

# LOCALIZACIÓN EN UNA RED CON PATRÓN DE ELECCIÓN DEFINIDO POR UNA DISTANCIA UMBRAL

Blas Pelegrín Pelegrín<sup>1</sup>, Saúl Cano Hernández<sup>2</sup>

Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Murcia.

## ABSTRACT

We consider the facility location problem on a network for an entering firm, in competition with other already established facilities, with the objective of market share maximization. The consumers choose the facility from which they obtain a maximum utility (binary preference). If a consumer obtains the maximum utility from a preexisting center and a new one, a proportion of his demand is captured by the new facility. The location candidates are the nodes and the points in the edges of the network. If the highest utility is obtained from a facility located to a distance within a certain threshold from the customer, it is proved that the set of candidates to optimal solution is a finite set of points in the network. A procedure to generate the candidates to optimal location is given and a formulation as a mixed integer linear programming problem is presented. A sensitivity analysis related to the proportion, the number of preexisting facilities and the number of new facilities, applied to the Region of Murcia (Spain), is shown.

**KEYWORDS:** Competitive location, binary choice, threshold distance, discrete optimization.

**MSC:** 90C10

## RESUMEN

Se considera el problema de localización de centros para una firma entrante en una red de transporte, en competencia con otros centros ya establecidos y con el objetivo de maximizar la cuota de mercado. Los consumidores compran en el centro del que obtengan la mayor utilidad (patrón binario). Si un consumidor obtiene la misma utilidad en un centro preexistente y uno nuevo, una proporción de su demanda es capturada por el nuevo. Las posibles localizaciones son los nodos y los puntos en los tramos de la red de transporte. Si la mayor utilidad se obtiene en un centro situado a una distancia dentro de un cierto umbral, se demuestra que el conjunto de candidatos a solución óptima se puede reducir a un conjunto finito de puntos de la red. Se da un procedimiento para generar los posibles candidatos, y se presenta una formulación como problema de programación lineal entera mixta para encontrar las localizaciones óptimas. Se realiza un análisis de sensibilidad respecto de la proporción, el número de centros preexistentes y el número de nuevos centros, aplicado a la Región de Murcia (España).

## 1. INTRODUCCIÓN

Se considera el problema de localización de una firma entrante que tiene que competir con otras ya establecidas. Los consumidores compran de la firma que les proporciona la máxima utilidad. El objetivo de la firma nueva es encontrar la localización de sus establecimientos que le proporcione la mayor cuota de mercado.

En los modelos estudiados en la literatura, la utilidad de un establecimiento depende de su distancia al consumidor y de otros factores, entre los que destacan la calidad y el precio (véase Eiselt y Laporte (1998), y García y otros (2004)). Los modelos que tienen en cuenta la calidad consideran la utilidad como una atracción por el centro, que es definida por alguna función directamente proporcional a la calidad e inversamente proporcional a la distancia (véase Hakimi (1983), Serra y ReVelle (1995), Plastria (2001)). Algunos trabajos consideran un comportamiento binario de los consumidores, que consiste en comprar del centro con mayor utilidad, desarrollando algoritmos para encontrar las localizaciones óptimas (véase Suárez-Vega y otros (2004)). En otros modelos se tiene en cuenta el precio del producto, y la utilidad es mayor cuanto menor es el coste total para adquirir el producto (véase Gabszewicz y Thisse (1992), y Pelegrín y otros (2006)).

---

<sup>1</sup>[pelegrin@um.es](mailto:pelegrin@um.es), <sup>2</sup>[saul.cano@um.es](mailto:saul.cano@um.es)

En este trabajo se generalizan algunos de los modelos anteriores, incluyendo todos los casos en los que la máxima utilidad se obtiene cuando el consumidor se encuentra a una distancia de la firma no superior a un determinado (distancia umbral). Este comportamiento es determinista con información completa. Sólo en el caso de empate en máxima utilidad de la firma entrante con otra firma ya establecida, los consumidores se repartirán entre ellas para adquirir el producto. En los modelos con precios, el producto suele ser homogéneo, ya que en esos modelos es el precio el factor que afecta a la elección de los consumidores. En los modelos que usan funciones de atracción, podemos considerar diferenciación de producto o que los consumidores adquieren varios productos al desplazarse al establecimiento. Esto se tiene en cuenta junto con otros factores al determinar la atracción por el centro (véase Nakanishi y Cooper (1974)).

Se supone que la demanda está concentrada en los nodos de una red de transporte (véase Francis y otros (2002) para la agregación de la demanda) y es una cantidad fija para cada nodo. A diferencia de otros modelos, que consideran sólo los nodos de la red como posibles candidatos a localización, aquí todos los puntos de la red son considerados. Se demuestra que hay un conjunto finito de puntos entre los cuales se encuentran las localizaciones óptimas. Se presenta un algoritmo que genera de manera eficiente la lista de candidatos y una vez discretizado el problema se procede a su resolución mediante su formulación como programación lineal entera mixta. Se realiza un experimento computacional y unos análisis de sensibilidad, aplicados a la región de Murcia, España, y finalmente se presentan algunas conclusiones.

