SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE TRANSPORTE DE MÚLTIPLES PRODUCTOS: UNA APROXIMACIÓN CON PROGRAMACIÓN META

José G. Hernández R.[1], Universidad Metropolitana, Escuela de Ingeniería de Sistemas, Caracas Venezuela
María J. García G.[2], Minimax Consultores C.A., Gerencia General, Caracas, Venezuela

RESUMEN
La vasta cantidad de modelos, para resolver el problema de transporte de un solo producto, permite afirmar que éste es quizás uno de los problemas, de investigación de operaciones, más estudiado, pero no sucede lo mismo con el caso de múltiples productos. Si bien se ha estudiado el caso donde, asimilando el problema de múltiples productos al de un solo producto, se ha centrado la investigación en un planteamiento formal del problema de transporte múltiple, y sólo se han sugerido algunos métodos de solución, para casos especiales, que permitan alguna simplificación. Ubicados en esta situación, en esta investigación se persigue como objetivo, presentar un modelo de solución al problema de transporte de múltiples productos, donde no se limite sólo a casos especiales, sino que sea capaz de resolver el problema considerando diferentes factores, y donde se haga uso de la programación meta.

Palabras claves: Modelos de transporte, transporte múltiple, programación meta, sistemas de apoyo a la toma de decisiones.

ABSTRACT

The coarse amount of models, to solve the transportation problem of a single product, allows to affirm that this is one of the more studied problems, of research operations, but it does not happen the same to the case of multiple products. Although the case has studied where, assimilating the multiple product transportation problem to the one of a single product, the investigation has been centered in a formal exposition of the multiple product transportation problem, and some methods of solution have been suggested, only for special cases, that allows some simplification. Located in this situation, in this investigation it is persecuted like objective, to present a model of solution to the multiple product transportation problem, where it is not limited only to special cases, but that it is able to solve the problem considering different factors, and where it becomes use of the global programming.

Key words: Transportation models, multiple product transportation, global programming, decision support systems.

MSC: 90B06

1. INTRODUCCIÓN

Aunque en el quehacer empresarial, es posible que se encuentre con más frecuencia el problema del transporte de múltiples productos, en todos los libros de texto y literatura especializada sobre modelos de transporte, se hace referencia al problema de un solo producto, y muy pocas veces se menciona el caso de múltiples productos.

En el mundo empresarial, muchos directivos y sus asesores en modelos matemáticos, quienes tienen que trabajar con el transporte de múltiples productos, deben hacer simplificaciones, tales como considerar todos sus productos como uno solo, lo que en muchas ocasiones no tiene ningún sentido práctico.

Por este motivo, ha surgido la inquietud de investigar sobre este tema, con el objetivo final de conseguir una solución sencilla, que pueda ser llevada a la práctica. En este aspecto, ya se han hecho algunos avances, como es el planteamiento formal del problema y, el ofrecer algunas soluciones, sobre todo, cuando es permitida alguna simplificación, que pueda convertir el problema en un caso particular.

Email: [1]jhernandez@unimet.edu.ve
[2]MJGarcia.Mínimax@mercaglob.com

Pero se sigue sin tener una solución robusta, que sea capaz de resolver el problema en cualquier momento y contemplando la presencia de diferentes factores, que puedan afectar la solución.

Dado que por otra parte se tiene cierta experiencia con el manejo de la programación meta, y conocida su sencillez, se planteó la posibilidad de darle una solución a este interesante problema haciendo uso de dicha técnica, quedando así definido el objetivo de esta investigación, el cual se puede enunciar: crear un modelo para resolver el problema de transporte de múltiples productos, contemplando la presencia de diferentes factores que puedan afectar la solución y haciendo uso de la programación meta.

Al enunciar el objetivo general, lleva implícito los objetivos específicos de la investigación, que son: realizar el planteamiento del modelo del transporte de múltiples productos incluyendo dentro de las variables relevantes otros factores, además de los diferentes tipos de productos en sí, que puedan afectar su solución, y analizar la aplicabilidad de la programación meta, para finalmente, haciendo uso de ella, resolver el problema planteado.

La metodología para alcanzar este objetivo será el método científico aplicado a la investigación de operaciones, donde lo primero es definir el problema, tal como se enunció en los objetivos, que se acaban de presentar. Seguidamente se hará la búsqueda de datos, para establecer las metas a ser usadas, esto llevará a definir alternativas, que consistirá en buscar las prioridades y ponderaciones de las distintas desviaciones y su inserción en las metas, que permitan resolver el problema del transporte de múltiples productos.

Siguiendo lo establecido en los objetivos, se completarán las últimas etapas que son: evaluar las alternativas y seleccionar la mejor, para luego presentarla en sus detalles y analizar sus posibles soluciones, a través de un ejemplo, lo que sería equivalente a establecer controles.

Con respecto a las limitaciones, en cierta manera ya quedan establecidas al presentar los objetivos, ya que se desea un modelo con sentido práctico, que facilite, a quienes tengan que trabajar con el transporte de múltiples productos, el manejo del problema, que los ayude en su toma de decisiones, aunque se presenten diferentes factores que la afecten, y que haga uso de la programación meta.

En todo caso, como premisa del grupo de investigación, el producto a obtener debe tener como característica su sencillez, de manera tal que no sea necesario ser un experto en modelos matemáticos, para su manejo.

2. EL MODELO DE TRANSPORTE DE MÚLTIPLES PRODUCTOS

Al hablar del modelo de transporte, sólo se tratará de establecer un lenguaje común, en cuanto a nomenclatura y por supuesto se partirá de la referencia que representa el transporte de un solo producto, siguiendo un trabajo anterior (Hernández & García, 2001).

