartera $\Pi = (\beta, \gamma)$ el proceso de consumo $C^1 = (C_n)$ $n \geq 0$, que es un proceso no negativo, no decreciente con $C_n$ $F_n$ medible y $C_0 = 0$, y, en particular,

$$X_N^{\Pi^*} = f_N(\widetilde{\rho}) \text{ (prob. próxima a 1).}$$

Así pues, la cartera $\Pi^*$ construida sobre la base de la representación $\frac{S}{B}$, es una cobertura perfecta.

Podemos sintetizar los resultados anteriores como sigue:

**Teorema** (Fórmulas Principales para una cobertura perfecta y su valor).- En un mercado completo arbitrario, sin arbitraje, existe una cobertura perfecta autofinanciadora $\Pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ con capital inicial

$$X_0^{\Pi^*} = C(f_N; p) = B_0 \widetilde{E}\left(\frac{f_N}{B_N}\right)$$

que replica fielmente $f_N$:

$$X_N^{\Pi^*} = f_N \text{ (probab. próxima a 1)}$$

Las evoluciones (dinámicas) del capital $X_n^{\Pi^*}$ se describen por las fórmulas:

$$X_n^{\Pi^*} = B_n \widetilde{E}\left(\frac{f_N}{B_N} \middle| F_n\right) \text{ “ } 0 \leq n \leq N \text{ ;}$$

Siendo los componentes $\gamma^* = \left(\gamma_n^*\right)$ las mismas que en la representación $\frac{S}{B}$

$$\widetilde{E}\left(\frac{f_N}{B_N} \middle| F_n\right) = \widetilde{E}\frac{f_N}{B_N} + \sum_{k=1}^{n}\gamma_k^* \Delta\left(\frac{S_K}{B_K}\right) \quad 1 \leq n \leq N$$

y los componentes $\beta^* = (\beta_n^*)$ pueden definirse por la condición

$$X_n^* = \beta_n^* B_n + \gamma_n^* S_n$$

Ya se ha mencionado que, en general, no existe la cobertura perfecta en los mercados incompletos, es decir, no existe cobertura $\Pi = (\beta, \gamma)$ tal que $X_N^\Pi = f_N$ (con probabilidad próxima a 1). Esto no afecta a la posibilidad de que modificando nuestra definición de estrategia admisible podamos alcanzar el nivel del capital de desembolso final, $f_N$.

**Teorema** (Fórmula principal del precio de cobertura Europea en mercados incompletos). Sea $f_N$ una función acotada no negativa, $F_N$-medible. Entonces, en un mercado incompleto sin arbitraje, el precio $C^*(f_N; \rho)$ puede calcularse por la fórmula:

$$C^*(f_N; p) = \sup \cdot B_0 E\tilde{\rho}\left(\frac{f_N}{B_N}\right) \quad \tilde{\rho} \leftarrow P(\rho)$$

donde $E\tilde{\rho}$ es un promedio con respecto a $\tilde{\rho}$.

**CONCLUSIONES**

Se han analizado algunas materias que hemos considerado necesarias para los interesados en el cálculo estocástico y la valoración en modelos de mercados financieros en ambiente de incertidumbre. Para lograrlo, se han mencionado los principales conceptos y resultados de la matemática financiera estocástica.

Asimismo, se han desarrollado aplicaciones de estos resultados a diversas clases de cálculos necesarios en el campo financiero.

Todo ello, puede ser de interés para introducir en los programas de enseñanza universitarios relativos a la matemática financiera con un enfoque estadístico matemático moderno.

Dada la limitación de espacio existente, los contratos a plazo y contratos de futuros se presentan en un anexo.

**ANEXO**

Incorporamos en este anexo diversos métodos de valoración, verdaderamente importantes, pero que se encuentran en la mayoría de los libros de Estocástica. Nosotros seguimos las líneas de A.N. Shiryaev en su libro “Essentials of Stochastic Finance”.

**Contratos a plazo y contratos de Futuros**

Trataremos de ver cómo valorar los contratos a plazo y contratos de futuros, instrumentos de inversión importantes usados en los mercados financieros junto con las opciones.

Los contratos a plazo y de futuros son contratos de venta para algún activo que ha de entregarse en un instante específico en el futuro, a un precio especificado.

Existe, como hemos visto, una distinción esencial entre futuros y contratos al contado, aunque ambos son contratos de venta.

Supongamos que el precio de mercado del activo en cuestión se puede definir por una sucesión estocástica $S = (S_K)\, K \leq N$, donde N es la fecha de madurez del contrato, que podemos identificar con el instante de entrega.