## 2. NOTACIÓN Y DEFINICIONES BÁSICAS

Sea  $N(V, E, l)$  una red de transporte no dirigida, donde  $V = \{i: i = 1, 2, \dots, n\}$  es un conjunto de nodos o vértices,  $E = \{e: e = [i, j]; i, j \in V\}$  es un conjunto de tramos o aristas,  $l: E \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que asigna su longitud a cada tramo  $e$ . Sea  $\Gamma(i)$  el conjunto de nodos adyacentes al nodo  $i$ . Con  $d(x, y)$  denotaremos la distancia (longitud del camino más corto) entre los puntos  $x$  y  $y$ . Por simplicidad, denotaremos por  $d_{ix}$  a la distancia del nodo  $i$  al punto  $x \in N$ . Sea  $X$  un conjunto finito de puntos sobre la red  $N$ , entonces  $d_i(X) = \min\{d_{ix}: x \in X\}$  denotará la mínima distancia del nodo  $i$  a los puntos de  $X$ . Sea  $D_i$  una distancia fija asociada al nodo  $i$ .

**Definición 1.** Decimos que un punto  $x$  en  $N$  es *isodistante relativo a un nodo  $i$*  si  $d_{ix} = D_i$ .

Como la función distancia  $d_{ix}$  es una función cóncava lineal en dos partes cuando  $x$  varía a lo largo de cualquier tramo  $[u, v]$ , resulta que a lo más puede haber dos puntos isodistantes en el tramo  $[u, v]$  relativos al nodo  $i$ . Cada punto isodistante relativo a un nodo  $i$  puede ser de uno de los tres tipos de puntos que se muestran en Figura 1, denotados por  $x_i^l$ ,  $x_i^r$  y  $x_i^{lr}$ , respectivamente. Se verifica que  $d_{ix} < D_i$  si  $x \in [u, x_i^l]$ ;  $d_{ix} < D_i$  si  $x \in [x_i^r, v]$ ;  $d_{ix} < D_i$  si  $x \in [u, x_i^{lr}] \cup [x_i^{lr}, v]$

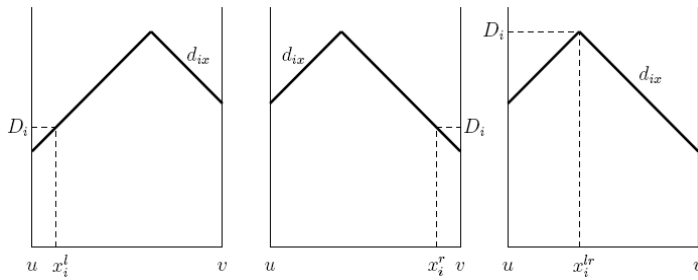


Figura 1

**Definición 2.** Un punto  $i \in V$  es llamado *isodistante* si éste es isodistante relativo a algún nodo.

La definición anterior nos dice que un punto es isodistante si se encuentra a una predeterminada distancia de algún nodo de la red.

Un segmento  $[x, y]$  en un tramo  $[u, v]$  es el subconjunto de puntos de  $[u, v]$  entre los puntos  $x$  y  $y$ , incluyendo a estos puntos. El segmento abierto es  $]x, y[ = [x, y] - \{x, y\}$  y los segmentos semiabiertos son  $]x, y] = [x, y] - \{x\}$  y  $]x, y[ = [x, y] - \{y\}$ .

**Definición 3.** Si consideramos todos los puntos isodistantes sobre  $]u, v[$ , cualquier segmento abierto definido por dos puntos isodistantes consecutivos o por un nodo y su punto isodistante más cercano, es llamado *segmento iso-abierto*.

En la Figura 2, pueden verse segmentos iso-abiertos determinados por puntos isodistantes.



Figura 2

Un punto isodistante en  $[u, v]$  puede ser isodistante relativo a más de un nodo. Sea  $V_x$  el conjunto de nodos  $i$  tales que  $x$  es isodistante relativo a  $i$ . La siguiente definición de puntos isodistantes se usará para considerar tres clases de puntos isodistantes en el interior de cada tramo  $[u, v]$ , el cual depende del nodo por el cual se pase para obtener  $D_i$ .

**Definición 4.** Sea  $x$  un punto isodistante en el interior de algún tramo:

- i) Si  $x = x_i^l$  para todo  $x \in V_x$ , el punto  $x$  es llamado *isodistante-izquierdo*.
- ii) Si  $x = x_i^r$  para todo  $x \in V_x$ , el punto  $x$  es llamado *isodistante-derecho*.
- iii) En otro caso, el punto  $x$  es llamado *isodistante-mixto*.

Si no hay puntos isodistantes en  $]u, v[$ , este segmento es el único segmento iso-abierto en el tramo  $[u, v]$ .