Aunque cada autor usa su respectiva nomenclatura, la definición presentada es similar en la vasta literatura sobre este tema (Garfinkel & Nemhauser, 1972; Hillier & Lieberman, 1997; Levin & Kirkpatrick, 1983;
Mathur & Solow, 1996; Murty, 1976; Phillips, Ravidran & Solberg, 1976; Taha, 1998; Thierauf & Grosse, 1981; Winston 1994), haciendo mención a variables que se representan, en forma genérica, a través de Xij, que se leerían, cantidad de mercancía que se despacha de la fuente i al destino j, y a costos representados cij, los cuales serán el costo unitario de la mercancía que va desde la fuente i al destino j. Dicho lo anterior, se deduce el modelo general de transporte, para un solo producto, el cual persigue como objetivo minimizar los costos. Resultando para n fuentes y m destinos:

$$\text{Min } \Sigma_{i=1,n} \Sigma_{j=1,m} \text{ cij} * \text{Xij} \qquad \text{(Ec. 1)}$$

Sujeto a:

$$\Sigma_{j=1,m} \text{ Xij} = \text{fi} \quad \text{con i} = 1,\text{n} \qquad \text{(Ec. 2)}$$

$$\Sigma_{i=1,n} \text{ Xij} = \text{dj} \quad \text{con j} = 1,\text{m} \qquad \text{(Ec. 3)}$$

$$\Sigma_{i=1,n} \text{ fi} = \Sigma_{j=1,m} \text{ dj} \qquad \text{(Ec. 4)}$$

$$\text{Xij} >= 0, \text{ para toda i, y toda j.} \qquad \text{(Ec. 5)}$$

La expresión uno (Ec. 1), representa el objetivo, minimizar los costos totales de transportar la mercancía desde las distintas fuentes a los diferentes destinos. Las ecuaciones dos (Ec. 2) y tres (Ec. 3), representan el equilibrio en las fuentes y los destinos respectivamente, es decir de una fuente sale lo que se produce, y a un destino llega lo que se demanda. La ecuación cuatro (Ec. 4) representa que el problema está balanceado, el total que se produce en las fuentes es igual, a todo lo demandado en los destinos. Y la expresión cinco (Ec. 5), simplemente garantiza que todas las variables tienen un sentido físico real, al ser todas positivas.

Atendiendo al modelo previamente presentado, es eficiente representar el problema de transporte de un solo producto a través de la tabla del modelo de transporte, tal como se ilustra en la Tabla I. En esta tabla, se considera una primera fila para identificar los destinos, y sus respectivas demandas, dj, y cada una de las siguientes filas representarán las fuentes y su capacidad de producción, fi, las cuales se muestran en la primera columna. En las cuadrículas centrales de la matriz, cada galera estará formada por dos elementos: Xij y cij, es decir la cantidad de mercancía que sale de la fuente i al destino j, y su costo unitario.

Tabla I. Tabla del problema de transporte para un solo producto.

	d1	**d2**	**...**	**dm**
f1	X11 \ c11	X12 \ c12		X1m \ c1m
f2	X21 \ c21	X22 \ c22		X2m \ c2m
…			…	
fn	Xn1 \ cn1	Xn2 \ cn2		Xnm \ cnm

Como, a la hora de resolver el problema, se tendrán n * m variables, donde sólo m + n – 1 de ellas serán variables básicas, los métodos para resolver el problema son métodos de dos fases, pero dado que están ampliamente discutidos en la literatura (Gomes, 2001; Hillier & Lieberman, 1997; Larrañeta, 1977; Levin & Kirkpatrick, 1983; Mathur & Solow, 1996; Phillips, Ravidran & Solberg, 1976; Taha, 1998; Thierauf & Grosse, 1981; Winston 1994), no se comentarán en este trabajo, y a continuación se pasará a revisar el modelo de múltiples productos.

En este caso se tienen n fuentes (1, 2,..., i, ...,n), que en forma independiente, pueden enviar K productos (a, b,..., k), que serán recibidos por m diferentes destinos (1, 2, ..., j, ..., m).

El problema del transporte múltiple quedaría reducido a calcular el costo mínimo total, bajo el cual se pudiese satisfacer todos los destinos en cada uno de los productos demandados, de acuerdo a lo que recibirían desde cada fuente.

Y de nuevo haciendo analogía con el problema de transporte de un solo producto, y tal como se ha presentado en trabajos anteriores (Cartusciello & Díaz 2001, Hernández & García 2001), se llegaría al modelo general:

$$\text{Min } \Sigma_{i=1,n} \Sigma_{j=1,m} \Sigma_{k=1,K} \text{ cijk * Xijk} \qquad \text{(Ec. 6)}$$

Sujeto a:

$$\Sigma_{j=1,m} \text{ Xijk = fik} \qquad \text{con k = a, …, K, para i = 1,n} \qquad \text{(Ec. 7)}$$

$$\Sigma_{i=1,n} \text{ Xijk = djk} \qquad \text{con k = a, ..., K, para j = 1,m} \qquad \text{(Ec. 8)}$$

$$\Sigma_{i=1,n} \text{ fik} = \Sigma_{j=1,m} \text{ djk} \qquad \text{para k = a, ..., K} \qquad \text{(Ec. 9)}$$

$$\text{Xijk >= 0,} \qquad \text{toda i, toda j, y toda k.} \qquad \text{(Ec. 10)}$$

En este caso, como ya se indicó, se tienen K productos: a, b,...,K, y en forma genérica, desde las n fuentes i, se enviarán los K productos k, a los m destinos j. Lo que permite que la estructura del modelo de transporte de un solo producto se mantenga, sólo que en la ecuación seis (Ec. 6), de los costos a minimizar, las variables, Xijk, tienen un subíndice adicional el k, que representa a los distintos productos, así como los costos unitarios que ahora serán cijk, representando el costo de enviar el producto k, desde la fuente i al destino j.

Con respecto a las ecuaciones siete (Ec. 7) y ocho (Ec. 8), cada una de ellas, ahora, representa una agrupación mayor de ecuaciones, así Ec. 7, representa n * K ecuaciones, que sería la multiplicación de las K ecuaciones que produce cada uno de los productos k, por las n ecuaciones al repetirse la misma situación en las n fuentes i. Y la Ec. 8, representaría m * K ecuaciones, de nuevo la multiplicación de las K ecuaciones que produce cada uno de los productos k, pero ahora, por cada una de los m destinos j.

Igualmente, la ecuación nueve (Ec. 9), representa K ecuaciones, ya que sería el balance para cada uno de los k productos en forma independiente. En cuanto a la ecuación diez (Ec. 10), excepto el nuevo subíndice k, sigue teniendo el mismo sentido, de mantener positivas las diferentes variables.