Realmente, si el trato se realiza en N, cuando el precio de mercado del activo es $S_N$, entonces para cualquier definición razonable del contrato a plazo, el precio del futuro debe ser igual a $S_N$. Otra cosa es si el contrato se vende en n < N; la cuestión crucial aquí es cómo debemos entender el precio justo del contrato (en un mercado sin arbitraje).

Para formalizar el tema, consideremos el esquema de un mercado de B-S (Black-Scholes), donde $B = (B_n)$ es una cuenta bancaria y $S = (S_n)$ es el activo negociado.

Consideraremos el caso con dividendos, cuando el valor $X = (X_n^{\Pi})\ n \leq N$ de la estrategia del comprador $\Pi = (\beta, \gamma)$ se describe por la fórmula:

$$X_n^{\Pi} = \beta_n B_n + \gamma_n \Delta D_n \tag{1}$$

y sus cambios se describen como sigue:

$$\Delta X_n^{\Pi} = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta D_n \tag{2}$$

donde $\gamma_n$ es el número de unidades del activo comprado y $D = (D_n, F_n)\ n \leq N$, $D_0 = 0$, es el proceso (no necesariamente positivo) de todos los dividendos conectados al activo S.

Describimos ahora la estructura de los dividendos en los casos de un contrato al contado o de futuros y hallamos los precios justos de estos contratos.

Supongamos que se vende un contrato al contado en *n* y que ambas partes están de acuerdo en base a la información $F_n$ que el precio de entrega del activo $F_n(N)$.

Entonces, por la misma mecánica de los contratos a plazo, los dividendos totales (positivos o negativos) pueden presentarse como sigue:

$$D_K = 0 \text{ “ } n \leq K \leq N$$

y

$$D_N = S_N - F_n(N)$$

De (1) y (2), obtenemos:

$$\Delta \frac{X_K^{\Pi}}{B_N} = \gamma_K \frac{\Delta D_K}{B_K}$$

y, por ello:

$$\frac{X_N^{\Pi}}{B_N} = \frac{X_n^{\Pi}}{B_n} + \sum_{k=n+1}^{N} \gamma_K \frac{\Delta D_K}{B_K}, \quad n < N$$

Para un contrato a plazo emitido en *n*, podemos hacer $\gamma_K = 0$ para $K \leq n$, y, $\gamma_k = \gamma_{n+1}$, para $K \geq n+1$, donde $\gamma_{n+1}$ es el número de unidades del activo *S*, del contrato.

De la expresión anterior, tenemos:

$$\frac{X_N^{\Pi}}{B_N} = \frac{X_n^{\Pi}}{B_n} + \gamma_{n+1} \frac{S_N - F_n(N)}{B_N}$$

y llegamos inmediatamente a la siguiente conclusión.

Supongamos que el mercado (B,S) en consideración es completo y libre de arbitraje. Sea $\tilde{P}$ la única medida martingala tal que $\left(\frac{S_n}{B_n}\right)$ en una martingala respecto a ella. Supongamos también que los precios $F_n(N)$, $F_n$-medibles satisfacen la relación:

$$E_{\tilde{p}}\left(\frac{S_N - F_n(N)}{B_N}\middle| F_n\right) = 0\ , \quad n \leq N$$

es decir, sea

$$F_n(N) = \frac{E_{\tilde{p}}\left(\frac{S_N}{B_N}\middle| F_n\right)}{E_{\tilde{p}}\left(\frac{1}{B_N}\middle| F_n\right)}$$

Entonces:

$$E_{\tilde{p}} = \frac{X_N^{\Pi}}{B_N} = E_{\tilde{p}}\ \frac{X_n^{\Pi}}{B_n}$$

de modo que el contrato a plazo vendido en n al precio $F_n(N)$ , está definido por $F_n(N)$ .

Nuestra hipótesis acerca de un mercado (B,S) sin arbitraje nos da la igualdad:

$$E_{\tilde{p}}\left(\frac{S_N}{B_N}\middle| F_n\right) = \frac{S_n}{B_n}$$

Vemos que los precios al contado sin arbitraje $F_n(N)$ se pueden definir como sigue:

$$F_n(N) = \frac{S_n}{E_{\tilde{p}}\left(\frac{B_n}{B_N}\middle| F_n\right)}\ , \quad n \leq N$$

**Valoración de Modelos Financieros Estocásticos en tiempo continuo**

Citamos aquí los métodos más importantes.

a) **Fórmula de Bachélier** Aun cuando nos referimos aquí a los modelos de valoración en tiempo continuo, este tema se relaciona con la dimensión del tema en tiempo discreto.

L. Bachélier fue la primera persona que describió las dinámicas de los precios de la acción usando modelos basados en el camino aleatorio y sus casos límite, es decir el movimiento Browniano.

