LA RELACIÓN ENTRE LA VOLATILIDAD DEL PRECIO DE UN TÍTULO Y SU RENDIMIENTO: UNA REVISIÓN

Josefina Martínez Barbeito[1]
Universidade A Coruña

RESUMEN:
Este trabajo presenta una revisión de los resultados más importantes en la relación entre la volatilidad del precio de un título, β, y el rendimiento de la clase de activos. La mayor parte de los estudios empíricos respecto a la relación entre los valores de la volatilidad y el rendimiento medio han utilizado medias aritméticas de los tantos por ciento de rendimiento discretos. En este trabajo hacemos una caracterización de tales relaciones, no existente en los libros de texto y obviados en los trabajos teóricos.

Esto permitirá establecer bases para un estudio teórico de los modelos matemáticos que aparecen en el estudio de problemas financieros.

ABSTRACT:
This paper presents the state of the art of the most important results in the relation between the volatile of the price of an asset, β, and the return of the class of stocks. The majority of the empirical studies on the relation of the values of the volatile and the mean return have used arithmetic means of the percentages of discrete returns. In this paper we characterize these relationships, they are not present in text books and are not treated in theoretical papers.

This will allow to establish a basis for a theoretical study of the mathematical models that appear in financial problems.

KEY WORDS: mean return, return of stocks, empirical studies

MSC:91B24, 91B24

1. INTRODUCCIÓN

Los seis factores que afectan a los precios de las opciones de títulos son:

a. El precio actual del título: S. El precio del título en T: S_T.
b. El precio de ejercicio de la opción: X.
c. La fecha de vencimiento de la opción: T (momento actual: t)
d. La volatilidad del precio del título: β
e. El tanto de interés libre de riesgo: r
f. Los dividendos esperados durante la vida de la opción: C (valor de una opción "Call Europea").

Los efectos sobre el precio de una opción (título) al variar un factor, manteniéndose constantes los otros, se expresan de la forma siguiente:

$$C=f(S,X,T,\beta,r)$$

$$\partial C/\partial S>0;\ \partial C/\partial X<0;\ \partial C/\partial T>0;\ \partial C/\partial \beta>0;\ \partial C/\partial r>0$$

La relación entre el rendimiento de una cartera de títulos y el rendimiento en el mercado, viene dada por el parámetro β. Ésta es la pendiente de la recta mejor ajustada obtenida cuando el rendimiento exceso de la cartera sobre el tanto sin riesgo ha descendido respecto al rendimiento exceso del mercado sobre el tanto sin riesgo. Por ejemplo, cuando β=1, el rendimiento de la cartera tiende a reflejar el rendimiento en el mercado; cuando β=2, el

[1] barbeito@udc.es

rendimiento exceso de la cartera tiende a ser dos veces mayor que el rendimiento exceso del mercado; cuando β=0.5, tiende a ser la mitad mayor.

Entonces, sin demasiado rigor, la volatilidad del precio de un título es la medida de la incertidumbre de los movimientos futuros de los precios de los títulos. Cuando crece la volatilidad crece la probabilidad de que el título sea muy bueno o muy malo. Para el poseedor de un título, estos dos resultados tienden a compensarse. Sin embargo, esto no es así para el poseedor de una Call Europea. El poseedor de una Call se beneficia del crecimiento del precio, pero tiene limitado el riesgo en el caso de que descienda el precio, puesto que lo más que puede perder es el precio de la opción. Análogamente, el poseedor de una put, se beneficia del descenso del precio pero tiene limitado el riesgo en el caso de que suba el precio. Por tanto, los valores tanto de la call como de la put, crecen cuando crece la volatilidad.

Este trabajo se centra en la relación entre β y el rendimiento de las acciones ordinarias. Tal relación, es una condición previa para la existencia de una prima equitativa o rendimiento superior a largo plazo de las acciones, como resultado de la aversión a la volatilidad de los participantes en el mercado de capitales.

2. MODELO DE VALORACIÓN DE ACTIVOS FINANCIEROS (CAPM –CAPITAL ASSET PRICING MODEL)

En esta sección, se examina la valoración de equilibrio de los títulos individuales. Se pueden considerar dos modelos de precios de activos.
1)El modelo de equilibro de valoración de activos financieros;
2)El modelo de equilibrio por arbitraje.

2.1 Modelo de valoración de activos financieros.

Este fue desarrollado por Sharpe (1963) y Lintner (1965). Es un modelo válido para todo tipo de títulos, sean acciones o bonos. Sin embargo, hay una versión del MEDAF –especialmente conveniente para bonos.

El MEDAF es un modelo de equilibrio de valoración de activos, que se basa explícitamente en la maximización de la utilidad y en un conjunto de oportunidad dado de una cartera. Se puede decir que se determinan los precios de los activos de un modo que equilibran la oferta de activos con la demanda de los mismos.

El modelo de valoración de activos financieros se expresa como sigue:

$$\tilde{r}_i = r_f + \frac{\tilde{r}_m - r_f}{\sigma_m} \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m} \text{ , ó}$$

$$\tilde{r}_i = r_f + \left(\tilde{r}_m - r_f\right)\beta_i$$

donde σ_{im} expresa la covarianza del rendimiento del activo i-ésimo con el rendimiento del mercado y

$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$, es la Beta del título i-ésimo

$\tilde{r}_m$ es el rendimiento esperado de la cartera de mercado

σ_m^2 es la varianza del rendimiento de mercado.

El MEDAF es un modelo de equilibrio de valoración de activos basado explícitamente en la maximización de la utilidad y un conjunto de oportunidad dado de una cartera especificada. Los precios de equilibrio de los activos se determinan de tal modo que ajusten la oferta de activos con su demanda.

Se supone que se cuenta con H inversores y con N títulos con riesgo, y una deuda sin riesgo que podemos denotar por N+1.

Partimos de una matriz en la que los elementos típicos "W_{ih}" denotan la proporción del total invertido en el mercado por el inversor "h" en el título "i", expresando $W_{N+1,\,h}$ el total invertido por el inversor "h" en la deuda sin riesgo. Las sumas de las columnas presentan las restricciones presupuestarias de los inversores: φ_h es la proporción del valor del inversor "h" en el importe total. La suma de cada fila Qi indica la proporción del título en el mercado total. La suma para todos los inversores de la deuda sin riesgo es cero.