Este modelo, se puede llevar a una tabla de transporte, muy similar a la Tabla I, del transporte de un solo producto, tal como se muestra en la Tabla II.
Aquí, sobre cada una de las columnas, se han colocado las demandas dja, djb,...,djk, e igualmente con las fuentes, en cada fila se ha colocado la capacidad de producción de la respectiva fuente en cada uno de los productos fia, fib...,fik. Y en el cuerpo de la matriz, no aparece un solo costo unitario y una sola variable, sino que para cada galera, se tendrá un conjunto de variables Xija, Xijb,...,Xijk, y sus costos asociados cija, cijb,...,cijk.

Tabla II. El problema de transporte para múltiples productos.

	d1a d1b ... d1k	d2a d2b ... d2k	... ...	dma dmb ... dmk
f1a f1b ... f1k	\c11a, c11b, ...,c11k X11a, X11b, ..., X11k	\c12a, c12b, ...,c12k X12a, X12b, ..., X12k	...	\c1ma, c1mb, ...,c1mk X1ma, X1mb, ..., X1mk
f2a f2b ... f2k	\c21a, c21b, ...,c21k X21a, X21b, ..., X21k	\c22a, c22b, ...,c22k X22a, X22b, ..., X22k	...	\c2ma, c2mb, ...,c2mk X2ma, X2mb, ..., X2mk
... ...	...	...	...	...
fna fnb ... fnk	\cn1a, cn1b, ...,cn1k Xn1a, Xn1b, ..., Xn1k	\cn2a, cn2b, ...,cn2k Xn2a, Xn2b, ..., Xn2k	... ...	\cnma, cnmb, ...,cnmk Xnma, Xnmb, ..., Xnmk

Ahora bien, aunque las estructuras sean equivalentes, es evidente que no se puede resolver el problema de transporte de múltiples productos, con los mismos algoritmos que se usan para resolver el problema de un solo producto.

Sin embargo, si se observan los detalles del modelo expresado por las ecuaciones, seis a diez (Ec. 6 a Ec. 10), se notará que sigue siendo un problema de programación lineal, por lo cual se debe poder resolver el mismo, con el uso del método Simplex. El cual, tal como se dijo para un solo producto, pudiese resultar no eficiente.

3. LOS MODELOS DE LA PROGRAMACIÓN META (PM)

El modelo para la programación meta (PM), aunque con frecuencia tratado en la literatura, resulta algo confuso e incluso se podría hablar de dos versiones del mismo, por una parte se tiene un grupo de autores (Davis & McKeown, 1984; Martín & Martín, 1997) que, además de las desviaciones, incluyen las prioridades y las ponderaciones en la función objetivo, quedando la expresión como se representa en la ecuación once (Ec. 11). Mientras otros autores (Caires & Rosales 2001; Prawda 1977), sólo incluyen las desviaciones, tal como se ve en la ecuación doce (Ec. 12), e incluso está el caso intermedio, (Ignizio 1976; Moskowitz & Wright 1982), que sólo incluyen las desviaciones y las ponderaciones, como se observa en la ecuación trece (Ec. 13).

En el resto del modelo, algunos más explícitos otros menos, tal como se observa en las ecuaciones catorce (Ec. 14) a dieciséis (Ec. 16), se suelen manejar las restricciones intrínsecas del problema, las restricciones generadas por las metas y las restricciones de signo.

$$\text{Min } \Sigma_{p=1,P}\, P_p\, (\Sigma_{i=m+1,m+M}\, (w_i^+ d_i^+ + w_i^- d_i^-)) \qquad \text{(Ec. 11)}$$

$$\text{Min } \Sigma_{i=m+1,m+M}\, di^+ + di^- \qquad \text{(Ec. 12)}$$

$$\text{Min } \Sigma_{i=m+1,m+M} (w_i^+ d_i^+ + w_i^- d_i^-) \qquad \text{(Ec. 13)}$$

Sujeto a:

$$\Sigma_{j=1,n} aij\ Xj <= bi \quad \text{con } i = 1,m \qquad \text{(Ec. 14)}$$

$$\Sigma_{i=1,n} aij\ Xj + di^- - di^+ = mi \quad \text{con } i = m + 1, m + M \qquad \text{(Ec. 15)}$$

$$Xj, di^+, di^- >= 0, \text{ para toda i, y toda j.} \qquad \text{(Ec. 16)}$$

Donde: p, que varía desde 1 hasta P, representa las prioridades de las desviaciones en las metas, las cuales en la práctica no pueden ser muchas, estando generalmente entre dos y cinco, recomendándose no sobrepasar nunca este último valor.

d_i^+ y d_i^- representan las desviaciones positivas y negativas, respectivamente en cada una de las M metas i, que van desde i igual m + 1 hasta m + M.

w_i^+ y w_i^- representan las ponderaciones o pesos, de cada una de las desviaciones positivas y negativas, respectivamente, en cada una de las prioridades, por lo cual el w_i será cero si la correspondiente desviación no está manejada con esa prioridad.

Xj, son las n variables intrínsecas del problema.

a_{ij} son los coeficientes tecnológicos, que miden la influencia de cada una de las n variables Xj tanto en las m restricciones, como en las M metas i.

bi son los términos independientes en las m restricciones explícitas del problema.

mi son los valores asignados a las M metas del problema

Es decir, dependiendo del autor, usará (Ec. 11), (Ec. 12) o (Ec. 13), para expresar la función objetivo, la cual siempre será de minimización, y donde el fin último es minimizar el efecto global, de las desviaciones de interés, de acuerdo a las ponderaciones y prioridades establecidas para cada meta. Mientras la ecuación catorce (Ec.14), representa el conjunto de las restricciones intrínsecas del problema, donde sólo se consideran las del tipo menor o igual, ya que las restantes es conveniente convertirlas en metas. La ecuación quince (Ec. 15), justamente representará este conjunto de metas, cada una con sus respectivas desviaciones, positiva y negativa. Finalmente la ecuación dieciséis (Ec. 16), se encarga de garantizar que todas las variables involucradas en el problema, tanto las desviaciones, como las originales sean positivas, para que tengan sentido físico.