### 3. MODELOS DE LOCALIZACIÓN COMPETITIVA CON PATRÓN DE ELECCIÓN BINARIO

Una firma desea entrar al mercado teniendo que decidir la localización de  $r$  nuevos centros en puntos de una red  $N$ , con el objetivo de maximizar su cuota de mercado. La demanda se encuentra en algunos nodos de la red, llamados nodos población, la cual es conocida y fija. Existen otro tipo de nodos en la red, llamados nodos cruce, los cuales no tienen demanda. Sea  $w_i$  la cantidad de producto requerida por los consumidores en el nodo  $i$ . El coste marginal de transporte de los consumidores que se encuentran en el nodo  $i$  a un punto localizado a una distancia  $d$  de  $i$ , viene dado por  $t_i(d)$ , donde  $t_i(d)$  es una función creciente de la distancia y con la condición  $t_i(0) = 0$ .

En el mercado hay establecidos un conjunto  $F^e = \{1, 2, \dots, q\}$  de centros. Esto es, hay  $q$  centros preexistentes en la red, que son propiedad de otras firmas con las que va a competir la firma entrante. El conjunto de todos los centros preexistentes y nuevos, es representado por  $F = F^e \cup \{q + 1, q + 2, \dots, q + r\}$ . Denotaremos por  $X = \{x_{q+1}, x_{q+2}, \dots, x_{q+r}\}$  al conjunto de  $r$  puntos de la red donde los nuevos centros son localizados. Para cada  $i \in V$ ,  $j \in F$ , definimos  $u_{ij}(d_{ij})$  como la utilidad que supone comprar en el centro  $j$  para los consumidores del nodo  $i$ . Los consumidores de cada nodo  $i$  compran en un centro  $k$ , si la utilidad que obtienen es la mayor, es decir,  $u_{ik}(d_{ik}) \geq u_{ij}(d_{ij}), \forall j \in F$ . Este tipo de comportamiento recibe el nombre de binario. Si para un nodo  $i$  la máxima utilidad se obtiene en un centro de la firma entrante y otro de las firmas preexistentes, entonces supondremos que una proporción  $q_i$  de los consumidores compran en la firma entrante. La cantidad  $q_i$  es desconocida y habría que estimarla para cada situación. Vamos a ver que en ocasiones, este comportamiento equivale a que los consumidores en el nodo  $i$  compran en un nuevo centro si  $d_i(X) \leq D_i$ , para algún valor  $D_i$ .

**Ejemplo 1.** *Un modelo con precios en origen.*

En este tipo de modelos los consumidores se desplazan al centro a satisfacer su demanda, y por consiguiente pagan los costos de transporte. Sea  $p_j$  el precio en origen de una unidad de producto en el centro  $j \in F$ . Entonces los consumidores en el nodo  $i$  compran en el centro  $k$ , si  $p_k + t_i(d_{ik})p_j + t_i(d_{ij}), \forall j \in F$ .

En este caso, la utilidad  $u_{ij}$  de un consumidor viene dada en términos del valor negativo del costo total (precio del producto más coste de transporte) expresada por:

$$u_{ij}(d_{ij}) = - (p_j + t_i(d_{ij})).$$

Sean  $p_{\min}$  el precio mínimo de venta al que se puede ofertar el producto, y  $p_{\text{prod}}$  el coste de producción del producto,  $p_{\min} > p_{\text{prod}}$ . Asumiendo que estos precios son comunes a todos los centros,  $p_j = p_{\min}$   $p_j = p_{\min} \forall j \in F$ , la firma entrante tiene máxima utilidad para los consumidores en un nodo  $i$  si:

$$d_i(X) \leq d_i(F^e) = \min\{d_{ij}: j \in F^e\},$$

es decir, si la distancia a algún nuevo centro no es mayor que la mínima distancia a algún centro preexistente.

Para este ejemplo, la distancia umbral es  $D_i = d_i(F^e)$ . Luego, la ganancia de la firma entrante conseguida de los consumidores en el nodo  $i$  es:

$$\begin{cases} (p_{\min} - p_{\text{prod}})w_i \text{ si } d_i(X) < D_i \\ (p_{\min} - p_{\text{prod}})q_i w_i \text{ si } d_i(X) = D_i \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Sean  $M_X^1 = \{i : d_i(X) < D_i\}$  y  $M_X^2 = \{i : d_i(X) = D_i\}$  los conjuntos de nodos donde los consumidores se encuentran a una distancia menor o igual a la distancia umbral, respectivamente, y  $p_{\text{net}} = p_{\min} - p_{\text{prod}}$  el precio neto. Entonces, el problema de maximización de la ganancia para la firma entrante es:

$$\text{Max} \left\{ \prod(X) = p_{\text{net}} \left( \sum_{i \in M_X^1} w_i + \sum_{i \in M_X^2} \theta_i w_i \right) : X \subset N, |X| = r \right\}$$

Para este escenario el problema de maximización de la ganancia para la firma entrante es equivalente a maximizar la cuota de mercado:

$$\text{Max} \left\{ F(X) = \sum_{i \in M_X^1} w_i + \sum_{i \in M_X^2} \theta_i w_i : X \subset N, |X| = r \right\}$$

A diferencia del modelo MAXCAP (Serra y Reville, 1995) que sólo considera a un conjunto de nodos como candidatos a localización, aquí se consideran nodos y puntos en el interior de los tramos.