Se supone que cada inversor individual tiene una función de utilidad: $\overline{U}_h = \overline{U}_h\left(\tilde{r}_{ph}, r_{ph}^2\right)$, siendo $\bar{r}_{ph}$ el rendimiento esperado de la cartera del inversor "h" y $\bar{r}_{ph}^2$ la varianza del rendimiento de la cartera del inversor h.
La restricción presupuestaria del inversor h cumple:

$$\frac{1}{\varphi_h}\left(\sum_{i=1}^{N} W_{ih} - W_{N+1,h}\right) = 1$$

El objetivo del inversor es la maximización de su utilidad sujeta a su restricción presupuestaria.

Si hacemos los ajustes necesarios, teniendo en cuenta que si sumamos todos los títulos inversores, e imponemos condiciones de equilibrio de mercado, logramos la cartera de mercado, obtenemos:

$$\tilde{r}_i = r_f + \frac{\tilde{r}_m - r_f}{\sigma_m} \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m} \;, \qquad (1)$$

$$\tilde{r}_i = r_f + \left(\tilde{r}_m - r_f\right)\beta_i \qquad (2)$$

donde $\sigma_{im} = \sum_{j=1}^{N} \theta_j \sigma_{ij}$ covarianza del rendimiento del título "i" con el rendimiento de mercado.

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \text{, Beta del título} \qquad (3)$$

La diferencia entre (1) y (2) es que (1) expresa el precio de mercado del riesgo en unidades de riesgo total, mientras que (2) expresa el precio absoluto del riesgo.

Otra diferencia es que las medidas de la cantidad de riesgo difieren ligeramente. La ecuación (1) usa la covarianza del título i-ésimo con el riesgo relativo del mercado con respecto al riesgo total, tal como se mide por la desviación típica del mercado. La ecuación (2) usa la covarianza del título i-ésimo con el riesgo relativo del mercado con respecto al riesgo total medido por la varianza del mercado. La última medida se conoce como "Beta" del título porque se define del mismo modo que los coeficientes "Beta" en una ecuación de regresión. La Beta de la cartera es simplemente el valor de la suma media ponderada de las Betas de los activos de los activos de la cartera

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} \theta_i \beta_i$$

El punto importante es que ambas carteras definen la cantidad de riesgo exactamente del mismo modo, a saber, el total de riesgo de mercado no sistemático o no diversificable. Esto es porque, en un modelo de equilibrio sólo es el riesgo de mercado lo que se valora, al riesgo diversificable, como se puede eliminar por diversificación no se valora. Se implica con esto que, en el equilibrio, los inversores no serán compensados por algo que se podría eliminar con una diversificación de bajo riesgo.

Esto se puede ver más claramente si comparamos la recta del mercado de capitales con la recta del mercado de títulos. La renta del mercado de capitales (RMC) es una recta que relaciona el rendimiento esperado contra el riesgo total. La recta del mercado de títulos (RMT) es una recta que relaciona el rendimiento esperado con relación al riesgo de mercado. Es decir, es la recta correspondiente al MEDAF.

De la definición de beta, la beta de la cartera de mercado es 1.

En el equilibrio, todos los títulos se valorarán de forma que estén en la recta del mercado de capitales, pero se valorarán en el equilibrio para reflejar solamente el riesgo no diversificable contenido en ellas.

A lo largo de la recta del mercado de capitales todas las carteras (eficientes) están perfectamente correlacionadas con el mercado, de modo de $\rho_{pm} = 1$. Esto se deduce porque todas las carteras a lo largo de la cartera de mercado de capitales son combinaciones lineales de la cartera de mercado y de la cartera sin riesgo y, por ello, por construcción, están perfectamente correlacionadas con el mercado y esto se reconoce con la recta del mercado de títulos. La recta del mercado de títulos muestra que el riesgo diversificable tiene dos componentes: el riesgo total del título σ_i y su correlación con el mercado ρ_{im}. La recta del mercado de títulos RMT es el modo correcto de valorar títulos, sean o no eficientes. Ofrece una relación única entre el rendimiento requerido sobre un título y el total de riesgo no diversificable (medido por β) que contiene.

Se puede comparar el MEDAF con el modelo de mercado, dado por:

$$\tilde{r}_i = r_f + \left(\tilde{r}_m - r_f\right)\beta_i \quad \text{y} \quad r_{it} = r_i + \beta_i r_m + \varepsilon_{it} \tag{4}$$

o, tomando esperanzas en la expresión anterior:

$$\tilde{r}_i = r_i + \beta_i \tilde{r}_m \tag{5}$$

Si el CAPM es correcto, entonces esto impone ciertas restricciones sobre la ecuación de regresión.

Reordenando (4), tenemos:

$$\tilde{r}_i = r_f\left(1 - \beta_i\right) + \beta_i \tilde{r}_m \tag{6}$$

Esto impone las restricciones:

$$r_i = r_f\left(1 - \beta_i\right) \tag{7}$$

Se puede usar el MEDAF para determinar el tanto requerido de rendimiento sobre un título si se va a mantener en el equilibrio.

Si el título tiene una β mayor que la del mercado, el título es una acción agresiva, puesto que su precio es más volátil que el del mercado. Si el título tiene una Beta menor que el del mercado, el título es una acción defensiva, puesto que su precio es menos volátil que el del mercado. Las acciones agresivas como tienen un riesgo no diversificable más alto que el del mercado, tienen también un tanto de rendimiento más alto que el mercado. Las acciones defensivas tienen un riesgo menos diversificable que el mercado, por lo que requieren un tanto de rendimiento menor.

El concepto de riesgo incluye 4 componentes principales: un tanto real de interés, una prima de inflación, una prima de liquidez y una prima del riesgo. El MEDAF incluye las 4 componentes $\tilde{r}_i = r_f + \left(\tilde{r}_m - r_f\right)\beta_i = f$ (tanto real, prima de inflación, prima de liquidez)+prima del riesgo. El tanto de interés sin riesgo incluye las 3 primeras componentes, mientras que el término $(\tilde{r}_m - r_f)\beta_i$ es la prima del riesgo. El riesgo no diversificable está contenido en la prima del riesgo.

Se introduce el concepto de α, que mide el exceso de rendimiento sobre un título. Es igual a la diferencia entre el tanto actual de rendimiento sobre un título y el tanto requerido por el MEDAF:

$$\alpha_i = r_i - \tilde{r}_i = \left(r_i - r_f\right) - \left(\tilde{r}_m - r_f\right)\beta_i$$

Si un título se valora correctamente, $\alpha_i = 0$. Si un título es infra o sobre valorado, α_i <0. En este caso se espera que baje el precio, por lo que vale la pena venderlo. El valor α de una cartera de títulos es el valor de la suma ponderada de las α_s de la cartera.