Evidentemente la ambigüedad comentada sólo es aparente y en el caso de los autores que toman la versión más explícita lo que buscan es la visualización de la tabla de resolución, de una manera más sencilla.

4. EL MODELO DE PM PARA EL PROBLEMA DE TRANSPORTE MÚLTIPLE

Conociendo que los modelos de programación meta se manejan a través de desviaciones, que conforman las metas, de acuerdo a las prioridades y ponderaciones que reciban, a continuación se pasará a definir el conjunto de metas que pudiesen ser utilizadas para resolver el problema de transporte múltiple, para luego establecer cuales serían las desviaciones a contemplar, con sus respectivas prioridades y ponderaciones, en el caso de existir.

Meta de costo. Sin perder generalidad, se puede hacer una primera aproximación sin tomar en cuenta los costos de producción, ni de almacenaje por parte del productor, por lo cual la meta de costo vendría dada sólo por los costos inherentes al transporte de la mercancía. Y se podrá expresar:

$$\Sigma_{i=1,n} \Sigma_{j=1,m} \Sigma_{k=1,K} C_{i,j,k} * X_{i,j,k} + d1^- - d1^+ = m1 \qquad \text{(Ec. 17)}$$

Donde $X_{i,j,k}$ será la variable cantidad del producto k, que va desde la fuente i al destino j; $C_{i,j,k}$, será el costo unitario asociado al transporte de esta mercancía; m1 el valor de la primera meta, y $d1^-$ y $d1^+$, representan las desviaciones negativas y positivas respectivamente, relativas a la primera meta. De esta meta (m1), sólo se minimizará la desviación positiva, $d1^+$.

Meta de disponibilidad en la fuente. En realidad se trata de n metas tipo dos, una para cada fuente. Aunque se pueden manejar como restricciones intrínsecas del problema, ya que se fija como meta, para cada fuente, la capacidad de dicha fuente, es preferible tratarlas como meta, para mantener una mayor flexibilidad. Su expresión:

$$\Sigma_{j=1,m}\ \Sigma_{k=1,K}\ X_{i,j,k} + d2i^{-} - d2i^{+} = m2i \text{ con } i = 1,2, \ldots, n \qquad \text{(Ec. 18)}$$

Donde $X_{i,j,k}$ sigue siendo la variable cantidad del producto k, que va desde la fuente i al destino j; m2i la capacidad de la fuente i, y $d2i^{-}$ y $d2i^{+}$, representan las desviaciones negativas y positivas respectivamente, relativas a cada una de las fuentes i. De estas metas (m2i), sólo se minimizará la desviación positiva, $d2i^{+}$, ya que no se admitirá que de una fuente salga más de lo permitido por su capacidad.

Aunque en las dos restricciones anteriores no sea notorio, la variable k, que contabiliza los distintos productos, en el modelo de metas, para facilitar su comprensión, ahora se trabaja numéricamente, k = 1,2,...,K, en lugar de hacerlo en forma literal, k = a, b,...,K, como se hizo al presentar el problema de transporte de múltiples productos.

Meta de demanda del destino. En este caso se trata de m * K metas tipo tres, K para cada uno de los m destinos. Los valores de cada una de las m3jk metas vendrán dadas por la demanda del respectivo producto k en el respectivo destino j. La expresión quedará:

$$\Sigma_{i=1,n}\ X_{i,j,k} + d3jk^{-} - d3jk^{+} = m3jk \text{ con } j = 1,2, \ldots, m \text{ y } k = 1,2, \ldots, K \qquad \text{(Ec. 19)}$$

Donde $X_{i,j,k}$ sigue siendo la variable cantidad del producto k, que va desde la fuente i al destino j; m3jk la demanda del producto k en el destino j, y $d3jk^{-}$ y $d3jk^{+}$, representan las desviaciones negativas y positivas respectivamente, relativas a cada uno de los k productos, en los diferentes destinos j. De estas metas (m3jk), sólo se minimizarán las desviaciones negativas, $d3jk^{-}$, ya que no se desea que el destino reciba menos de lo demandado, de cada uno de los productos.

Son estas m * K metas de las demandas en los destinos, las que le dan mayor sentido al modelo, ya que sería sumamente complicado manejarlas a través de alguna modificación de las tablas del problema de transporte. Sin embargo, el modelo, permite agregar otras metas, tal como se indican a continuación, que le dan mayor flexibilidad, a la vez que concreción a los posibles resultados, aspectos que serían prácticamente imposible manejar con tablas de transporte modificadas.

Entre otras posibles, sólo a manera de ilustración se presentan: meta de rentabilidad, meta de atención a clientes de mayor interés, clientes atendidos desde fuentes escogidas:

Meta de rentabilidad. Se trata de maximizar los beneficios por la operación, aceptando que cada producto k, que se entrega desde una fuente i a un destino j, tiene asociado un beneficio unitario bijk. Muy similar a la meta de costos, se puede expresar:

$$\Sigma_{i=1,n}\ \Sigma_{j=1,m}\ \Sigma_{k=1,K}\ bijk * X_{i,j,k} + d4^{-} - d4^{+} = m4 \qquad \text{(Ec. 20)}$$

Donde manteniendo la simbología ya presentada, de esta meta (m4), sólo se minimizará la desviación negativa, $d4^{-}$, ya que si se obtiene un beneficio mayor del deseado no suele ser un inconveniente.

