EDUCATION ISSUES / ASPECTOS EDUCACIONALES

PROPUESTA DE MODELO DIFUSO SOBRE EVALUACION DEL APRENDIZAJE

Luís Manuel Alonso Aguila[1]
Departamento de Ingeniería Industrial
Facultad de Ingeniería Industrial
CUJAE

RESUMEN

El trabajo se fundamenta desde el punto de vista pedagógico en los conceptos de Etapas del Proceso de Asimilación y Ley de Interiorización de las Acciones, y para tales fines se consideran los criterios de generalización e independencia que se formulan en términos de funciones de pertenencia. Se utiliza el Principio de Extensión de Zadeh para arribar a los resultados propuestos. El trabajo permite evaluar al proceso docente educativo no solo mediante resultados sino también como PROCESO a partir de la sencilla idea de que al principio la dependencia es máxima y la generalización es mínima, pero con el tiempo se van invirtiendo los niveles.

ABSTRACT

From the pedagogical point of view the work is based on the concepts of stages of assimilation and law of internalization of the actions and for such purposes, criteria of generalization and independence formulated in terms of membership functions are considered and the Zadeh's extension principle is used to achieve the proposed results. The work allows the assessment of the educational process not only by results but also as a PROCESS based on the simple idea that the dependence is maximum at the beginning and the generalization is minimum but over the time these levels reverse.

KEY WORDS: Stages of the Assimilation Process, Law of Internalization of Actions, Fuzzy Logic, Precise Natural Language, Zadeh's Extension Principle.

MSC: 97D40

1 INTRODUCCIÓN

Es conocido que los modelos matemáticos basados en principios deterministas o en principios estadísticos, se han utilizado siempre en la solución de los más variados problemas de las ciencias naturales, tanto con carácter empírico como teórico. Fenómenos de naturaleza inorgánica o inanimada regidos por leyes de la mecánica, de la física, o de la química, así como fenómenos de naturaleza orgánica o animada a los que se unen también principios y leyes biológicas ya sea con carácter dinámico o estático, han resultado fácilmente asimilables por estos modelos matemáticos.

Por otra parte, aquellos modelos matemáticos que pretenden describir fenómenos sociales, deberán tener en cuenta entre otras cosas, dos tipos de factores que se dan en ellos: los factores objetivos, es decir aquellos que resultan independientes de las personas como las condiciones naturales o los recursos materiales existentes y los factores subjetivos, es decir aquellos que dependen de los modos de pensar y actuar de los hombres, de su conciencia, su voluntad, o sus deseos, por lo que el estudio de fenómenos de carácter eminentemente social no siempre puede abordarse a partir de modelos matemáticos basados en la aritmética de la certeza o de la aleatoriedad, debido a que en estos fenómenos la información que se dispone muchas veces está cargada de subjetividad e incertidumbre.

[1] lmalonso@ind.cujae.edu.cu

En 1965 Lotfy A. Zadeh publica los primeros trabajos sobre subconjuntos borrosos [7], [8]. Si bien al principio no tuvieron gran acogida, con el tiempo sus ideas se han ido desarrollando con aplicaciones en la ingeniería y en la esfera económica y de gestión empresarial. Por otra parte, en los últimos años han ganado terreno muchos modelos y algoritmos que han ido conformando los cimientos de lo que se ha dado en llamar Matemática Numérica y no Numérica en la Incertidumbre. Para ello se ha tomado como fundamento a la lógica difusa con sus variadas interpretaciones, y con estas herramientas se pueden modelar muchos fenómenos de carácter eminentemente social donde no resulta muy confiable siquiera asumir ciertas leyes estadísticas para su tratamiento dado que la información de que se dispone se encuentra deficientemente estructurada.

Modelos asociados a los conceptos de relación, asignación, agrupación y ordenación, [4], entre otros, algunos conocidos desde hace bastante tiempo, le pueden facilitar el camino a quienes tienen que tomar partido por una alternativa frente a otra u otras, es decir tomar decisiones. Estos modelos también se han utilizado con éxito en los últimos años en la esfera económica y de gestión. No resulta habitual la aplicación de estas herramientas en la actividad educativa, por lo que este trabajo puede considerarse una contribución de su aplicabilidad también en tareas asociadas a la actividad docente.

El proceso de asimilación de nuevos conocimientos y habilidades transcurre siempre mediante varias etapas. Estas etapas se caracterizan por los cambios que se operan en cada una de las características de las acciones, es decir en la forma, el grado de generalización, el grado de despliegue, el grado de independencia y el grado de dominio. La forma cambia de la material o materializada a la forma perceptiva, después a la forma verbal externa y por último a la forma mental. El grado de generalización va aumentando mientras que el grado de despliegue se va reduciendo, la acción se abrevia y el individuo la realiza cada vez más rápido. En el caso de la independencia se avanza desde la acción compartida, es decir con ayuda del que enseña, hacia la acción independiente del individuo. En cuanto al grado de dominio al principio se es consciente de todas las operaciones que integran la acción y poco a poco una parte de estas operaciones pasa al subconsciente y en una etapa superior se convierte en una acción automatizada. Este proceso se conoce como ley de interiorización de las acciones [6].