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{N} \theta_i \alpha_i$$

Consideramos dos extensiones del CAPM: a)el caso de que el tanto de endeudamiento sea superior al tanto de los préstamos; b)el caso de inexistencia de activo sin riesgo. Este caso es todavía posible que exista si hay un título con Beta igual a cero. Es un título que, como el activo sin riesgo, no tiene riesgo de mercado, aunque podría tener un riesgo específico.

Es posible calcular el coeficiente beta de un bono mediante la regresión del tanto de rendimiento del bono con respecto al tanto de rendimiento del mercado. El coeficiente beta así estimado es una medida del riesgo no diversificable del bono. Igualmente importante es el riesgo del tanto de interés y de la medida del riesgo del tanto de interés usado para los bonos en la duración.

La DURACIÓN, mide el cambio del precio de un bono con el cambio del tanto de interés subyacente. Cuando los tantos de interés suben, los precios de los bonos bajan y viceversa. Un bono de duración larga –tal como un bono de vencimiento largo- es muy sensible a los cambios del tanto de interés.

La versión del MEDAF que capta el efecto del tanto de interés sin riesgo es:

$$\tilde{r}_i = r_f + \left(\tilde{r}_m - r_f\right)\beta_i$$

donde:

$\tilde{r}_i$ = rendimiento esperado sobre el bono i-ésimo.

$\tilde{r}_m$ = rendimiento esperado sobre la cartera de los bonos.

$\beta_i = D_i / D_m$ = duración relativa,

donde Di es la duración del bono i-ésimo y Dm es la duración de la cartera de mercado de los bonos.

Esta formulación se refiere a la recta de mercado del bono, que es muy similar a la del MEDAF general, plantea que, si el tanto de interés se eleva en un 1 por ciento, el rendimiento del bono i-ésimo se elevará el β_i, la duración relativa del bono. El rendimiento esperado de un bono es una función lineal de su duración.

Existen dos problemas con la expresión: En primer lugar valora en exceso el efecto de los cambios de los tantos de interés a corto plazo sobre los rendimientos y precios de los bonos de larga duración. En segundo lugar, al incluir un tanto de interés a corto plazo como variable explicativa, se supone implícitamente que, cuando cambian los tantos de interés, hay un cambio paralelo en la curva del rendimiento. En realidad, existen raramente cambios paralelos de la curva del rendimiento, por lo que es preciso recurrir a otros modelos.

2.2 El Medaf y la versión para futuros y opciones

Existen dos versiones del MEDAF importantes para contratos de futuros y opciones:

Sabemos que el precio de un contrato de futuros sobre un título es igual al precio actual más el coste de acarreo.

$$P_i^f = \left[1 + \left(r_f - d_i\right)\right] P_i^S ,$$

siendo:

P_i^f = precio de un contrato de futuros sobre el título i-ésimo.

P_i^S = precio del título i-ésimo.

d_i = renta sobre título i-ésimo.

Diferenciando la expresión anterior, tomando esperanzas y mediante las sustituciones pertinentes, tenemos:

$$\tilde{r}_i^f = r_i^S = r_f + \left(\tilde{r}_m - r_f\right)\beta_i^S = r_f + \left(\tilde{r}_m - r_f\right)\beta_i^f$$

donde ,

$$r_i^f = E\left(dP_i^f / P_i^f\right)$$
$$\tilde{r}_i^S = E\left(dP_i^S / P_i^S\right)$$

Esta ecuación muestra que el MEDAF para un contrato de futuros es idéntico al del activo subyacente, y que la Beta de un contrato de futuros $\left(\beta_i^f\right)$ es igual al del título subyacente $\left(\beta_i^S\right)$.

Se puede aplicar también el MEDAF para contratos de opciones de compra o de venta.

Aún cuando el MEDAF se conoce como modelo unifactorial, debido a que los rendimientos sobre los títulos se suponen relacionados sólo a un factor único (el riesgo de mercado contenido en cada título), se puede considerar un modelo multifactor, de los que se hablará en otra ocasión.

En caso de no existir una relación significativa entre β y el rendimiento de las acciones ordinarias, puede existir una prima equitativa que no estaría relacionada con la aversión al riesgo de los inversores en cartera. Entonces, la hipótesis de que existirá tal prima no está demasiado clara.

En el campo actuarial, se puede suponer que existe una relación entre volatilidad y rendimiento, ya que se puede deducir un resultado importante y es que existe una relación lineal entre rendimiento esperado de los títulos individuales y los factores β.

Aparte de algunas limitaciones, el "Modelo de Equilibrio de Activos Financieros" (MEDAF), sigue siendo el punto de partida de una gran variedad de aplicaciones. Por ejemplo, nos proporciona el conocimiento de que la prima de riesgo sobre un activo depende de su covarianza con la cartera del mercado, más bien de que su varianza pura. Esto se utiliza bastante en la construcción de carteras y en el seguimiento del riesgo de carteras.

Conviene observar que es aparente la existencia de una relación positiva entre los valores de β y el rendimiento, en la mayoría de las publicaciones sobre inversión. Por ejemplo, Brailsford y Heaney (1998), indicaron que el MEDAF es interesante por su simplicidad y gran amplitud en las aplicaciones financieras, tanto científica como profesionalmente. De tal forma, que se cumple la relación lineal que se ha supuesto en el MEDAF entre los valores de β y el rendimiento esperado.

Se podría suponer que la relación MEDAF entre los valores de β y los rendimientos, es un modelo de expectativas más bien que de resultados. No obstante, para utilizarlo como modelo de expectativas se necesita una relación entre las expectativas del modelo y los resultados. Esta relación la realizaron científicamente Black, Jensen y Scholes (1972) y Ball, Brown y Officer (1976). Las conclusiones de estos estudios son los que se ponen en tela de juicio.

Si no aparecieran estos estudios para confirmar la existencia de una relación teóricamente obtenida entre los valores de β y los rendimientos, parece improbable que el uso del MEDAF y la adopción de sus hipótesis se hubiera difundido tan ampliamente.

Si no existiera la relación significativa entre el valor de β y el rendimiento, entonces una gran parte de la teoría financiera moderna cuenta con la evidencia empírica que no se ha interpretado correctamente.