Meta de atención a clientes de mayor interés. Ya sea por rentabilidad, por volumen de compras, por razones sociales, o cualquier otra razón pertinente, suelen haber clientes que se desean atender con cierta prioridad, sobre todo cuando surge alguna escasez, o algún otro inconveniente. A través de metas creadas para ello se puede manejar esta situación. En este caso pudieses ser una sola meta que maneje todos los clientes relevantes o un conjunto de metas que maneje cada uno de estos clientes por separado o en pequeños grupos, de acuerdo a la jerarquía de su interés. Ilustrándolo a través de una sola meta, la expresión quedaría:

$$\Sigma_{i=1,n}\ X_{i,j,k} + d5jk^{-} - d5jk^{+} = \Sigma_{j=1,mj}\ \Sigma_{k=1,Kk}\ m5jk \text{ con } j = 1,2, \ldots, mj \text{ y } k = 1,2, \ldots, Kk \qquad \text{(Ec. 21)}$$

Donde se mantendrá la simbología ya explicada, sólo que mj, representará el subconjunto de interés de los m destinos, mientras Kk, será el subconjunto de interés de los K productos, donde no necesariamente todos los destinos privilegiados deben escoger los mismos productos. Por su parte la doble sumatoria al lado derecho de la ecuación representa el conjunto de la demanda de los clientes de mayor interés, donde m5jk, a lo igual que m3jk, representa la demanda del producto k en el destino j, y $d5jk^-$ y $d5jk^+$, representan las desviaciones negativas y positivas respectivamente, relativas a la sumatoria de estas demandas. De nuevo, de estas metas (m5jk), sólo se minimizará la desviación negativa, $d5jk^-$, ya que no se desea que el destino reciba menos de lo demandado, de cada uno de los productos.

Meta de clientes atendidos de fuentes escogidas. Ya sea por falta de entendimiento con alguna fuente, por calidad, rentabilidad, o por cualquier otra razón, puede haber clientes que se desean atender desde ciertas fuentes escogidas. Similar a lo presentado con la meta anterior, a través de metas creadas para ello, se puede manejar esta situación. En este caso pudiese ser una sola meta que maneje todos los clientes o un conjunto de metas que maneje cada uno de estos clientes por separado o en pequeños grupos, de acuerdo a las exigencias de los mismos. Ilustrándolo a través de una sola meta, la expresión quedaría:

$$\Sigma_{i=1,nn} X_{i,j,k} + d6jk^- - d6jk^+ = \Sigma_{j=1,mj} \Sigma_{k=1,Kk} \ m6jk \text{ con } j = 1,2, \ldots, mj \text{ y } k = 1,2, \ldots, Kk \qquad \text{(Ec. 22)}$$

Donde se mantiene todo lo explicado en la meta anterior, sólo que adicionalmente para las fuentes sólo se trabajará con el subconjunto nn de las escogidas. De nuevo m6jk, a lo igual que m5jk y m3jk, representa la demanda del producto k en el destino j, y $d6jk^-$ y $d6jk^+$, representan las desviaciones negativas y positivas respectivamente, relativas a la sumatoria de estas demandas. De nuevo, de estas metas (m6jk), sólo se minimizará la desviación negativa, $d6jk^-$, ya que no se desea que el destino reciba menos de lo demandado, de cada uno de los productos.

Para completar el modelo, sólo falta establecer las prioridades, y las ponderaciones, en caso de existir, y construir así la función objetivo.

En un principio, se pudiese pensar que la primera prioridad la deberían tener la meta de disponibilidad en la fuente, y la meta de demanda del destino, ya que ellas en sí son restricciones del problema, las cuales debe evitarse violarlas, sin embargo, al existir metas que privilegian a clientes o a fuentes, estas deberían tener primera prioridad. Por lo cual, en orden de importancia, para la primera prioridad se debe tener: meta de disponibilidad en la fuente, meta de clientes atendidos de fuentes escogidas y meta de atención a clientes de mayor interés.

En la segunda prioridad quedarían sólo las metas de demandas de los destinos, y como tercera prioridad, y de nuevo respetando el orden de importancia, quedarían la meta de costos y la meta de rentabilidad.

Por supuesto los coeficientes de ponderación que sería necesario usar en las prioridades uno y tres, vendrían dados por el problema en sí.

En resumen el modelo quedaría:

$$\text{Min } Zo = P_1 (w_{2i}^+ * d_{2i}^+ + w_{6jk}^- * d_{6jk}^- + w_{5jk}^- * d_{5jk}^-) + P_2 (w_{3jk}^- * d_{3jk}^-) + P_3 (w_1^+ * d_1^+ + w_4^- * d_4^-) \qquad \text{(Ec. 23)}$$

Sujeto a:

$$\Sigma_{i=1,n} \Sigma_{j=1,m} \Sigma_{k=1,K} C_{i,j,k} * X_{i,j,k} + d1^- - d1^+ = m1 \qquad \text{(Ec. 17)}$$

$$\Sigma_{j=1,m} \Sigma_{k=1,K} X_{i,j,k} + d2i^- - d2i^+ = m2i \text{ con } i = 1,2, \ldots, n \qquad \text{(Ec. 18)}$$

$$\Sigma_{i=1,n} X_{i,j,k} + d3jk^- - d3jk^+ = m3jk \text{ con } j = 1,2, \ldots, m \text{ y } k = 1,2, \ldots, K \qquad \text{(Ec. 19)}$$

$$\Sigma_{i=1,n} \Sigma_{j=1,m} \Sigma_{k=1,K} \ bijk * X_{i,j,k} + d4^- - d4^+ = m4 \qquad \text{(Ec. 20)}$$

$$\Sigma_{i=1,n} X_{i,j,k} + d5jk^- - d5jk^+ = \Sigma_{j=1,mj} \Sigma_{k=1,Kk} \ m5jk \text{ con } j = 1,2, \ldots, mj \text{ y } k = 1,2, \ldots, Kk \qquad \text{(Ec. 21)}$$

$$\Sigma_{i=1,nn} X_{i,j,k} + d6jk^- - d6jk^+ = \Sigma_{j=1,mj} \Sigma_{k=1,Kk} \ m6jk \text{ con } j = 1,2, \ldots, mj \text{ y } k = 1,2, \ldots, Kk \qquad \text{(Ec. 22)}$$

$$Xi,j,k,\ di^+,\ di^- >= 0, \text{ para toda i, y toda j.} \qquad \text{(Ec. 16)}$$

En este caso el modelo obtenido no está manejando restricciones intrínsecas, pero de existir sólo habría que añadirlas, en todo caso al resolver el modelo se obtendrán los valores que tomaría cada una de las variables $X_{i,j,k}$, es decir la cantidad de cada producto que debería salir desde cada fuente a cada destino.

5. ILUSTRACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO

Para ilustrar el modelo, se hará un ejemplo hipotético, muy sencillo, que permita visualizar los resultados del mismo, pero sin presentar todas las complejidades de un caso real, lo que escaparía, sobre todo por extensión, a los alcances de este trabajo.

Como se ve en la Tabla III, se van a suponer tres fuentes: F1, F2 y F3, capaces de producir tres productos: K1, K2, y K3, con dos destinos: D1 y D2, y un tercer destino especial D3, el cual, supóngase un hospital, debe ser atendido con prioridad del tercer producto (K3).

Tabla III. De capacidades, demandas y costos del ejemplo hipotético.

Fuentes	Destinos →	D1	D2	D3
	Capacidad	Demanda		
	k1=	100	150	200
	k2 =	250	300	350
	k3 =	300	250	200
	Costo de enviar el producto k de la fuente i al destino j			
F1	k1= 140	1	2	3
	k2 = 300	1	2	3
	k3 = 260	1	2	6
	Total = 750			
F2	k1 = 150	4	5	4
	k2 = 320	4	5	4
	k3 = 240	4	5	8
	Total = 710			
F3	k1 = 160	3	2	1
	k2 = 330	3	2	1
	k3 = 230	3	2	2
	Total = 710			

Los beneficios unitarios son $b_{k1} = 10$, $b_{k2} = 15$ y $b_{k3} = 20$, sin importar la fuente que los produzca. Por otra parte se asume que el segundo destino (D2), no quiere ser atendido desde la fuente uno (F1), mientras el destino uno (D1), desea ser atendido desde la fuente tres (F3). Como se puede ver en la tabla III, los costos de una fuente i a un destino j, son iguales para todos los productos, excepto el tercer producto (k3), cuando va al tercer destino (D3), en cuyo caso vale el doble. Adicionalmente, en la Tabla IV, se presentan los valores para las diferentes metas.

Tabla IV. Valores de las metas para el caso hipotético.

Meta	Valor de la meta
De costo	16000
Disponibilidad en la fuente	Las capacidades de la Tabla III
Demandas de los destinos	Demandas en los destinos de la Tabla III
De rentabilidad	40000
De atención a clientes de mayor interés	
Para D3	Demanda de k3 = 200 (Tabla III)
De clientes atendidos de fuentes escogidas	
Para D2	X121 + X122 + X123 = 0
Para D1	Σ Xi1k = 0 Para i = 1,2 y k = 1,2,3 X31k = d3k, con k = 1,2,3

Con todos estos valores el modelo quedará:

$$\text{Min } Zo = P_1(17(d2_1t^+ + d2_2t^+ + d2_3t^+) + 16(d2_{11}^+ + d2_{12}^+ + d2_{13}^+ + d2_{21}^+ + d2_{22}^+ + d2_{23}^+ + d2_{31}^+ + d2_{32}^+ + d2_{33}^+) + 11(d6_{2k}^+ + d6_{1k}^+ + d6_{11}^- + d6_{12}^- + d6_{13}^-) + 7(d5_{33}^-)) + P_2 (d3_{11}^- + d3_{12}^- + d3_{13}^- + d3_{21}^- + d3_{22}^- + d3_{23}^- + d3_{31}^- + d3_{32}^- + d3_{33}^-) + P_3 (5\, d1^+ + 3\, d4^-) \quad \text{(Ec. 24)}$$

Sujeto a:

Meta costos:

$$X_{111} + X_{112} + X_{113} + 2 X_{121} + 2 X_{122} + 2 X_{123} + 3 X_{131} + 3 X_{132} + 6 X_{133} + 4 X_{211} + 4 X_{212} + 4 X_{213} + 5 X_{221} + 5 X_{222} + 5 X_{223} + 4 X_{231} + 4 X_{232} + 8 X_{233} + 3 X_{311} + 3 X_{312} + 3 X_{313} + 2 X_{321} + 2 X_{322} + 2 X_{323} + X_{331} + X_{332} + 2 X_{333} + d1^- - d1^+ = 16000 \quad \text{(Ec. 25)}$$

Metas de disponibilidad en las fuentes:

$$X_{111} + X_{112} + X_{113} + X_{121} + X_{122} + X_{123} + X_{131} + X_{132} + X_{133} + d2_1t^- - d2_1t^+ = 750 \quad \text{(Ec. 26)}$$
$$X_{111} + X_{121} + X_{131} + d2_{11}^- - d2_{11}^+ = 140 \quad \text{(Ec. 27)}$$
$$X_{112} + X_{122} + X_{132} + d2_{12}^- - d2_{12}^+ = 300 \quad \text{(Ec. 28)}$$
$$X_{113} + X_{123} + X_{133} + d2_{13}^- - d2_{13}^+ = 260 \quad \text{(Ec. 29)}$$
$$X_{211} + X_{212} + X_{213} + X_{221} + X_{222} + X_{223} + X_{231} + X_{232} + X_{233} + d2_2t^- - d2_2t^+ = 710 \quad \text{(Ec. 30)}$$
$$X_{211} + X_{221} + X_{231} + d2_{21}^- - d2_{21}^+ = 150 \quad \text{(Ec. 31)}$$
$$X_{212} + X_{222} + X_{232} + d2_{22}^- - d2_{22}^+ = 320 \quad \text{(Ec. 32)}$$
$$X_{213} + X_{223} + X_{233} + d2_{23}^- - d2_{23}^+ = 240 \quad \text{(Ec. 33)}$$
$$X_{311} + X_{312} + X_{313} + X_{321} + X_{322} + X_{323} + X_{331} + X_{332} + X_{333} + d2_3t^- - d2_3t^+ = 710 \quad \text{(Ec. 34)}$$
$$X_{311} + X_{321} + X_{331} + d2_{31}^- - d2_{31}^+ = 160 \quad \text{(Ec. 35)}$$
$$X_{312} + X_{322} + X_{332} + d2_{32}^- - d2_{32}^+ = 330 \quad \text{(Ec. 36)}$$
$$X_{313} + X_{323} + X_{333} + d2_{32}^- - d2_{32}^+ = 230 \quad \text{(Ec. 37)}$$