La primera etapa o etapa cero es la etapa de motivación, a ella le sigue la etapa de formación de la base orientadora de la acción y de manera sucesiva etapas sobre la participación activa de los estudiantes tomándose como base cada vez un mayor trabajo independiente. Al final deberá lograrse la máxima generalización e independencia absoluta. Una manera de estimular la motivación y orientación puede ser formulando problemas que se correspondan con situaciones prácticas. Es bueno precisar que el tránsito por etapas no es uniforme para todos los estudiantes y además entre una y otra etapa no existen fronteras nítidamente definidas. La base orientadora implica una imagen de la acción a realizar, es lo que el sujeto sabe de la acción en si y de las condiciones en que debe realizarse.

En general se distinguen diferentes tipos de base orientadora de la acción, pero se pueden resumir en tres tipos generales: el primer tipo se caracteriza porque el individuo actúa por la vía del ensayo-error. Se trata de una base incompleta porque el sujeto no recibe todos los conocimientos sobre la acción, sino que él mismo trata de encontrarlos, probando de forma ciega. Se trata de una manera poco práctica para adquirir muchos conocimientos en breve tiempo. El segundo tipo se caracteriza por el hecho de que al alumno se le ofrece desde el inicio un sistema completo y preelaborado de orientaciones, mientras que en el tercer tipo la orientación se da sobre la base de las llamadas "*invariantes o esencias*" que le permiten al sujeto a partir de una orientación general básica, resolver cualquier caso particular. En resumen, el primer tipo es incompleto, concreto e independiente por el modo de obtención, el segundo tipo es completo, concreto, y no se obtiene de manera independiente. Por último, el tercer tipo es completo, generalizado e independiente y como regla supera a los anteriores.

Para el desarrollo de este trabajo se asume como elementos principales, los niveles de generalización y de independencia que se van logrando a medida que transcurre el proceso docente educativo de un tema, una asignatura, disciplina o carrera. En un proceso que se desarrolle en condiciones normales, al principio se tiene una máxima dependencia y una mínima generalización y con el paso del tiempo se van invirtiendo estos elementos.

Se define el grado de generalización como el cociente entre las posibilidades objetivas del sujeto para resolver una tarea y las posibilidades subjetivas de hacerlo, de tal manera que el grado de generalización toma valores entre cero y uno. Valores próximos a cero implican un escaso grado de generalización mientras que valores próximos a uno significan un alto grado de generalización.

El grado de dependencia se define de la manera siguiente: primero se obtiene la relación entre la capacidad de resolver solo una tarea y la capacidad de hacerlo con ayuda del profesor o de otros compañeros y este cociente se resta de uno. Si la capacidad de resolver solo la tarea coincide con la capacidad de hacerlo con ayuda del profesor o de otros compañeros entonces el grado de dependencia es mínimo y toma el valor cero, y si esa capacidad es nula entonces la dependencia es máxima y toma el valor uno. Lo expresado se puede definir mediante las siguientes igualdades:

$$\text{Grado de generalización} = \frac{\text{Posibilidades objetivas de resolver un problema}}{\text{Posibilidades subjetivas de resolver un problema}}$$

$$\text{Grado de dependencia} = 1 - \frac{\text{Capacidad de resolver un problema de manera Independiente.}}{\text{Capacidad de resolver un problema con ayuda del profesor o de otros compañeros.}}$$

Este trabajo se nutre de dos fuentes principales, por una parte se toma como fundamento psicológico y pedagógico a las etapas del proceso de asimilación y la ley de interiorización de las acciones con los niveles de generalización y de dependencia como elementos principales [6]. Por otra parte se toma como fundamento matemático a los principios del Lenguaje Natural Precisado [9], [10] que en esencia consiste en lo siguiente: Dada una proposición **P** expresada en lenguaje natural, y una pregunta **Q** también en lenguaje natural, obtener una respuesta a **Q** dado **P** que denotaremos como **Q/P**. Para los objetivos de este trabajo se consideran las proposiciones siguientes:

P: Para un grupo de estudios la mayoría de los estudiantes del grupo son mucho más generalizadores que dependientes.

Q: ¿Cual es la diferencia entre los niveles de generalización y de dependencia en el grupo de estudios?