Suponiendo que las fluctuaciones de los precios son similares al movimiento Browniano, Bachélier llevó a cabo cálculos para los precios (racionales) de algunas opciones negociadas en Francia en su tiempo y comparó sus resultados con los precios del mercado actual.

La fórmula:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t\ , \quad \tau \leq T$$

donde $W = (W_t)\, t \geq 0$ es un proceso de Wiener en algún espacio de probabilidad $(\Omega, F, p)$.

En este modelo, los precios pueden tomar valores negativos, por lo que no reflejan la vida real. Sin embargo, podemos decir que fue el primer modelo de difusión, además de ser un modelo sin arbitraje y completo.

**Teorema** (Fórmula de Bachélier). El precio racional $C_T = C(F_T; p)$ de la opción de compra Europea estándar con función de pago $f_T = (S_T - K)^+$ está definido por la fórmula:

$$C_T = (S_0 - K)\ \phi\left(\frac{S_0 - k}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0 - k}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

donde

$$\varphi(\aleph) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-x^2/2} \text{ “ } \phi(\aleph) = \int_{-\infty}^{\aleph} \varphi(y)dy$$

**Fórmula de Black-Scholes**

Como se ha mencionado, la deficiencia principal del modelo de Bachélier fue que los predios $S_t$, asumen valores negativos.

Un modelo más realista es el obtenido a través de un movimiento Browniano geométrico (o económico), en el que los precios de los activos con $S_0 =$ precio actual del activo subyacente, K = precio de ejercicio, T = fecha de maduración, se expresan por la fórmula:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \sigma^2/2\right)^{t + \sigma Wt}}$$

usando la fórmula de Itô vemos que:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma W_t), \text{ o, } \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma s dW_t$$

que pone de relieve la analogía con la fórmula

$$\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} = \mu + \sigma E_n$$

usada en el modelo de Cox-Ross y Rubinstein en el caso discreto.

El modelo de un movimiento Browniano geométrico lo sugirió P. Samuelson en 1965.

**Teorema** (Fórmula de Black-Scholes) El precio racional $C_T = C(f_T, p)$ de una opción de compra Europea (estándar) con función de pago $f_T = (S_T - K)^+$ está dado por la fórmula:

$$C_T = S_0\phi\left(\frac{L\frac{S_0}{K} + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\phi\left(\frac{L\frac{S_0}{K} + T\frac{r - \sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

En particular, para $S_0 = K$ y r = 0 , tenemos:

$$C_T = S_0\left[\phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - \phi\left(\frac{-\sigma\sqrt{T}}{2}\right)\right] \text{ , y si } T \to 0$$

$$C_T \sim K\sigma\sqrt{\frac{T}{2\Pi}}$$

El valor de una opción de venta sería:

$$P_t = -S_0\left[1-\phi\left(\frac{L\frac{S_0}{K}+T\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)+Ke^{-rT}\left[1-\phi\left(\frac{L\frac{S_0}{K}+T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]\right]$$

Si $S=(S_t)\ t\geq 0$ es el precio de mercado de la acción.

Si se tiene en cuenta el reparto de dividendos, el capital $S=(S_t)\ t\geq 0$ del accionista se supone que evolucionará siguiendo la fórmula:

$$d\left(\frac{\tilde{S}_t}{B_t}\right)=d\left(\frac{S_t}{B_t}\right)+\frac{\delta S_t dt}{B_t}$$

aquí $\delta\geq 0$ es un parámetro referente al tanto de los dividendos. Si $B_t=1$, se deduce que:

$$d\tilde{S}_T = dS_t + \delta S_t dt$$

de modo que el incremento en el tiempo *dt* del capital del accionista es la suma del incremento $dS_t$ en su precio de mercado y de los dividendos $\delta S_t dt$ , proporcional a $S_t$ .

.

Puesto que $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ y

$$d\left(\frac{S_t}{B_t}\right)=\frac{S_t}{B_t}\left((\mu-r)dt+\sigma dW_t\right)$$

Llegamos, en definitiva, al siguiente teorema:

**Teorema** Los precios racionales $C_T(\delta;r)$ y $P_T(\delta;r)$ de opciones de compra y venta en el caso de pagos de dividendos se describen por las fórmulas:

$$C_T(\delta;r)=e^{-\delta T}C_T(0;r-\delta) \text{ y}$$

$$P_T(\delta;r)=e^{-\delta T}P_T(0;r-\delta)$$

**Valoración de una opción en un mercado de bonos**

Nos referimos en este caso al mercado de bonos (B,P), que consiste en una cuenta bancaria $B=(B_t), t\leq T$ y un bono de madurez T con precio descrito por un proceso (positivo) $P=\left(p(t,T)\right)t\leq T$, que satisface la condición P(T,T) = 1.