Metas de demandas de los destinos:

$$X_{111} + X_{211} + X_{311} + d3_{11}^- - d3_{11}^+ = 100 \quad \text{(Ec. 38)}$$
$$X_{112} + X_{212} + X_{312} + d3_{12}^- - d3_{12}^+ = 250 \quad \text{(Ec. 39)}$$
$$X_{113} + X_{213} + X_{313} + d3_{13}^- - d3_{13}^+ = 300 \quad \text{(Ec. 40)}$$
$$X_{121} + X_{221} + X_{321} + d3_{21}^- - d3_{21}^+ = 150 \quad \text{(Ec. 41)}$$
$$X_{122} + X_{222} + X_{322} + d3_{22}^- - d3_{22}^+ = 300 \quad \text{(Ec. 42)}$$
$$X_{123} + X_{223} + X_{323} + d3_{23}^- - d3_{23}^+ = 250 \quad \text{(Ec. 43)}$$
$$X_{131} + X_{231} + X_{331} + d3_{31}^- - d3_{31}^+ = 200 \quad \text{(Ec. 44)}$$
$$X_{132} + X_{232} + X_{332} + d3_{32}^- - d3_{32}^+ = 350 \quad \text{(Ec. 45)}$$

$X_{133} + X_{233} + X_{333} + d3_{33}^- - d3_{33}^+ = 200$ No se usa por ser cliente de mayor interés. (Ec. 46)

Meta de rentabilidad:

$$10 X_{111} + 15 X_{112} + 20 X_{113} + 10 X_{121} + 15 X_{122} + 20 X_{123} + 10 X_{131} + 15 X_{132} + 20 X_{133} + 10 X_{211} + 15 X_{212} + 20 X_{213} + 10 X_{221} + 15 X_{222} + 20 X_{223} + 10 X_{231} + 15 X_{232} + 20 X_{233} + 10 X_{311} + 15 X_{312} + 20 X_{313} + 10 X_{321} + 15 X_{322} + 20 X_{323} + 10 X_{331} + 15 X_{332} + 20 X_{333} + d4^- - d4^+ = 40000 \quad \text{(Ec. 47)}$$

Meta de atención a clientes de mayor interés:

$$X_{133} + X_{233} + X_{333} + d5_{33}^- - d5_{33}^+ = 200 \quad \text{(Ec. 48)}$$

Meta de clientes atendidos de fuentes escogidas:

Para D2:

$$X_{121} + X_{122} + X_{123} + d6_{2k}^- - d6_{2k}^+ = 0 \quad \text{(Ec. 49)}$$

Para D1:

$$X_{111} + X_{211} + X_{112} + X_{212} + X_{113} + X_{213} + d6_{1k}^- - d6_{1k}^+ = 0 \quad \text{(Ec. 50)}$$
$$X_{311} + d6_{11}^- - d6_{11}^+ = 100 \quad \text{(Ec. 51)}$$
$$X_{312} + d6_{12}^- - d6_{12}^+ = 250 \quad \text{(Ec. 52)}$$
$$X_{313} + d6_{13}^- - d6_{13}^+ = 300 \quad \text{(Ec. 53)}$$

Donde los coeficientes: 17, 16, 11, 7, 5 y 3, de la función objetivo, son arbitrarios y sólo demuestran las ponderaciones, en el caso de 16 y 17, no hay ninguna razón de uno mayor que el otro, sólo se quiere diferenciar la capacidad total de la fuente, de la capacidad de la misma, en cada uno de los productos.

Conocidas todas las expresiones y sus coeficientes, se resuelve el modelo, arrojando los resultados que se muestran en la tabla V, donde se pueden ver los valores finales de: las variables básicas, las fuentes y los destinos y de las principales desviaciones, ordenadas por prioridades. Pudiendo observarse que todas las metas de prioridad uno (P1), se alcanzaron, excepto $d6_{13}^{-} = 70$, y esto se motivó porque se le dio mayor ponderación al hecho que el destino uno (D1) deseaba recibir sus productos desde la fuente tres (F3), frente al recibir toda la mercancía, a pesar de que estas setenta (70) unidades del producto k = 3 estaban disponibles en la fuente uno (F1K3 = 70); por esta misma razón, pero en prioridad dos (P2), queda $d3_{13}^{-} = 70$, mientras $d3_{23}^{-} = 20$, no fue alcanzada, porque se estaba demandando más producto k = 3 en los destinos, del disponible en las fuentes. Tampoco se alcanzan los beneficios ($d4^{-} = 9200$), pero esta meta era la de más baja prioridad y ponderación.

Tabla V. Valores finales de la solución del problema hipotético.

Variable	Valor final	Fuentes y destinos	Valor final	Desviación	Valor final
X111	0	F1	70	$d2_1t^+$	0
X112	0	F1K1	0	$d2_2t^+$	0
X113	0	F1K2	0	$d2_3t^+$	0
X121	0	F1K3	70	$d2_{11}^+$	0
X122	0	F2	40	$d2_{12}^+$	0
X123	0	F2K1	0	$d2_{13}^+$	0
X131	140	F2K2	40	$d2_{21}^+$	0
X132	300	F2K3	0	$d2_{22}^+$	0
X133	190	F3	10	$d2_{23}^+$	0
X211	0	F3K1	0	$d2_{31}^+$	0
X212	0	F3K2	10	$d2_{32}^+$	0
X213	0	F3K3	0	$d2_{33}^+$	0
X221	90	D1	580	$d6_{2k}^+$	0
X222	230	D1K1	100	$d6_{1k}^+$	0
X223	230	D1K2	250	$d6_{11}^-$	0
X231	60	D1K3	230	$d6_{12}^-$	0
X232	50	D2	680	$d6_{13}^-$	70
X233	10	D2K1	150	$d5_{33}^-$	0
X311	100	D2K2	300	$d3_{11}^-$	0
X312	250	D2K3	230	$d3_{12}^-$	0
X313	230	D3	750	$d3_{13}^-$	70
X321	60	D3K1	200	$d3_{21}^-$	0
X322	70	D3K2	350	$d3_{22}^-$	0
X323	0	D3K3	200	$d3_{23}^-$	20
X331	0			$d3_{31}^-$	0
X332	0			$d3_{32}^-$	0
X333	0			$d3_{33}^-$	0
				$d1^+$	0
				$d4^-$	9200

Luego de presentar este corto ejemplo hipotético, se puede pasar a presentar algunas conclusiones y recomendaciones.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La primera conclusión es relativa a los objetivos, los cuales fueron alcanzados a plenitud, ya que se obtuvo un modelo del problema de transporte para múltiples productos, a través de la programación meta, el cual permitirá conocer los valores de cada una de las variables de decisión, la cantidad de cada producto k, que se envía desde cada fuente i a cada uno de los j destinos. El modelo adicionalmente fue probado a través de un caso hipotético, comprobándose su adecuado funcionamiento.