3. LA VOLATILIDAD Y EL PARÁMETRO BETA.

En términos generales, la volatilidad del precio de los títulos es una medida de nuestra incertidumbre sobre los movimientos futuros de los precios de los mismos. Cuando la volatilidad aumenta, la posibilidad de que los títulos vayan muy bien o muy mal aumenta. Para el propietario de activos financieros estos dos resultados tienden a compensarse el uno con el otro. Sin embargo, esto no es así para el propietario de una opción de compra o de venta. El propietario de una opción de compra se beneficia de los incrementos de precio pero ha limitado el riesgo de pérdida en el caso de un decremento del precio, de modo que lo máximo que puede perder es el precio de la opción. De manera parecida, el propietario de una opción de venta se beneficia de las disminuciones del precio pero tienen limitado el riesgo en el caso de un incremento de precio. El valor de ambas opciones, de compra y de venta, aumenta cuando la volatilidad es mayor.

De un título se puede calcular usando el análisis estadístico o, más específicamente, usando análisis de regresión sobre los datos históricos para estimar el modelo de mercado dado por la ecuación:

R (rendimiento)= $\alpha + \beta R_M + \varepsilon$,

donde ε tiende en la media a cero.

La pendiente estimada del modelo de mercado es el estimador Beta. Se calcula una serie de mercado (S&P 500, por ejemplo) en un intervalo amplio para un índice de rendimiento, mediante la ecuación:

$$R_p = \frac{V_1 - V_0 + D}{V_0}$$

V_1= valor de mercado de la cartera al final del intervalo.

V_0 = valor de mercado de la cartera al principio del intervalo.

D= Distribuciones de caja (efectivo) para el inversor durante el intervalo.

El cálculo supone que cualquier renta de interés o rendimiento recibido por la cartera de títulos y no distribuido al inversor se reinvierte en la cartera y se refleja luego en V_1.

Se pueden calcular los rendimientos mensuales de los últimos 5 años, ofreciendo 60 observaciones del rendimiento tanto para el índice de mercado como para el título o cartera. La teoría de Cartera no indica si se usan rendimientos mensuales, semanales o diarios. Tampoco indica un número específico de observaciones, salvo que la metodología estadística plantea que más observaciones ofrecen una medida de beta más fiable Fabozzi ofrece estimaciones de beta usando datos históricos y riesgo sistemático y no sistemático para 5 acciones con rendimientos estimados durante 60 meses desde Enero 1996 a Diciembre del 2000.

Otro producto para la técnica estadística usado para la estimación de Beta es el porcentaje de riesgo sistemático con respecto al riesgo total. En términos estadísticos se mide por el coeficiente de determinación de la regresión, que indica el porcentaje de variación del rendimiento del activo explicado por el de 0 a 1. El riesgo no sistemático o riesgo único es, entonces, el importe no explicado por la cartera de mercado. Es decir, es 1 menos el coeficiente de determinación. Ciertos estudios muestran que la acción común del NYSE (New York Stock Exchange) tiene un riesgo sistemático del 30% y un riesgo no sistemático del 70%; por el contrario, el coeficiente de determinación para una cartera bien diversificada indica un riesgo no sistemático inferior al 10% de la variabilidad total

La diferencia en el Cálculo de Beta dependerá de los siguientes factores: a) la longitud de tiempo sobre el que se calcula; b) el número de observaciones usadas; c) el período especifico de tiempo usado (depende de la antigüedad); d) el índice seleccionado de mercado (S&P 500, ó un índice total ponderado por el valor relativo de mercado).

Queda la cuestión sobre la estabilidad o posible cambio de los valores de beta.

Una cuestión interesante a plantear se refiere a si los determinantes económicos de la Beta de una compañía deberían estar reflejadas en su Beta. Varios estudios empíricos han intentado identificar estos factores macro y macroeconómicos.

Existe la evidencia de que un error aleatorio (insesgado) en la identificación de Beta, nos lleva a una pendiente descendente sesgada y a un punto de intersección (ordenada en el origen) ascendente.

La relación entre la volatilidad y el rendimiento o, más correctamente, la relación entre la beta de un título, y su rendimiento esperado ha sido una cuestión delicada, controvertida. La relación es un punto esencial del MEDAF, que ha sido una de las ideas más dominantes de la teoría de Finanzas desde hace décadas.

En la práctica existen 3 áreas amplias de aplicación potencial del MEDAF:

1) La aceptación de una relación entre los valores de β y el rendimiento, dentro de las acciones ordinarias como una clase de activos.
2) Decisión de la posibilidad de relación entre la volatilidad de una clase de activos y su rendimiento medio.
3) La evaluación del proyecto –hallar el tanto adecuado de descuento a usar en la valoración de un proyecto o una decisión empresarial.

El primer punto se refiere a la posible relación significativa entre β y el rendimiento dentro de las acciones ordinarias como una clase de activos. Tal relación es un pre-requisito para la existencia de una prima del capital, o rendimiento superior a largo plazo de las acciones resultante de la aversión a la volatilidad que tienen los participantes en el mercado de capitales.

Si no hay relación significativa entre β y el rendimiento todavía puede existir una prima de capital, pero no se obtiene de la aversión al riesgo de los inversores de cartera.

Dentro de la profesión actuarial han existido elementos significativos de dudas sobre cualquier relación entre los valores de Beta y el rendimiento y el poder de predicción de los valores de β.

Si se juzga la adopción reciente por el Instituto de Actuarios de un criterios que dice:

Se ha obtenido un resultado poderoso que prueba que existe una relación lineal entre el rendimiento esperado de los títulos individuales y los así llamados “factores β”.

Brailford and Heaney (1998) afirman: “El MEDAF es importante por su programa de simplicidad y los efectos de amplio alcance que tienen sobre el estudio de las finanzas. Se incluye prácticamente en todos los cursos de finanzas y es usado para muchas aplicaciones en el análisis financiero, tanto por profesionales como por académicos”.

Después de analizar los puntos conflictivos y la evidencia añaden:

“La relación lineal que predice el MEDAF entre los valores de β y el rendimiento esperado, se cumple generalmente”.

Se ha tratado de ver si se puede probar que el MEDAF es verdadero o no. Se han llegado a considerar ciertas deudas al respecto, pero se puede decir que ofrece una visión del comportamiento del mercado de capitales. Una cuestión práctica es preguntarse si hay otros modelos competitivos mejores. Se puede aclarar que existen algunos modelos que son mejores para ciertos fines.

La idea de la relación entre la volatilidad β y el rendimiento surgió en los años cincuenta, cuando se empezaron a utilizar los ordenadores para investigar el comportamiento de las series cronológicas de los precios de las acciones. En aquel tiempo existía un punto de vista respecto a los movimientos del precio de las acciones en periodos de tiempo sucesivos, en el sentido de que eran estadísticamente independientes. El hecho de que la independencia fuera importante, fue debido a que esta hipótesis justificó el uso de la volatilidad de los rendimientos como una medida del riesgo.