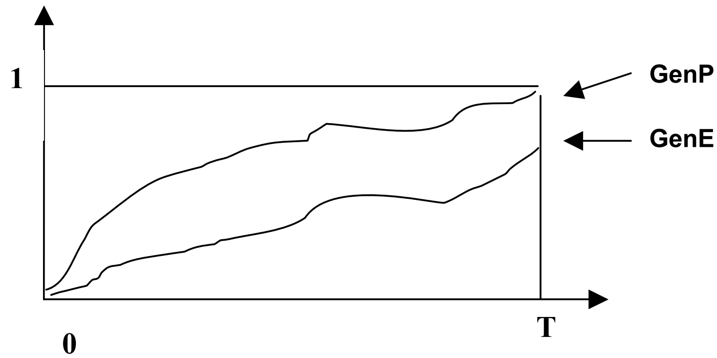
El tratamiento matemático de este problema requiere su formalización mediante la Lógica Borrosa y el uso del Principio de Extensión de Zadeh expuesto desde su artículo cenital de 1965 [7] y enriquecido en [9] y [10]. Aun en el caso de que para un grupo de estudios ninguno de los estudiantes sea mucho más generalizador que dependiente, la proposición resulta válida ya que en ese caso los estudiantes son mucho más generalizadores que dependientes en grado cero. En el modelo que se expone a continuación se aclara el valor práctico de la pregunta **Q**.

2. MODELO DIFUSO PARA LA EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

El modelo propuesto utiliza como criterios para la evaluación del aprendizaje a los niveles de generalización y de independencia del profesor y de los estudiantes. Se asumen las siguientes notaciones:

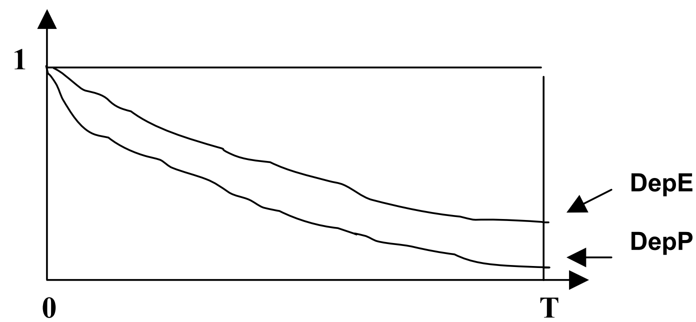
GenP: Grado de generalización que propicia o estimula el profesor.
GenE: Grado de generalización que va logrando el estudiante.

Las curvas **GenP** y **GenE** pueden interpretarse como las funciones de pertenencia asociadas a los subconjuntos borrosos que representan respectivamente a la generalización del profesor y del estudiante, para cada instante de tiempo en el intervalo **[0,T]**. Al principio los niveles de generalización tanto del profesor como del estudiante son nulos, pero con el paso del tiempo se incrementan con la condición de que el nivel de generalización al que aspira el profesor que tengan sus estudiantes **(GenP)** siempre es superior al que estos van logrando **(GenE)**.



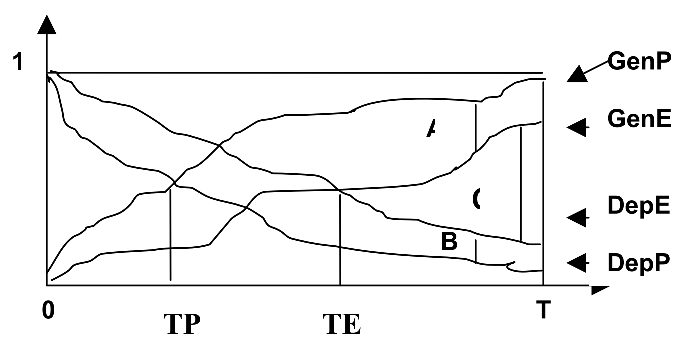
Para los niveles de dependencia se consideran las siguientes notaciones:

DepP: Grado de dependencia que estimula o propicia el profesor.
DepE: Grado de dependencia que tiene el estudiante.



Al principio el grado de dependencia es máximo y a medida que transcurre el tiempo disminuye la dependencia pero siempre con la condición de que el grado de dependencia real que tiene el estudiante **(DepE)** siempre es mayor al grado de dependencia a que aspira el profesor que este tenga **(DepP)**.

La combinación de ambos gráficos conduce a resultados interesantes como se expone a continuación:



El tiempo **T** dado al tema, asignatura o curso se divide en tres etapas: **[0,TP]**, **[TP,TE]** y **[TE,T]**. **TP** y **TE** son los instantes de tiempo donde coinciden los grados de generalización y de dependencia del profesor y del estudiante respectivamente. La primera etapa **[0,TP]** es la etapa de motivación y de desarrollo de la base orientadora de la acción, lo característico de esta etapa es la escasa generalización y elevada dependencia tanto por el docente como por el estudiante. En esta primera etapa el papel principal lo tiene el docente. La segunda etapa **[TP,TE]** es una etapa de elaboración conjunta entre el profesor y sus estudiantes, el profesor es cada vez más generalizador que dependiente, es decir se separan cada vez mas los niveles de generalización y dependencia del profesor mientras que se acercan cada vez más los niveles de generalización y dependencia del estudiante.