### Ejemplo 2. Un modelo tipo-Huff binario.

Sea  $a_j$  la calidad del centro  $j \in F$ , donde la calidad de un centro puede estar dada por su capacidad, su tamaño, o por alguna aglomeración de características del centro (Plastia, 2001). La utilidad  $u_{ij}$  que obtiene un consumidor por un centro viene determinada en términos de la atracción que el consumidor percibe de los centros, dada por el cociente del parámetro calidad y el tiempo de desplazamiento al centro:

$$u_{ij}(d_{ij}) = \frac{a_j}{t_i(d_{ij})}.$$

Entonces los consumidores en el nodo  $i$  compran en el centro  $k$ , si la atracción que perciben por este centro es mayor que la atracción que perciben por cualquier otro centro, es decir, si

$$\frac{a_k}{t_i(d_{ik})} \geq \frac{a_j}{t_i(d_{ij})}, \forall j \in F$$

La máxima atracción percibida por los consumidores en  $i$  de los centros preexistentes viene dada por:

$$A_i(F^e) = \text{Max} \frac{a_j}{t_i(d_{ij})}, \forall j \in F^e$$

Si todos los nuevos centros tiene la misma calidad, esto es,  $a_j = a$  para  $j = q + 1, q + 2, \dots, q + r$ , la firma entrante sólo puede capturar el mercado de los consumidores en  $i$  si para alguno de sus centros  $k$  se verifica que su atracción es mayor que la máxima atracción de los centros preexistentes:

$$\frac{a}{t_i(d_{ik})} \geq A_i(F^e)$$

Como la función distancia  $t_i$  es creciente, la desigualdad anterior es equivalente a:

$$d_{ik} \leq t_i^{-1} \left( \frac{a}{A_i(F^e)} \right)$$

Luego, si  $X$  es el conjunto de localizaciones para la firma entrante, entonces dicha firma sólo puede capturar mercado de los consumidores en el nodo  $i$  si:

$$d_i(X) \leq t_i^{-1} \left( \frac{a}{A_i(F^e)} \right)$$

Para este ejemplo, la distancia umbral es  $D_i = t_i^{-1} \left( \frac{a}{A_i(F^e)} \right)$ , y la cuota de mercado que la firma

entrante consigue en  $i$  es:

$$\begin{cases} w_i \text{ si } d_i(X) < D_i \\ \theta_i w_i \text{ si } d_i(X) = D_i \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Como en el ejemplo anterior, se pueden definir los conjuntos de nodos donde los consumidores se encuentran a una distancia menor o igual a la distancia umbral. Sean  $M_X^1 = \{i : d_i(X) < D_i\}$  y  $M_X^2 = \{i : d_i(X) = D_i\}$ , entonces el problema de maximización de la cuota de mercado para la firma entrante es:

$$\text{Max} \left\{ F(X) = \sum_{i \in M_X^1} w_i + \sum_{i \in M_X^2} \theta_i w_i : X \subset N, |X| = r \right\}$$

Observemos que este problema es equivalente al problema de maximización de la cuota de mercado del Ejemplo 1, si bien los niveles umbrales son distintos.

Acabamos de ver que la firma entrante tendrá máxima utilidad para los consumidores en un nodo  $i$  si se encuentran a una distancia de algún nuevo centro a menor o igual que una distancia umbral, que depende de cada modelo. En lo que sigue vamos a analizar este tipo de problemas cuando el objetivo es maximizar la cuota de mercado.

#### 4. LOCALIZACIONES ÓPTIMAS

Vamos a ver que los resultados obtenidos para el del problema de localización de un centro con costos de transportación lineal en Pelegrín y otros (2006), se extienden al problema de localización de varios centros con costos de transportación crecientes. Para ello realizaremos el análisis de la función cuota de mercado  $F(X)$  fijando todas las localizaciones excepto una de ellas.

**Propiedad 1.** La función  $F(X)$  es constante si  $X \setminus \{x_i\}$  es fijo y  $x_i$  varía en algún segmento isoabierto.

**Demostración.** Supongamos que todas las localizaciones de  $X$  están fijadas excepto  $x_i$ , la cual se considera que varía en algún segmento isoabierto contenido en algún tramo  $[u, v]$ . De la definición de segmento isoabierto se desprende que ninguno de los conjuntos  $M_X^1$  y  $M_X^2$  cambian cuando  $x_i$  varía en el segmento isoabierto. Por lo tanto,  $F(X)$  es una función constante si  $x_i$  varía en algún segmento isoabierto de  $[u, v]$ , y las otras localidades están fijas.  $\square$

La Figura 3, muestra la gráfica de  $F(X)$  cuando  $X \setminus \{x_i\}$  es fijo y  $x_i$  varía en un tramo de la red. Como una consecuencia de la propiedad anterior, el problema de maximizar  $F(X)$  se reduce a un problema de optimización discreta. El siguiente corolario determina quienes son los candidatos a localización óptima.