Markowitz (1959), demostró que si los inversores conocieran el rendimiento esperado, la volatilidad de los rendimientos de todas las inversiones disponibles y la correlación de los rendimientos entre todas las inversiones disponibles, entonces podrían usar un procedimiento de optimización matemática para obtener una cartera que produzca el mejor rendimiento esperado para un determinado nivel de volatilidad. Alternativamente, para determinado nivel aceptable de volatilidad, se podría usar el mismo procedimiento de optimización para seleccionar una cartera que produzca el mayor rendimiento posible.

En este aspecto, tanto Markowitz como en general, se utilizó la palabra “riesgo” en lugar de volatilidad.

Con el fin de poder realizar el procedimiento de optimización de Markowitz con “n” inversiones posibles, se necesitan “n” medias y varianzas, así como n(n-1)/2 correlaciones. Entonces, debido a la gran cantidad de información numérica que se necesita para poner en práctica las ideas de Markowitz, a tal enfoque no se le dio demasiada importancia.

Ahora bien, Jensen (1972) consideró que los trabajos de Markowitz constituyeron la base sobre la que Sharpe (1964), Litntner (1965) y otros desarrollaron los modelos de equilibrio de la relación entre los tantos de rendimiento esperados de los activos individuales, la covarianza de rendimientos de activos individuales con los de la “cartera de mercado” y el tanto de interés sin riesgo. Así como las ideas de Markowitz, el desarrollo teórico de los “modelos de equilibrio” requieren hipótesis tales como:

1-.Todos los inversores son maximizadores de la utilidad esperada, en un solo periodo,, de los resultados finales.

2-.Los inversores eligen entre carteras alternativas de acuerdo con el rendimiento esperado y la varianza (o desviación típica) del rendimiento.

3-.Todos los inversores pueden prestar y pedir prestado cantidades ilimitadas a un tanto de interés sin riesgo dado, no habiendo limitación alguna respecto a las ventas en descubierto de cualquier activo.

4-.Todos los inversores comparten estimaciones subjetivas idénticas respecto a las medias, varianzas y covarianzas del rendimiento de todos los activos.

5-.Los activos son completamente divisibles y perfectamente liquidables, sin gastos de transacciones en sus compras y ventas.

6-.No existen impuestos.

Observemos que no es necesario que todos los inversores usen un modelo de optimización de la volatilidad del rendimiento. Basta con que algunos inversores utilicen este procedimiento para beneficiarse de las oportunidades que surjan.

Los modelos basados en estos aspectos teóricos establecen que, en un mercado que está dominado por tales inversores, las características de la volatilidad/rendimiento esperado de tales títulos deberían estar relacionados de forma simple.

Posiblemente, como resultado de la evidencia empírica, se llegó a aceptar, después de grandes discusiones respeto al modelo de equilibrio más adecuado, que debería existir la relación lineal entre los rendimientos esperados de todos los activos y la covarianza de estos rendimientos con la “cartera de mercado”.

Como resultado final, se consideró el MEDAF, modelo lineal simple que se expresa en función de los rendimientos y riesgos esperados. En su forma “ex-ante”, tenemos:

$$E(R_j)= R_f + [E(R_m) – R_f]\beta_j \qquad (8)$$

donde $E(R_j)$ es el rendimiento del activo j durante un período; R_f, es el tanto de rendimiento sin riesgo; $E(R_m)$, es el rendimiento de la cartera de mercado durante un período; β_j, es el “factor beta del activo”.

Aunque muchas de las extensiones del modelo soportan esta simple forma lineal, otros sugieren que puede no ser lineal, ya que otros factores distintos del β se necesitan para explicar $E(R_j)$, o que R_j no es el tanto sin riesgo apropiado. Por tanto, con tantas posibles alternativas surgió la cuestión: ¿cómo se ha de ajustar el modelo a los datos?

El primer paso necesario para contrastar empíricamente el modelo teórico MEDAF es transformarle de esperanzas o forma “ex-ante” (las esperanzas no pueden medirse) en una forma que utilice datos observados. Esto se puede hacer suponiendo que el tanto de rendimiento de cualquier activo es un juego equitativo. Es decir, en media el tanto de rendimiento esperado de un activo es igual al tanto de rendimiento obtenido. Entonces, podemos expresar el juego equitativo como sigue:

$$R_{jt}=E(R_{jt})+\beta_j\delta_{mt}+\varepsilon_{jt} \qquad (9)$$

donde

$$\delta_{mt}=R_{mt} – E(R_{mt})$$

$$E(\delta_{mt})=0$$

ε_{jt}= un término residual-error con media cero $E(\varepsilon_{jt})=0$ y que no está autocorrelado de ninguna forma:

$$cov (\varepsilon_{jt}, \delta_{mt})=0 ; cov(\varepsilon_{jt}, \varepsilon_{j,t-1})$$

$$\beta_{jt}= cov (R_{jt}, R_{mt}) /var (R_{mt})$$

La ecuación (9), expresa un juego equitativo ya que, si tomamos esperanzas en ámbos miembros, el rendimiento medio obtenido es igual al rendimiento esperado. Es decir, en media, el rendimiento que se obtiene es el esperado:

$$E(R_{jt}) = E(R_{jt})$$

Si utilizamos la hipótesis de MEDAF de que los rendimientos de los activos son conjuntamente normales, entonces β_j en el modelo juego-equitativo está definido exactamente de la misma forma que el β_j en el MEDAF. Sustituyendo $E(R_j)$ del MEDAF en (9), obtenemos:

$$R_{jt}=R_{ft} + [E(R_{mt})-R_{ft}]\beta_j +\beta_j[R_{mt}-E(R_{mt})]+\varepsilon_{jt}=R_{ft}+(R_{mt}-R_{ft})\beta_j+\varepsilon_{jt}$$

Finalmente, restando R_{ft} de ámbos miembros, obtenemos:

$$R_{jt}-R_{ft} =(R_{mt}-R_{ft})\beta_j+\varepsilon_{jt} \qquad (10)$$

que es la forma “ex-post” del MEDAF. Deducimos esto suponiendo simplemente que los rendimientos están normalmente distribuídos y que los mercados de capitales son eficientes en el sentido juego-equitativo.

Black, Jensen y Scholes (1972), obtuvieron un modelo entre los valores de β y los rendimientos del tipo:

$$R_{jt}=R_{ft}+\alpha_j+(R_{mt}-R_{ft})\beta_j+\varepsilon_{jt}$$

Donde α_j es una constante referente al activo j.