Si bien el punto **TP** depende más del profesor y en menor medida de los estudiantes, el punto **TE** depende más de cada estudiante en particular ya que no todos alcanzan al mismo tiempo el nivel donde coinciden la generalización y la dependencia. El valor **TE** es función del grado de asimilación de cada estudiante. La tercera etapa **[TE,T]** es la etapa donde predomina el trabajo independiente del estudiante, es decir es la etapa donde el estudiante tiene niveles de generalización superiores a los de dependencia, lo cual no significa que todo lo pueda hacer solo, pero está en condiciones de ser cada vez menos dependiente y más generalizador.

Nótese que es deseable que los valores **A** y **B** sean pequeños ya que con esto se indica que los niveles de generalización y de dependencia del estudiante estén próximos a los del profesor, pero este criterio por sí solo resulta engañoso ya que puede ocultar limitaciones o insuficiencias en el trabajo del docente. Si un docente propicia un bajo nivel de generalización y un elevado nivel de dependencia, las curvas **GenP** y **DepP** tienen poco comportamiento asintótico al punto 1 y al eje de abscisas respectivamente y entonces **A** y **B** pueden ser relativamente pequeños pero no dan idea de buenos niveles de generalización y dependencia por el estudiante. Una manera de superar esta limitante es considerar el valor **C = GenE - DepE**. Valores grandes de **C** dan idea de que el estudiante es mucho más generalizador que dependiente y de hecho para que esto ocurra deben ser pequeños **A** y **B**. Por otra parte, el profesor deberá propiciar la máxima generalización y la mínima dependencia (o bien máxima independencia) no existiendo una fórmula para lograrlo. Aquí inciden muchos factores que conforman lo que se conoce como *"maestría pedagógica"* del profesor y en esto inciden su experiencia docente, su nivel de comunicación con los estudiantes, su preparación pedagógica, metodológica y psicológica, interés y motivación personal, estado de ánimo, carisma etc.

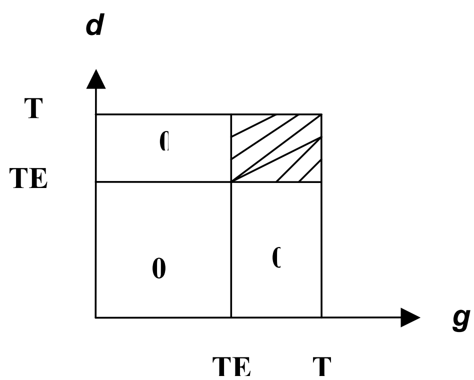
Considérese ahora un grupo de estudios formado por **n** estudiantes y retomemos la proposición **P**:

P: La mayoría de los estudiantes del grupo son mucho más generalizadores que dependientes.

Esta proposición puede formalizarse mediante las siguientes funciones de pertenencia:

$$\mu_i(t) = \mu_{much}(g_i(t),d_i(t)) \quad 1 \leq i \leq n$$

Función de pertenencia asociada al subconjunto borroso que representa el grado en que el i-ésimo estudiante es mucho más generalizador que dependiente en el instante **t**, para **t** en el intervalo **[0,T]**. Nótese que en el intervalo de tiempo **[0,TE]** esta función toma el valor cero ya que el grado de generalización siempre es inferior al grado de dependencia y solo toma valores positivos para la región sombreada **[TE,T]× [TE,T]** como se muestra en la figura. Las funciones $g_i(t)$ y $d_i(t)$ representan los grados de generalización y dependencia respectivamente.

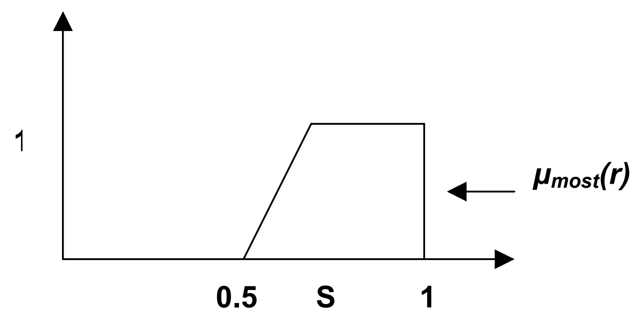


$$\mu_i(t) = \mu_{much}(g_i(t),d_i(t))$$

Si se considera $r(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t)$ entonces con esta expresión se indica la cantidad relativa de estudiantes del grupo que son mucho más generalizadores que dependientes en el instante **t**. Nótese que ***0 ≤ r(t) ≤ 1***.