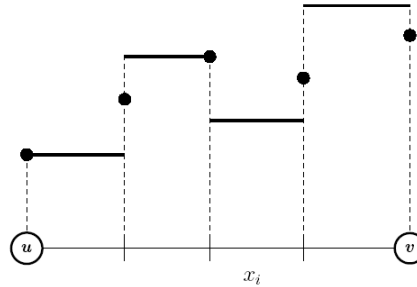


Figura 3

**Corolario 1.** Los candidatos a maximizar la función  $F(X)$  son los nodos, los puntos isodistantes en el interior de cada tramo y un punto por cada segmento isoabierto.

El número total de candidatos a localización es  $n + 2ISO + m$ , donde  $n$  es el número de nodos,  $ISO$  es el número puntos isodistantes en el interior de cada tramo y  $m$  es el número de tramos de la red (véase Figura 4).

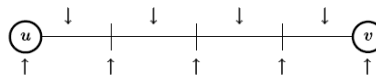


Figura 4

Veamos que es posible reducir el número total de candidatos a localización:

a) Los puntos isodistantes-izquierdos e isodistantes-derechos pueden ser removidos de la lista inicial de candidatos, ya que siempre existe un punto la izquierda o la derecha, respectivamente, en el que la cuota de mercado es mayor o igual al que se obtiene en el punto isodistante. Por consiguiente, el número de candidatos se reduce a  $n + ISO + m + ISO^*$ , donde  $ISO^*$  es el número de puntos isodistantes-mixtos en el interior de los tramos.

b) Si  $\theta_i = 1$  para todo  $i$ , los consumidores en el nodo  $i$  compran en un nuevo centro si este se encuentra a una distancia menor o igual que sus competidores. Los candidatos que se encuentran en los segmentos isoabiertos pueden ser remplazados por uno de los extremos del segmento isoabierto, sin que disminuya la cuota de mercado. Entonces, los puntos de los segmentos isoabiertos pueden ser removidos de la lista inicial de candidatos, reduciéndose el número de candidatos a  $n + ISO$ , como se ilustra en la Figura 5.

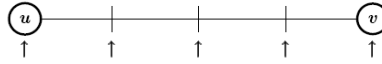


Figura 5

c) Si  $\theta_i \leq \frac{1}{2}$  para todo  $i$ , la mayoría de los consumidores en el nodo  $i$  prefieren comprar en un centro preexistente que en un nuevo centro. Entonces, si  $x$  es un punto isodistante mixto, puede comprobarse que se obtiene una cuota de mercado mayor o igual que en  $x$ , si sustituimos  $x$  por un punto próximo a  $x$  situado a la izquierda o a la derecha de  $x$ . Así, los puntos  $ISO^*$  pueden ser eliminados y por consiguiente el número de candidatos se reduce a  $n + ISO + m$ , como se muestra en la Figura 6.

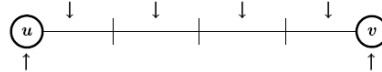


Figura 6

## 5. GENERACIÓN DE LA LISTA DE CANDIDATOS

En esta sección se presenta un algoritmo que genera la lista completa de candidatos  $L$ , para una red que contiene nodos población y nodos cruce. Los elementos de la lista son puntos de la red definidos de la forma  $(i, u, v, x)$ , siendo  $x$  la distancia al nodo  $u$  del punto isodistante relativo al nodo  $i$  que se encuentra en el tramo  $[u, v]$ .

### Algoritmo

**Paso 1.** Generación de la lista de puntos isodistantes:

Determinar la distancia umbral  $D_i$  para cada nodo población  $i$ . Iniciar la lista  $L = \emptyset$

Obtener las matrices de distancias y predecesores entre cada par de nodos,  $D = (d_{ij})$  y  $P = (p_{ij})$ .

Para cada nodo población  $i$ , hacer:

Para cada elemento  $u$  en la fila  $i$  tal que  $d_{iu} = D_i$ , hacer:

Si  $d_{iu} = D_i$ : El nodo  $u$  es un punto isodistante, agregar el nodo  $u$  a la lista

$L = L \cup (i, j, u, 0)$

En otro caso ( $d_{iu} < D_i$ ): Si  $u$  es un nodo población, examinar los adyacentes de  $u$ , que sean nodos población y que no estén en el camino más corto de  $i$  a  $u$ , es decir, los nodos población en el conjunto:

$$S(u) = \Gamma(u) \setminus P(i, u)$$

Para cada  $j \in S(u)$ , hacer:

Si  $d_{iu} + l_{ju} > D_i$  y  $d_{ij} + l_{uj} \geq 2D_i$ , el punto  $x \in (u, j)$  tal que  $l_{ix} = D_i -$

$d_{iu}$  es isodistante, agregar dicho punto a la lista,  $L = L \cup (i, u, j, D_i - d_{iu})$