Aunque observaron que sus resultados no se ajustaban exactamente a su modelo, no obstante había una relación evidente entre los valores de β y los tantos de rendimiento medios, lo que comentó Walsh (1976) en el sentido de que el trabajo de Black, Jensen y Scholes indica que después de una contrastación exhaustiva sí existe una relación lineal entre el riesgo de mercado y el rendimiento de la inversión de un título.

4. LA BETA Y LA TEORÍA

En base a los argumentos teóricos y la evidencia empírica, es natural que se estableciera la idea de una relación lineal positiva entre valores de β y del tanto de rendimiento. En este sentido, Fama y French (1992) indicaron que el MEDAF de Sharpe (1964) y Black (1972) había delineado el camino de lo que científica y profesionalmente se pensaba respeto a los rendimientos medios y del riesgo. La predicción central del modelo era que la cartera de mercado del patrimonio invertido es eficiente media-varianza establecido por Markowitz (1959). La eficiencia de la cartera del mercado implica lo siguiente:

1-.Los rendimientos esperados de los títulos son una función lineal positiva de sus betas de mercado (pendiente de la regresión del rendimiento de un título respeto al rendimiento de mercado.

2-.Las betas del mercado bastan para describir la sección transversal de los rendimientos esperados.

Entonces, es evidente que la hipótesis de una relación entre los valores de beta y el rendimiento esperado ha presidido durante más de treinta años, en base a los trabajos teóricos de Markowitz, Sharpe y Black y la evidencia empírica establecida por Black, Jensen y Scholes.

Cuando se consideran posibles inversiones alternativas o se investiga la evidencia empírica, existen varias definiciones del término “rendimiento medio” tales como:

1-.La media aritmética de los sucesivos tantos de rendimiento discretos. Esta se ha usado bastante en los contrastes de la relación rendimiento β, pero generalmente no se utiliza para propósitos tales como medida del comportamiento.

2-.El tanto de rendimiento ponderado en el tiempo. Este se ha usado bastante para medir y comparar el comportamiento de los directores de fondos ya que mide los resultados de inversión independientemente de los cash flows. Es un tanto de rendimiento media geométrica de los sucesivos períodos de tiempo.

3-.El tanto de rendimiento monetario ponderado o tanto de rendimiento interno. Utilizada en la valoración de proyectos y en la distribución de los superávits en los fondos superanuales.

4-.El tanto de rendimiento capitalizado de forma continua medio. Usada en los trabajos teóricos, por ejemplo, en los modelos de tanto de interés estocásticos.

Es evidente que la definición precisa del tanto de rendimiento medio, es muy importante. Si se considera que todos los inversores tratan de maximizar su riqueza final, esto no va de acuerdo con el uso de las medias aritméticas de los tantos de rendimiento discretos para valorar las alternativas de inversión, pues de acuerdo con un estudio realizado realizado por Black, Jensen y Scholes las posibles diferencias con relación a β casi desaparecen cuando la definición del rendimiento medio se cambia de la media aritmética de los rendimientos discretos a la capitalización de forma continua.

En 1992, Fama y French estudiaron la relación posible entre el ratio precio mercado/precio nominal durante el periodo 1960-1990 en la Bolsa de Nueva York y concluyeron que había una relación positiva entre el valor precio mercado/precio nominal y el rendimiento. Parece ser que este estudio se basó en los rendimientos medios discretos más bien que en la capitalización continua. Asimismo, observaron que sus resultados estaban en contra de la forma tradicional del MEDAF que suponía una relación lineal entre β y el rendimiento.

Basu en 1977 y 1983, sugirió que la relación entre los ratios precio/ganancias y los rendimientos no era debido a β. Ball en 1978 argumentó que mostrando que el comportamiento superior de las carteras con ratios bajos precio/ganancias no depende de los valores mayores de β, no era suficiente porque los ratios precios/ganancias bajos sintetizan alguna otra forma (no identificada) de relación entre el riesgo y el rendimiento pero que no había relación entre los valores de β y el rendimiento. Es difícil comprender la lógica del argumento de Ball ya que se basa en la hipótesis de que la β no mide el riesgo.

Ball (1979) y Ball-Brown (1986) no hicieron referencia a la posibilidad de que la capitalización continua y las medias aritméticas de los rendimientos pudieran dar resultados diferentes, por lo que parece existir un punto de vista ampliamente mantenido de que esto no importa demasiado.

Brailsford y Heaney en 1998, indicaron que existen varios métodos de estimar el rendimiento esperado. Los rendimientos se podrían expresar como rendimientos aritméticos, rendimientos geométricos o rendimientos capitalizados de forma continua. Entonces, aunque teóricamente éstos podrían afectar a los resultados de los contrastes del MEDAF, la elección de la estimación del rendimiento no parece afectar demasiado.

5. EL USO DE LA BETA EN LA PRÁCTICA: ALGUNAS RECOMENDACIONES.

5.1 El Análisis de la varianza

El análisis total de un título, que comprende tanto el riesgo sistemático σ_{SR} como el no sistemático, se mide por la varianza de los rendimientos, que puede separarse en dos componentes.

En los modelos de regresión, el punto hasta el que la variabilidad total de la variable dependiente se explica por la variabilidad de la variable independiente está dado por el R^2 estadístico, el cuadrado del coeficiente de correlación, que es el coeficiente de determinación. R^2 es una medida de bondad del ajuste de la línea de regresión a las observaciones obtenidas. Si todas las observaciones están en la línea de regresión, R^2=1 y las variaciones en el rendimiento del mercado explican totalmente las variaciones del rendimiento del título i. En este caso, todo el riesgo es riesgo de mercado. Se deduce que cuanto más bajo es R^2, mayor será la proporción de riesgo específico del título. Los inversores que deseen diversificar el riesgo específico sienten atracción por estos títulos. Se ha de observar que un R^2=1 no implica una Beta igual a 1. Existen títulos agresivos (β>1), neutrales (β=1) y defensivos (β<1) con R^2=1. (Los tres títulos tienen grados diferentes de riesgo de mercado).

El riesgo de mercado o sistemático es igual a R^2x varianza total, σ_T^2; ó (1-r_{jm})x desviación típica total=σ_T .

La construcción de una teoría necesita de una simplificación de los fenómenos estudiados. Para comprender y modelar cualquier proceso, se simplifican los elementos del mundo real. Mientras que se puede cuestionar un modelo basado en hipótesis simples, debido a dichas hipótesis, el control o test relevante del daño obtenido por la simplificación se obtiene examinando las relaciones entre las predicciones del modelo y los fenómenos observados del mundo real. En este caso, el test relevante es ver como describe el comportamiento de los mercados actuales de capitales el MEDAF, u otro modelo general de equilibrio.