Con la expresión ***K(t) =*** $\boldsymbol{\mu_{most}(r(t))}$ se indica el grado en que la mayoría de los estudiantes del grupo son mucho más generalizadores que dependientes en el instante **t**.

La función $\boldsymbol{\mu_{most}}$ se utiliza mucho en aplicaciones sobre Lógica Difusa y se define de la manera siguiente: para valores entre **0** y **0.5** toma el valor cero, para valores entre **0.5** y **S** toma valores según una recta inclinada y para valores entre **S** y **1** toma el valor **1**. El valor **S** lo define el investigador de acuerdo a las características y necesidades del problema.



Los puristas podrán observar que la expresión ***r(t)*** es de naturaleza estadística, por indicar una *"media o promedio"* . En la práctica en un modelo borroso pueden mezclarse conceptos y leyes propios de esta lógica con otros de las Probabilidades y la Estadística.

Considérese las siguientes notaciones:

G representa la familia de funciones de pertenencia que miden el grado de generalización.

D representa a la familia de funciones de pertenencia que miden el grado de dependencia.

g y **d** representan a un elemento cualquiera de **G** y **D** respectivamente.

$\mathbf{g_i(t)}$ y $\mathbf{d_i(t)}$ representan respectivamente los grados de generalización y de dependencia para el estudiante **i** en el instante **t.**

Retómese la pregunta:

Q: ¿Cuál es la diferencia entre los niveles de generalización y de dependencia en el grupo de estudios ?. Ya se vio que esta pregunta se corresponde con el análisis realizado sobre el valor **C = GenE – DepE**.

Es posible responderla mediante la aplicación del Principio de Extensión de Zadeh con la función de pertenencia ***μ(t,v)*** definida de la manera siguiente:

$$\mu(t,v) = \sup_{\substack{g \in G \\ d \in D}} K(t)$$

con la condición $v = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} g_i(t) - \sum_{i=1}^{n} d_i(t)\right] \qquad g_i(t) \geq d_i(t)$.

Nótese que ***0 ≤v ≤1***

De no existir el supremo para algún ***(t,v)*** se le asigna el valor cero a ***μ(t,v)***. Si

$t = t_0$ entonces $\mu(t_0,v)$ es la función de pertenencia asociada a la diferencia entre los niveles de generalización y dependencia en el instante t_0.

Como se observa, en este modelo se considera que los grados de generalización e independencia se miden con muchas funciones $g_i(t)$ y $d_i(t)$. Sobre esa base es el sentido que se le asigna al supremo a que hace referencia la función $\mu(t,v)$.

3. VALOR PRÁCTICO DE LOS RESULTADOS

Primeramente se analizan los siguientes casos extremos:

a)- $g_i(t) = d_i(t)$ para todo $1 \le i \le n$ en un sub intervalo del intervalo de tiempo **[TE,T]**. En este caso $v=0$, $\mu_i(t) = \mu_{much}(g_i(t), d_i(t)) = 0$, $r(t) = 0$, $k(t) = 0$, $\mu(t,v) = \mu(t,0) = 0$. Se trata de un caso hipotético donde para todos los estudiantes del grupo coinciden los niveles de generalización y de dependencia y el grado de la respuesta a la pregunta **Q** para este caso es mínimo (**cero**), coincidiendo con la aplicación del modelo.

b)- $g_i(t)=1$, $d_i(t)=0$ para todo $1 \le i \le n$ en un sub intervalo del intervalo de tiempo **[TE,T]**. En este caso $v = 1$, $\mu_i(t) = 1$, $r(t) = 1$, $k(t) = 1$, $\mu(t,v) = 1$. Se trata también de un caso hipotético donde todos los estudiantes del grupo tienen al nivel máximo la generalización y al nivel mínimo la dependencia y el grado de la respuesta a la pregunta **Q** para este caso es máximo (**uno**) coincidiendo con la aplicación del modelo.

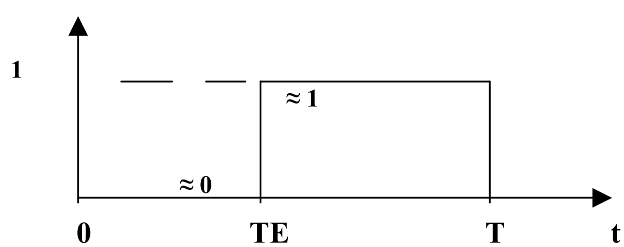
En la práctica, como ya se ha explicado, los estudiantes del grupo alcanzan los niveles de generalización coincidentes con los de dependencia en instantes diferentes, por lo que la condición $g_i(t) \ge d_i(t)$ se va alcanzando en instantes de tiempo posteriores a **TP**, primero para pocos estudiantes que son los que muestran un aprovechamiento académico superior y progresivamente con el resto de los estudiantes.