**Paso 2.** Agrupar y ordenar los puntos isodistantes de la lista  $L$ , para cada tramo de la red.

**Paso 3.** Seleccionar el valor de la proporción  $q_i$ .

**Paso 4.** Si el valor de  $q_i = 1$ , la lista  $L$  está completa.

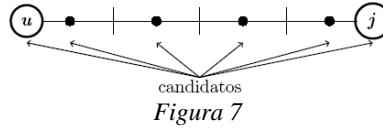
En otro caso, modificamos la lista  $L$  en cada segmento iso-abierto, dependiendo del valor de  $\theta_i$ :

$0 \leq \theta_i \leq \frac{1}{2}$ ,  $\forall i$ , (Figura 7):

a) Si los extremos del segmento iso-abierto son: un nodo población y un punto isodistante, o dos puntos isodistantes; si hay un nodo cruce en dicho segmento, reemplazar el punto del extremo derecho del segmento por el nodo cruce en la lista  $L$ .

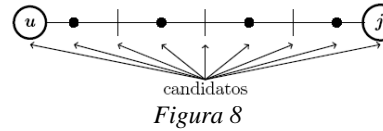
En otro caso, reemplazar el punto del extremo derecho del segmento por el punto medio de dicho segmento en la lista  $L$ .

- b) Si los extremos del segmento iso-abierto son: un punto isodistante y un nodo población; si hay un nodo cruce en dicho segmento, agregar a la lista  $L$  el nodo cruce. En otro caso, agregar a la lista  $L$  el punto medio de dicho segmento.



Si  $\frac{1}{2} < \theta_i < 1, \forall i$  (Figura 8):

- a) Si los extremos del segmento iso-abierto son: un nodo población y un punto isodistante (o viceversa), o dos puntos isodistantes; si hay un nodo cruce en dicho segmento, agregar a la lista  $L$  el nodo cruce. En otro caso, agregar a la lista  $L$  el punto medio de dicho segmento.



Una vez obtenida la lista de candidatos, se encontrarán las soluciones óptimas mediante la resolución de un problema de programación lineal entera mixta.

## 6. FORMULACIÓN COMO PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA MIXTA

Considerando las ideas centrales de las formulaciones para resolver problemas de localización discreta hechas en Serra y ReVelle (1995) y Fernández y otros (2007). Sean  $L$  el conjunto de todos los candidatos a localización,  $L_i^< = \{j \in L: d_{ij} < D_i\}$  el conjunto de candidatos que se encuentran a una distancia menor a la distancia umbral,  $L_i^= = \{j \in L: d_{ij} = D_i\}$  el conjunto de candidatos que se encuentran a una distancia igual a la distancia umbral y  $V^* = \{i \in V: L_i^< \cup L_i^= \neq \emptyset\}$  el conjunto de nodos  $i$  que se encuentran a una distancia de un candidato no mayor a su distancia umbral.

Las variables de localización son:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el centro es localizado en } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las variables de asignación total de la demanda son:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si todo el mercado en } i \text{ es servido desde la localización } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las variables de asignación parcial de la demanda son:

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si todo el mercado en } i \text{ se reparte entre un centro nuevo y un centro preexistente} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces el problema de localización se puede formular como:

$$\text{Max} \sum_{i \in V^*} \sum_{j \in L_i^<} w_i y_{ij} + \sum_{i \in V^*} \theta_i w_i z_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{j \in L_i^<} y_{ij} + z_j \leq 1, \forall i \in V^* \quad (1)$$

$$y_{ij} \leq x_j, \forall i \in V^*, \forall j \in L_i^< \quad (2)$$

$$z_j \leq \sum_{j \in L_i^<} x_j \quad (3)$$



$$\sum_{j \in L_i^<} x_j = r \quad (4)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad (5)$$

$$y_{ij} \geq 0, z_j \geq 0 \quad (6)$$

donde el primer conjunto de restricciones impone que la demanda de los consumidores en el nodo  $i$  puede ser capturada total o parcialmente por la nueva firma o bien por sus competidores si la suma de las variables de asignación es cero. El segundo conjunto de restricciones obliga que sólo se puede asignar la demanda totalmente de  $i$  a  $j \in L_i^<$ , si se localiza un centro en  $j$  ( $x_j = 1$ ). El tercer conjunto de restricciones impone que sólo se puede asignar parcialmente la demanda de  $i$  a la firma entrante si se localiza algún centro en  $j \in L_i^>$ . La cuarta restricción obliga a que el número de centros de la nueva firma sea  $r$ . El quinto conjunto de restricciones impone que las variables de localización  $x_j$  sean binarias. El último conjunto de restricciones obligan a que las variable de asignación  $y_{ij}$  y  $z_i$  sean no negativas, en vez de binarias. Esto se hace para reducir el número de variables binarias en el modelo y permitir que el optimizador resuelva problemas de mayor tamaño. Ello no altera el planteamiento, ya que si se fijan los valores de las variables  $x_j$  en la formulación presentada, se puede comprobar que siempre hay soluciones óptimas con valores binarios para las restantes variables.