Este modelo planteado, tal como se expresó en los objetivos específicos, no sólo toma en cuenta las variables intrínsecas del problema de transporte de múltiples productos, como lo son la cantidad de mercancía a entregar desde cada fuente y los costos unitarios de estas entregas, sino que maneja a su vez otros factores, como lo son los beneficios, la atención a clientes especiales y el manejo selectivo de fuentes. Estos dos últimos aspectos, son dignos de ser destacados, ya que le dan al modelo una gran flexibilidad, aumentando así su campo de aplicación, a la vez que su adaptación a problemas muy particulares, que pueda tener una organización dada.

Otro aspecto interesante al trabajar con metas, es la posibilidad que dan las mismas de ser incumplidas, sin que signifique una infactibilidad del problema, lo que permite visualizar soluciones, que aunque no óptimas, pueden ser aplicadas dando soluciones satisfactorias. A la vez, de acuerdo a las prioridades y ponderaciones que se les asignen a las diferentes metas, se pudiesen encontrar soluciones que se adapten mejor a los objetivos finales de la organización, tal como se pudo observar en el ejemplo hipotético.

Esta gran flexibilidad de los modelos de programación meta, permiten a la vez, recomendarlos para resolver otros tipos de problemas donde pudiesen haber objetivos en conflictos, ya sea en el manejo de recursos humanos o financieros, e incluso en forma conjunta.

Finalmente se recomienda continuar las investigaciones acerca del problema del transporte de múltiples productos, con el objetivo de afinar el presente modelo, o encontrar otros modelos, que puedan prestar una mayor ayuda a la toma de decisiones, sobre este problema, en todas las circunstancias que se pueda presentar.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no hubiese sido posible sin el apoyo brindado por la Universidad Metropolitana y en especial el Decanato de Investigación y Desarrollo, y el Decanato de Ingeniería, a través de la Escuela de Ingeniería de Sistemas. Y a Minimax Consultores, C.A., a través de su gerencia de investigación.

REFERENCIAS

CAIRES, G.O. and V. ROSALES H. (2001): **Resolución de problemas de programación no lineal mediante el uso de programación meta**, Trabajo especial de grado no publicado, Universidad Metropolitana, Caracas, Venezuela.

CARTUSCIELLO, R.P. and M. DÍAZ (2001): **Herramienta para el manejo del transporte de múltiples productos**. Trabajo especial de grado no publicado, Universidad Metropolitana, Caracas, Venezuela.

DAVIS, R. and P. McKEOWN (1984): **Modelos cuantitativos para administración**. (Díaz M., Alfredo y Fournier G., María, Traductores) Grupo editorial Iberoamérica, México.

GARFINKEL, R. and G.L. NEMHAUSER (1972): **Integer Programming**, John Wiley & Sons, New York.

GOMES, F. A. (2001): **Fluxos em redes** en: http://www.ime.unicamp.br/~chico/ms528/index.html Consultada: (02/04/2001).

HERNÁNDEZ R., J.G. and M.J. GARCÍA G. (2001): **Aproximación al transporte de múltiples productos**, Documento presentado en el I Congreso Internacional de Ingeniería de Sistemas, Trujillo, Perú.

HILLIER, F.S. and G. LIEBERMAN (1997): **Introducción a la Investigación de Operaciones** (4a. ed) (Marcia González; José Cantú; Perla Fernández & Marco Montufar, Traductores) McGraw-Hill, México.

IGNIZIO, J.P. (1976): **Goal Programming and extensions**, Lexington Books, Massachusetts.

LARRAÑETA, J. (1977): **Programación Lineal y grafos,** Publicaciones de la Universidad de Sevilla, Sevilla, España.

LEVIN, R. I. and C.A. KIRPATRICK (1983): **Enfoques cuantitativos a la administración** (José R. Sánchez P., Traductor) Compañía Editorial Continental, S.A., México.

MARTIN C., A. and S. MARTIN (1997): **Modelo de manejo de inventarios de múltiples artículos usando la programación meta**, Trabajo especial de grado no publicado, Universidad Metropolitana, Caracas, Venezuela.

MATHUR, K. and D. SOLOW (1996): **Investigación de Operaciones, el arte de la toma de decisiones** (1ª edición) (Joaquín Ramos S. & Carlos Talancón E., Traductores) México: Prentice Hall.

MOSKOWITZ, H. & G.P. WRIGHT (1982): **Investigación de Operaciones** (Carlos Franco & Fernando Valencia, Traductores): Prentice Hall Internacional, Colombia.

MURTY, K.G. (1976): **Linear and combinatorial programming**, John Wiley & Sons, New York.

PHILLIPS, D.T.; A. RAVINDRAN and J. SOLBERG (1976): **Operations Research principles and practice**, John Wiley & Sons, New York.

PRAWDA W., J. (1977): **Métodos y modelos de investigación de operaciones**, 2, Limusa, S.A. México.

TAHA, H.A. (1998): **Investigación de operaciones una introducción** (6a ed). (Meza S.; R. Cruz & Fernández G., Traductores), Prentice Hall, México.

THIERAUF, R. and R.A. GROSSE (1981): **Toma de decisiones por medio de Investigación de Operaciones** (José Meza N. & German S. Monroy A., Traductores) Limusa, México.

WINSTON, W. (1994): **Investigación de operaciones: Aplicaciones y algoritmos** (V. González, traductor), Grupo Editorial Iberoamérica, México.