Nuestra descripción del mercado del bono (B,P) se basa en una aproximación indirecta, donde suponemos que el estado de la cuenta bancaria $(B_t)\ t\leq T$ puede expresarse por la fórmula

$$B_t = B_0 e^{\int_0^t r(s)dS}$$

con algún proceso estocástico de tanto de interés $r=r(t)\ t\leq T$ .

En cuanto a la dinámica del proceso del precio del bono $P=\left(P(\tau,T)\right)\tau\leq T$ suponemos que los precios actualizados

$$\overline{P}(t,T) = \frac{P(t,T)}{B_t}, t \leq T$$

constituyen una martingala con respecto a la medida inicial sobre $(\Omega, F_T, (F_t)\ t \leq T)$.

Tenemos: $$P(t,T) = C\left( e^{-\int_t^T r(s)ds} \right)(F_t)$$

y que el mercado de bonos en cuestión está libre de arbitraje.

Nuestra hipótesis principal acerca de este proceso en que es un proceso de difusión Gauss-Markov descrito por la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = (\alpha(t) - \beta(t))r(t)dt + \gamma(t)dW_t$$

con proceso de Wiener $(W_t)t \leq T$ y la condición inicial (no aleatoria) $r(0) = r_0$. Suponemos que las funciones $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y $\gamma(t)$ son determinísticas y que:

$$\int_0^T \left(|\alpha(t)| + |\beta(t)| + \gamma^2(t)\right)dt < \infty$$

Bajo estas hipótesis la ecuación diferencial tiene una solución única (fuerte)

$$r(t) = g(t)\left\{ r_0 + \int_0^t \frac{\alpha(s)}{g(s)}ds + \int_0^t \frac{\gamma(s)}{g(s)}dW_s \right\}$$

donde

$$g(t) = 1 - \int_0^t \beta(s)g(s)\,ds$$

## REFERENCIAS


BÀCHELIER, L. (1900): Thèorie de la Spéculation, **Annales Scientifiques de L'Ecole Normale Supèrieure**, 3eme. Series 17, 339-353.

BJÖRK, T. (1998): **Arbitrage Theory in Continuous Time**, Oxford University Press, Oxford.

BLACK, F. and N. SCHOLES (1973): "The pricing of options and corporate liabilities", **J. Political Econ.**, 81, 637-659.

BRACE, A. and M. MUSIELA (1994): "A Multifactor Gauss-Markov Implementation of H.J.M.", **Math. Finance**, 4, 127-153.

DUFFIE, A. (1996): **Dynamic Asset Pricing**, Princeton University Press, Princeton.

FISHER, Y. (1930): **The Theory of Interest**, McMillan, London.

HO, T. and S. LEE (1986): "Term structure movement and pricing interest rate contingent claim", **J. of Finance**, 41, 1011-1029.

HULL, J. (1993): **Options, futures and other derivatives**, 2nd Editions, Prentice Hall, N. Jersey.

JARROW, R. and S. TURNBULL (1995): **Derivative Securities**, Southwest Publishers, Cleveland.

KARATZAS, I. and S.E. SHREVE (1998): "Methods of Mathematical Finance", **Series Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability**, Springer, Berlin.

KENDALL, M. (1973): **Time Series**, Griffin, London.

KOHLMAN, M. and S. TANG (2001): “Mathematical Finance”, **Workshop of the Mathematical Finance Research Project**, Konstanz, Germany, october 5-7, 2000. Series Trends in Mathematics, Birhauser, Boston.

MARKOWITZ, H. (1959): **Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investment**. J. Wiley.

MERTON, R.C. (1973): “Theory of Rational Option Pricing”, **Bull. J. of Econom Manag. Sc**., 4, 141-183.

MODIGLIANI, F. and M. MILLER (1963): “Corporate income taxes and the cost of capital”, **Amer. Econom. Rev**., 53, 261-277.

MUSIELA, M. and M. RUTKOWSKI (1997): **Martingale methods in financial modeling**, Springer, Berlin.

OSBORNE, M.F.M. (1959): “Brownian motion in the stock market, **Oper. Res**., 7, 145-173.

ROSS, S.A. (1976): “The arbitrage theory of capital asset pricing”, **J. Econom. Theory**, 13, 341-366.

SAMUELSON, P.A. (1965): **Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly and Manag. Rev**., 6, 41-50.

SHARPE, W.F. (1964): “Capital asset prices: a theory a market equilibrium under conditions of risk”, **J. Finance**, 19, 425-442.

SHIRYAEV, A.N. (2000): “Essential of Stochastic Finance, facts, models, theory”, **Worlds Sc. Publishers House**, Singapore.