Se considera como valor **TE** aquel para el cual el primer estudiante del grupo logra niveles de generalización coincidentes con los de dependencia. A partir de este instante de tiempo se comienzan a obtener valores pequeños de v de acuerdo con la expresión $v = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} g_i(t) - \sum_{i=1}^{n} d_i(t)\right]$,

$g_i(t) \ge d_i(t)$. En este caso se tienen las siguientes aproximaciones: $v \approx 0$, $\mu_i(t) \approx 0$ (para aquellos valores de i que tributan a los valores v), $r(t) \approx 0$.
De aquí se concluye que $k(t) = 0$ y $\mu(t,v) = 0$.

En la etapa final debe ocurrir lo contrario, es decir $g_i(t) \approx 1$, $d_i(t) \approx 0$, por tanto $v \approx 1$, $\mu_i(t) \approx 1$, $\mathbf{r(t)} \approx 1$. De aquí se concluye que $K(t)=1$ y $\mu(t,v)=1$

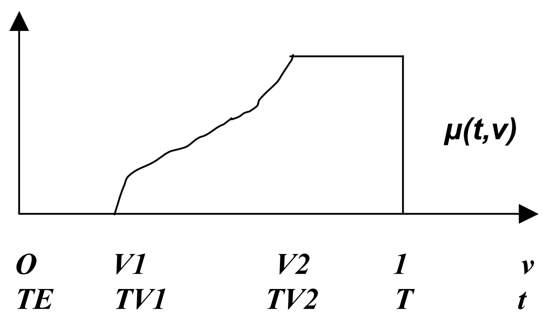
La siguiente gráfica muestra el dominio de $\mu(t,v)$ y los valores aproximados que toma próximos a **(TE,0)** y **(T,1)**.



Para un proceso normal puede darse la siguiente representación para $\mu(t,v)$

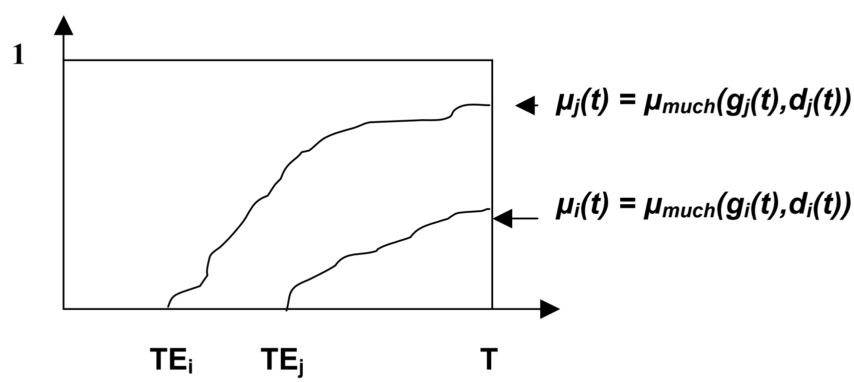
Para ilustrar mejor la idea se ha situado en el eje de abscisas los siguientes valores de v: $0, V1, V2$ y 1 correspondientes a los valores de ***TE, TV1, TV2*** y ***T*** del tiempo.

Un proceso normal en un grupo de estudios debe seguir un comportamiento como el siguiente: Etapa inicial **(TE,TV1),** etapa intermedia **(TV1,TV2)** y etapa final **(TV2, T)**. En este caso si el intervalo de tiempo **(TE,TV1)** es muy grande el proceso en ese grupo de estudios no funciona bien ya que esto significa que para mas tiempo del previsto los niveles de generalización no superan significativamente a los de dependencia. Si **(TE,TV1)** es pequeño y **(TV2, T)** es grande esto significa un elevado aprovechamiento académico de los estudiantes ya que durante un largo período de tiempo los niveles de generalización están casi al máximo y los de dependencia casi al mínimo. De igual forma si se logran alcanzar los instantes de tiempo **TV1** y **TV2** con mucha rapidez esto indica un alto aprovechamiento académico mientras que si **TV1** se alcanza mas tardíamente se corre el riesgo de que **TV2** no se alcance antes del tiempo **T** final del proceso y esto significa un débil aprovechamiento académico.