## 7. EXPERIMENTO COMPUTACIONAL

Para analizar la sensibilidad respecto de los parámetros  $r$  y  $q_i$ , utilizaremos datos de la red de transporte de la Región de Murcia, España. Esta red contiene 84 nodos (los primeros 45 son nodos población y 39 son nodos cruce) y 132 tramos, como se muestra en Figura 9. La demanda  $w_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 45$  de los nodos población corresponde al censo de 2007 (Tabla 1) de acuerdo al Centro Regional de Estadística de Murcia.

Se consideran cuatro conjuntos de centros preexistentes situados en las ciudades con mayor población:

$$F^1 = \{Murcia\},$$

$$F^2 = \{Murcia, Cartagena\},$$

$$F^3 = \{Murcia, Cartagena, Lorca\},$$

$$F^4 = \{Murcia, Cartagena, Lorca, Molina de Segura\}.$$

La distancia umbral asociada a los nodos población está dada por:  $D_i = \min\{d_{ij} : j \in F^e\}$   $i = 1, 2, \dots, 45$ .

El rango de valores que hemos tomado para la proporción es  $q_i = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 45$  y el número de nuevos centros a localizar es  $r = 1, 2, 3, 4$ .

Se han considerado 16 escenarios distintos correspondientes a las diferentes combinaciones entre número de centros a localizar y número de centros preexistentes. Utilizando el optimizador Xpress-MP (Xpress-MP, 2007) se resolvieron 80 problemas con patrón de elección binario que resultan de variar  $\theta_i$ ,  $F^e$  y  $r$ . El algoritmo que genera la lista completa de candidatos ha sido diseñado en Borland C, versión 5.02 y utilizando un equipo Dell Latitude D810, con procesador Intel Pentium M a 2.26 GHz y 1 GB de Ram.

Las tablas 2 a 5 muestran los resultados para cada conjunto de centros preexistentes.

La primera columna de cada tabla indica el número de nuevos centros de la firma entrante, la proporción se refleja en la segunda columna, el número de candidatos viene dado en la tercera columna, las localizaciones óptimas se representan en la cuarta columna, donde un número entre 1 y 45 corresponde a un nodo población, entre 46 y 84 corresponde a un nodo cruce y un número mayor a un punto isodistante.

En la quinta columna se muestra la cuota de mercado capturada, los porcentajes de cuota capturados total y parcialmente están expresados en la sexta y séptima columnas, respectivamente. Finalmente, el tiempo en segundos para generar la lista completa de candidatos y en obtener las soluciones mediante el optimizador Xpress-MP, se muestran en las columnas ocho y nueve respectivamente.

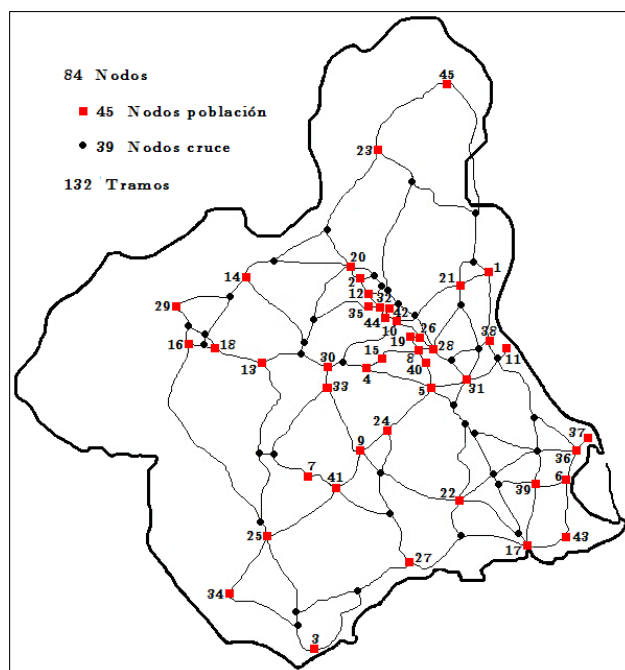


Figura 9.

Tabla 1: Nodos Poblacionales

Nodo	Población	Demanda	Nodo	Población	Demanda
1	Abanilla	6,568	24	Librilla	4,378
2	Abarán	12,968	25	Lorca	89,606
3	Águilas	33,134	26	Lorquí	6,714
4	Albudeite	1,413	27	Mazarrón	32,616
5	Alcantarilla	39,636	28	Molina de Segura	59,365
6	Alcázares (Los)	14,077	29	Moratalla	8,379
7	Aledo	1,046	30	Mula	16,570
8	Alguazas	8,572	31	Murcia	422,861
9	Alhama de Murcia	18,996	32	Ojós	626
10	Archena	17,634	33	Pliego	3,864
11	Beniel	10,294	34	Puerto-Lumbreras	12,964
12	Blanca	6,119	35	Ricote	1,531
13	Bullas	12,020	36	San Javier	29,167
14	Calasparra	10,282	37	San Pedro del Pinatar	22,217
15	Campos del Río	2,182	38	Santomera	14,323
16	Caravaca de la Cruz	25,688	39	Torre-Pacheco	29,187
17	Cartagena	207,286	40	Torres de Cotillas (Las)	19,611
18	Cehegín	15,798	41	Totana	28,742
19	Ceutí	9,185	42	Ulea	991
20	Cieza	34,898	43	Unión (La)	16,471
21	Fortuna	8,939	44	Villanueva del Río Segura	2,042
22	Fuente-Álamo	14,400	45	Yecla	34,161
23	Jumilla	24,596	<b>Total</b>		<b>1,392,117</b>