5.2 Los Modelos: Esperanzas ex – ante y test ex –post

La mayoría de los modelos de equilibrio general se basan en el test estándar o en la forma de Beta –cero (dos factores) del modelo de equilibrio general. El MEDAF básico se puede escribir:

$$E(R_i) = R_F + \beta_i\left[E(R_M) - R_F\right]$$

La versión con préstamos o endeudamiento conocida por modelo de dos factores, se puede escribir:

$$E(R_i) = E(R_z) + \beta_i\left[E(R_M) - R_z\right]$$

Se ha de tener en cuenta que $E(R_z)$ en el rendimiento esperado de la cartera de varianza mínima que no están correlacionada con la cartera de mercado.

Se observa que estos modelos se formulan en términos de expectativas (esperanzas). Todas las variables se expresan en función de valores futuros. La Beta relevante es la Beta futura del título. Además tanto el rendimiento del mercado, como el rendimiento de la cartera de varianza mínima y Beta cero son rendimientos esperados futuros.

Puesto que no existen datos sistemáticos a largo plazo sobre expectativas, casi todos los tests del MEDAF se han realizado usando valores observados ex –post o valores observados para las variables. Esto plantea la cuestión lógica de cómo justificar los tests de expectativas en función de los resultados.

Se han realizado muchos tests del modelo estándar y de la forma de los factores, cuya exposición requeriría un volumen completo.

5.3 Algunas hipótesis sobre el MEDAF

Se han formulado algunas hipótesis sobre el MEDAF que se deben cumplir, tanto en el caso del MEDAF simple como en el modelo de equilibrio general de dos factores:

1) la primera es que los mayores valores de riesgo (Beta) han de estar asociados con un nivel más alto de rendimiento.
2) La segunda es que el rendimiento está linealmente relacionado con Beta, lo que significa que para cada unidad de incremento en Beta, existe el mismo incremento del rendimiento.
3) La tercera es que no debe existir rendimiento adicional por soportar riesgo específico (no demarcado)

Black, Jensen y Scholes fueron los primeros en realizar profundamente un test de series temporales del MEDAF. Tomaron como modelo básico de series temporales:

$$R_{it} - R_{Ft} = \alpha_i + \beta_i\left(R_{Mt} - R_{ft}\right) + \varepsilon_{it}$$

Cuando se estima esta ecuación de series temporales, los coeficientes de regresión, α_i , deben ser iguales a cero si el MEDAF simple describe rendimientos.

Con el fin de realizar el test es deseable usar un número grande de títulos. El método obvio es estimar la ecuación para cada una de las series de títulos y luego examinar la distribución de α_i . Sin embargo, esto no es apropiado porque los test de una distribución de α suponen que los términos residuales $\left(e_{it}, e_{jt}\right)$ sean independientes, y no lo son.

Un modo de simplificar el problema es desarrollar la regresión de las series temporales sobre carteras cuando Black, Jensen y Scholes forman carteras, pretenden maximizar el diferencial de las Betas en las carteras con el fin de examinar el efecto de Beta en el rendimiento. El modo más obvio de hacerlo era clasificar los títulos en carteras por Betas verdaderas, pero sólo disponían de Betas observadas. Introducen entonces una variable instrumental, que resultó ser la Beta para cada título del periodo previo Scholes empleó los datos mensuales de 5 años para estimar las Betas y clasificar los títulos en deciles (desde el más alto al más bajo).

Fue un trabajo exhaustivo que él describe con sus resultados respectivos.

Siguieron otros tests de Fama y MacBeth, y otros adicionales.

Hemos de decir que Roll no fue demasiado crítico con el MEDAF; no dijo que no era aplicable sino que tenía sus dudas.

Si supusiéramos que los inversores deberían tomar las decisiones de inversión en base a “maximizar su riqueza final”, entonces esto sería inconsistente con realizar las valoraciones en base al “rendimiento medio”, a menos que definiéramos el rendimiento medio como media de los rendimientos capitalizados de forma continua o su equivalente. Como método de estimar los capitales de los inversores, la media aritmética de los tantos de rendimiento discretos es tan inexacto como sesgado a favor de los activos volátiles.

Las medias aritméticas de los tantos de rendimiento discretos, distintas de las medias geométricas o medias del tanto instantáneo de rendimiento, no miden correctamente los capitales de las carteras de inversión en intervalos de tiempo sucesivos. Por tanto, cualquier modelo de rendimientos de inversión necesita establecer una relación entre las variables del modelo y el rendimiento continuamente capitalizado medio. Con tal fin, la evidencia empírica, basada en medias aritméticas de tanto de rendimiento, necesita tratarse con gran cuidado.

Al MEDAF a veces se le defiende en base a que es un modelo de período único. UN modelo de período único, especialmente cuando la evidencia empírica se basa en medias aritméticas de tantos de rendimiento discretos, es poco probable que sea adecuado para períodos sucesivos múltiples, cuando el número de períodos es grande, como generalmente sucede en la práctica.

Cuando se observó una relación aproximadamente lineal positiva entre los valores de β y rendimiento, la idea de “rendimiento relacionado con el riesgo” fue explotada desde un argumento de una clase interactivo a una explicación admisible del comportamiento superior de los capitales propios respecto a los títulos de interés fijo.

Se argumentó que “una relación lineal entre los valores de β y el rendimiento” significaba que la cartera de “mercado” era una cartera “eficiente” y todas las demás carteras “eficientes” debían de constar de combinaciones lineales de la cartera de “mercado” y del activo “sin riesgo”.

Este argumento exige un número de hipótesis, incluyendo el uso de la volatilidad como una medida del riesgo y la explicación usual es que los inversores racionales invertirán solamente en clases de activos más arriesgados si su rendimiento esperado es mayor que el de las otras clases.

Observadores experimentados, como Alan Kohler (2001), han observado que los inversores profesionales,si son adversos al riesgo, pueden estar más preocupados por su propio riesgo empresarial que por los riesgos de inversión a los que están exponiendo a sus clientes.

Pues –“En lugar de estar invertidos a largo plazo, los ahorros de jubilación están invertidos en activos a corto plazo, diseñados para proteger los riesgos empresariales de aquellos que realizan la inversión, no para proteger los riesgos de inversión de los clientes, incluso, maximizar los rendimientos a largo plazo; el objetivo principal de los negocios de inversión institucionales es reducir su error de seguimiento y, por tanto, reducir las posibilidades de ser despedido.