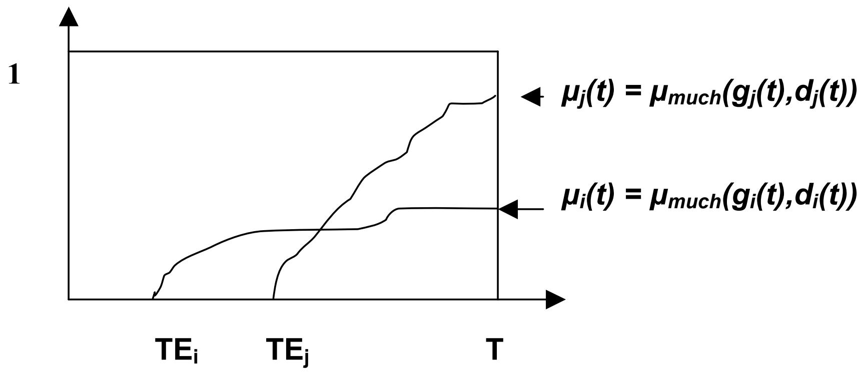


Como en el modelo se construye una correspondencia entre el intervalo de tiempo **[TE,T]** y el intervalo **[0,1]** asociándose **0** con **TE**, **V1** con **TV1**, **V2** con **TV2** y **T** con **1** se pueden hacer comparaciones con intervalos de tiempo diferentes y esto es de gran utilidad para el estudio del proceso docente educativo . Así por ejemplo el modelo permite comparar un mes o un trimestre con un semestre, un año con dos años o con todo el período lectivo de la carrera. Lo normal debe ser que para un período mayor de tiempo los valores **V1** y **V2** se sitúen más a la izquierda, es decir más próximos a cero. Las ideas expuestas también son válidas si en lugar de un grupo de estudios se analiza un único estudiante.

La metodología propuesta no es *"discriminatoria"* ni *"elitista"* en el sentido de solo apreciar a los más capaces, sino que recoge también la posibilidad de aquellos que al principio no demuestran un elevado aprovechamiento académico y después pueden avanzar y superar a los que arrancaron mejor.



En este caso el estudiante **i** logra ser mucho más generalizador que dependiente primero que el estudiante **j** y siempre mantiene esta condición.

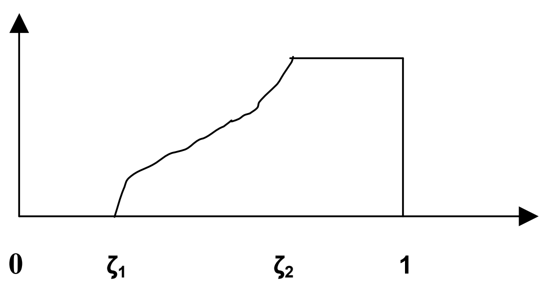


En este caso el estudiante **i** también logra ser mucho más generalizador que dependiente primero que el estudiante **j**, pero a partir de cierto momento el estudiante **j** supera al estudiante **i**. Este fenómeno resulta habitual en la actividad docente.

Considérese el conjunto **F** de todas las funciones **f(x)** con dominio en el intervalo **[0,1]** definidas de la manera siguiente: para dos valores cualesquiera ζ_1 y ζ_2 que cumplan la condición $\mathbf{0 < \zeta_1 < \zeta_2 < 1}$

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{0 \text{ si } 0 \leq x \leq \zeta_1} \\ \mathbf{1 \text{ si } \zeta_2 \leq x \leq 1} \\ \textbf{Continua y creciente en } [\zeta_1, \zeta_2] \end{cases}$$

Por construcción est e tiene:



Para las operaciones conocidas de unión e intersección el conjunto **F** tiene estructura de retículo distributivo [3]. Más precisamente sean **f(x)** y **g(x)** dos elementos de **F** entonces la unión de **f** y **g** se define como:
(f U g)(x) = max{ f(x), g(x) } y la intersección entre **f** y **g** se define como:
(f ∩ g)(x) = min{ f(x), g(x) }. Estas operaciones cumplen las leyes asociativa, conmutativa, distributiva, de idempotencia y de absorción. En **F** se puede también establecer una relación de orden de la manera siguiente: **f ≤ g** si para todo **x** se cumple que **f (x) ≤ g(x)**.

Al considerarse el conjunto $\mathbf{E = \{ E_1, E_2, \ldots\ldots, E_k \}}$ formado por **k** asignaturas que recibe el grupo de estudios, entonces para cada asignatura se tiene una función $\mu_i(t,v)$ diferente para cada $1 \leq i \leq k$. En el supuesto de un proceso que transcurra en condiciones normales estas funciones pueden interpretarse como elementos del conjunto **F.** Esta observación puede aprovecharse para evaluar aspectos de interés asociados al proceso docente educativo ya que si por ejemplo en un subgrupo de asignaturas se tiene que el mínimo que representa ***"lo peor"*** se comporta casi igual o mejor que el máximo que representa ***"lo mejor"*** para otro subgrupo de asignaturas, entonces este segundo subgrupo tributa poco respecto al primero en cuanto al desarrollo de elevados niveles de generalización e independencia en los estudiantes.

Si las funciones $\boldsymbol{\mu_i(t,v)}$ y $\boldsymbol{\mu_j(t,v)}$ asociadas a dos asignaturas $\mathbf{E_i}$ y $\mathbf{E_j}$ respectivamente se pueden ordenar de tal manera que $\boldsymbol{\mu_i \leq \mu_j}$ entonces esto significa que la asignatura $\mathbf{E_j}$ tributa mas al desarrollo de los niveles de generalización e independencia que la asignatura $\mathbf{E_i}$ en el sentido de que lo hace en mayor grado primero que $\mathbf{E_i}$ **.**

4. CONCLUSIONES

La construcción de un modelo matemático siempre resulta algo así como *"un parto"* al que se llega después de largas y profundas meditaciones. Este trabajo no es una excepción, ya que pretende ofrecerle, a los estudiosos de las Ciencias Pedagógicas, un camino diferente para abordar el estudio de aspectos medulares asociados con la actividad docente, sobre la base de las condiciones de subjetividad e incertidumbre que la caracterizan. Se trata de un camino no trillado que toma como fundamento matemático a la Lógica Difusa, la cual ha encontrado múltiples aplicaciones en economía, ingeniería y hasta en medicina, pero no en la actividad educacional.

El objetivo del trabajo ha sido proponer un modelo teórico que caracterice a la evaluación del aprendizaje, con el cual se amplían los principios y métodos que en materia de evaluación pueden considerarse. Se fundamenta en conceptos propios de la Pedagogía y la Psicología aplicada a la enseñanza, como los de Etapas del proceso de Asimilación y Ley de Interiorización de las Acciones. Su valor principal consiste en encontrar una formulación matemática que se apoye en esos conceptos mediante el uso del Principio de Extensión de Zadeh.

Resulta deseable la aplicabilidad del modelo en una situación real. Esto requiere, por una parte, estudiar la manera de obtener los niveles de generalización e independencia para formar las funciones de pertenencia, y de igual forma, analizar entre las diversas variantes que pueden asumirse para las funciones $\boldsymbol{\mu_{much}(g_i(t),d_i(t))}$ y $\boldsymbol{\mu_{most}(r)}$, cuales se adaptan mejor a los requerimientos del modelo. Por otra parte, es conocido que en medios académicos las discusiones sobre que y como evaluar generalmente se reducen a las diversas maneras de medir el grado de cumplimiento de los objetivos para un tema o una asignatura, lo cual no deja de ser esencial, pero con este modelo se aspira a evaluar el proceso docente educativo precisamente como un proceso que transcurre en el tiempo, y esto requiere un enfoque metodológico más abarcador que debe continuar estudiándose.

El grado de generalización depende entre otros factores, de los niveles de sistematicidad y de profundidad con que se trata el contenido. Si por ejemplo, se trata de un curso de matemática para carreras de ingeniería, los teoremas y propiedades pueden estudiarse a diferentes niveles de profundidad que van desde el conocimiento de sus hipótesis y tesis, sus interpretaciones geométricas o físicas en caso de que existan, las ideas sobre como demostrarlos o cuasi demostraciones, hasta las demostraciones formales. Los teoremas de existencia y unicidad generalmente no se demuestran por apoyarse en conceptos que salen de un curso para la formación de ingenieros.

Para aquellas ramas de la ciencia donde se utilicen de manera natural herramientas matemáticas, la metodología propuesta resultará más comprensible y podrá facilitar en sus estudiantes y docentes ser conscientes de un proceso de naturaleza muy compleja como el proceso docente educativo.

RECEIVED NOVEMBER 2009
REVISED JANUARY 2010

REFERENCIAS

[1] ALVAREZ DE ZAYAS CARLOS M. (1999): **La Escuela en la Vida**. Editorial Pueblo y Educación. La Habana .

[2] BALLESTER B. L. y COLOM C. A. (2006): Lógica difusa: una nueva epistemología para las Ciencias de la Educación **Revista de Educación** 340, 995 – 1008.

[3] DUBREIL P., DUBREIL JACOTIN M. L.(1967): **Lecciones de Algebra Moderna** Edición Revolucionaria La Habana 1967.

[4] GIL ALUJA J. (1999): **Elementos para una teoría de la decisión en la incertidumbre**. Editorial Milladoiro España.

[5] GONZÁLEZ PÉREZ M. (2000): Evaluación del aprendizaje en la enseñanza universitaria. **Revista Pedagogía Universitaria**, 5 No.2.

[6] TALÍZINA N. F. (1985): **Conferencias sobre los fundamentos de la enseñanza en la Educación Superior** Universidad de la Habana , La Habana.

[7] ZADEH L. A. (1965):Fuzzy Sets . **Information and Control** , 8 338-353.

[8] ZADEH L. A. (1965): Fuzzy Sets and Systems In Fox, J ed. **System Theory Politechnic Press,** New York.

[9] ZADEH L. A (2005): Toward a generalized theory of uncertainty (GTU)- an outline. **Information Sciences** 172, 1- 40.

[10] ZADEH L. A (2006): Generalized theory of uncertainty – principal concepts and ideas. **Computational Statistics and Data Analysis** 51, 15- 46.