La investigación relacionada con el comportamiento del inversor está empezando a sugerir que los inversores pueden no ser adversos al riesgo. Así Coleman (2001), decía que durante los últimos veinte años, los “psicólogos y economistas del comportamiento” habían observado que la mayor parte de los individuos no son adversos al riesgo, sino que son adversos a “tener pérdidas, que es muy diferente”. La propuesta de que mucha de la evidencia empírica en pro de una relación”rendimiento y riesgo” podría ser cuestionable, está basada en la creciente evidencia de que las explicaciones fundadas en la racionalidad del inversor también son cuestionables.

Las ventajas teóricas de la capitalización continua son bien conocidas, incluso aunque la exactitud adicional no se considere siempre suficientemente importante.

Sea por simplicidad o, por otras razones, la mayor parte de las investigaciones académicas empíricas que soportan una relación positiva entre β y el rendimiento medio se ha basado en medias aritméticas de tantos de rendimiento discretos, tales como Black, Jensen y Scholes (1972) y Ball, Brown y Officer (1976). Por otro lado, la mayor parte de la investigación temprana sobre el poder predictivo de los ratios precios-ganancias, tales como Mc-Williams (1966) y Nicholson (1968) usaron tantos de rendimiento capitalizados equivalentes que pueden ser directamente transformados en tantos de rendimiento capitalizados de forma continua.

La práctica aportada por la investigación académica respecto a la relación entre factores tales como ratios precios-ganancias y los valores normales (contables) es variada. Basu (1977 y 1983) utilizó la capitalización continua mientras que Fama y French (1992) usaron predominantemente medias de rendimientos discretos.

Si la única base aceptable para considerar la evidencia empírica que relaciona las teorías de la inversión y/o los modelos son los tantos de rendimiento capitalizados de forma continua o sus equivalentes, entonces una gran parte de la evidencia existente puede ser necesario remodelarla o no considerarla, porque conduce a error.

Realizar estudios respecto a la relación entre β y el rendimiento, utilizando la capitalización continua, es evidentemente un área importante para investigaciones posteriores.

Teniendo en cuenta los diferentes modos de medir el rendimiento, parece probable que la controversia entre mercados eficientes y el poder predictivo entre los indicadores de valor, tales como los rendimientos de los dividendos, los ratios precios-ganancias y los valores nominales (contables) tuvo un fallo de comunicación entre los grupos que utilizaban definiciones diferentes del rendimiento medio.

Mientras tanto, la existencia y extensión de cualquier relación significativa entre β y el rendimiento medida por medio de los tantos de rendimiento capitalizados de forma continua está lejos de estar lo suficientemente claro. Desde el punto de vista de un inversor a largo plazo, para quien un modelo de un solo período no es lo adecuado, la relación puede llegar a ser bastante menor del uno por ciento mensual que parece aplicarse a medias aritméticas de tantos de rendimiento discretos, tal como lo han documentado Black, Jensen y Scholes (1972).

Basados en la evidencia, no muy amplia de Basu (1977 y 1983) y Dreman (1982) la relación entre los valores de β y los tantos de rendimiento capitalizados de forma continua (o bien, ponderados en el tiempo) puede ser incluso ligeramente negativa.

Debido a la duda respecto a la relación entre los valores de β y el rendimiento a largo plazo de los capitales, la exportación de este argumento como explicación del comportamiento a largo plazo superior de las acciones ordinarias, comparado con las obligaciones, está abierto a la discusión. Puede existir una prima equitativa, pero la volatilidad y el comportamiento adverso al riesgo por los inversores puede no ser la explicación.

Received June 2005
Revised September 2006

REFERENCIAS

BALL, R.(1978) Anomalies in Relationships between Securities Yields and Yield- Surrogates, **Journal of Financial Economics**, 6, 103-126.

BALL, R., BROWN, P., and OFFICER, R.R. (1976) Asset pricing in the Australian equity market, **Australian Journal of Management** , 1, 1-32.

BALL, R. and BROWN, P. (1980) Risk and return from equity investments in the Australian mining industry: January 1958 to February 1979, **Australian Journal of Management,** 5 45-66.

BASU, S. (1977), Investment performance of Common Stocks in relation to their Price- Earnings ratios: a test of the efficient markets hypothesis, **Journal of Finance**, 32, 663-682.

BASU, S. (1983), The Relationship Between Earnings Yield, Market Value and Return for NYSE Common Stocks: Further Evidence**, Journal of Financial Economics** 12, 129-156.

BLACK, F. (1972), Capital market equilibrium with restricted borrowing, **Journal of Business,** 45, 444-455.

BLACK, F., JENSEN, M.C. and SCHOLES, M. (1972), **The Capital Asset Pricing Mode1: Some Empirical Tests** Studies in the Theory of Capital Markets, Praeger Publishing, New York.

BRAISFORD, T. and HEANEY, R. (1998), **Investments: Concepts and Applications in Australia**, Harcourt Brace, Sydney.

COLEMAN, A.M. (2001). Presidential Address. **Australian Actuarial Joumal ,**l 7. Issue 1
.

DREMAN, D.N. (1982). **The New Contrarian Investment Strate***gy*, Random House, New York.

FABOZZI, F. and MODIGLIANI, F. (2003), **Capital Marke**ts , Prentice Hall, New Jersey.

FAMA, E.F. and FRENCH, K.R. (1992). The Cross-Section of Expected Stock Returns, **Journal of Finance** 47, 427 - 465.

JENSEN, M.C. 1972. **The Foundations and Current State of Capital Market Theory,** Studies in the Theory of Capital Markets, Praeger Publishing, New York.

KOHLER, A. (2001). The Super Mess, **Australian Financial Review**, April, 12-16 .

LINTNER, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets**, Review of Economics and Statistics** 47, 13-37.

MCWILLIAMS, J.D. (1966). Prices, Earnings and P-E ratios, **Financial Analysts Journal** May-June. 137-142.

MARKOWITZ, H. (1959) **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments**, Wiley, New York.

PIKE, R. and NEALE, B. (2003) **Corporate Finance and Investment**, Prentice Hall, London.

SHARPE, W.F. and COOPER, G.M. (1972) Risk-return classes of New York Stock Exchange common stocks 1931-1967, **Financial Analysts Journal** XXVIII, No 2.

SHARPE, W.F. (1964) Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk, **Journal of Finance**, 19, 425-442.

WALSH, D.A. (1976) Asset Pricing Model, **Transactions of the Institute of Actuaries of Australia and New Zealand**, 167-214.