A modo de ilustración, la Figura 10 muestra las localizaciones óptimas de 4 nuevos centros para  $q_i = \frac{1}{4}$ , siendo Murcia, Cartagena y Lorca, los centros preexistentes. Los nuevos centros están localizados en el nodo población Murcia y los puntos isodistantes 194, 240 y 247. La cuota de mercado capturada es de

663,924.75. Esta cantidad corresponde a un 39.91 % de la demanda total, la cual es totalmente capturada en los correspondientes nodos por los centros localizados en los puntos isodistantes 194, 240 y 247, y a un 7.77 % de la demanda total, la cual es parcialmente capturada en los correspondientes nodos por el centro localizado en Murcia. El tiempo de cómputo es de 8.266 segundos para generar la lista completa de candidatos y el optimizador Xpress-MP utilizó 20.124 segundos para encontrar las soluciones óptimas del modelo.

Tabla 2:  $F^1 = \{Murcia\}$

Nuevos centros	$\theta_i$	No. de Candidatos <sup>1</sup>	Localizaciones <sup>2</sup>	Cuota de Mercado	%		Tiempo (seg)	
					$y_{ij}$	$z_i$	Can <sup>1</sup>	Mod <sup>2</sup>
1	0	446	223	727,487.00	52.25	0	6.188	27.271
	1/4	446	223	727,487.00	52.25	0	6.188	27.122
	1/2	446	223	727,487.00	52.25	0	6.188	27.161
	3/4	767	Murcia	1,044,087.75	0	75	16.219	133.228
	1	378	Murcia	1,392,117.00	0	100	6.172	19.983
2	0	446	198-225	958,962.00	68.88	0	6.188	26.737
	1/4	446	198-225	958,962.00	68.88	0	6.188	26.906
	1/2	446	Murcia-223	1,059,802.00	52.25	23.87	6.188	26.918
	3/4	767	Murcia-351	1,225,959.50	52.25	35.80	16.219	131.926
	1	378	Murcia-1	1,392,117.00	0	100	6.172	19.676
3	0	446	135-224-436	969,256.00	69.62	0	6.188	27.152
	1/4	446	Murcia-76-223	1,067,250.75	68.88	7.77	6.188	26.712
	1/2	446	Murcia-76-223	1,175,539.50	68.88	15.55	6.188	26.921
	3/4	767	Murcia-304-354	1,283,828.25	68.88	23.33	16.219	132.504
	1	378	Murcia-1-2	1,392,117.00	0	100	6.172	19.800
4	0	446	92-208-291-436	969,256.00	69.62	0	6.188	29.394
	1/4	446	Murcia-207-223-436	1,074,971.25	69.62	7.59	6.188	27.397
	1/2	446	Murcia-207-223-436	1,180,686.50	69.62	15.18	6.188	27.341
	3/4	767	Murcia-323-354-747	1,286,401.75	69.62	22.78	16.219	133.851
	1	378	Murcia-1-2-3	1,392,117.00	0	100	6.172	19.632

Tabla 3:  $F^2 = \{Murcia, Cartagena\}$

Nuevos centros	$\theta_i$	No. de Candidatos <sup>1</sup>	Localizaciones <sup>2</sup>	Cuota de Mercado	%		Tiempo (seg)	
					$y_{ij}$	$z_i$	Can <sup>1</sup>	Mod <sup>2</sup>
1	0	417	200	505,355.00	36.30	0	6.937	22.412
	1/4	417	200	505,355.00	36.30	0	6.937	22.276
	1/2	417	200	505,355.00	36.30	0	6.937	22.633
	3/4	710	Murcia	745,171.50	0	53.52	15.938	106.522
	1	351	Murcia	993,562.00	0	71.37	6.766	16.262
2	0	417	200-231	666,076.00	47.84	0	6.937	21.996
	1/4	417	200-231	666,076.00	47.84	0	6.937	22.208
	1/2	417	Murcia-200	749,458.50	36.30	17.53	6.937	22.361
	3/4	710	Cartagena-Murcia	1,044,087.75	0	75	15.938	105.405
	1	351	Cartagena-Murcia	1,392,117.00	0	100	6.766	16.004
3	0	417	201-231-397	731,422.00	52.54	0	6.937	22.213
	1/4	417	Murcia-200-231	788,127.75	47.84	8.76	6.937	22.054
	1/2	417	Cartagena-Murcia-200	948,736.00	36.30	31.84	6.937	22.113
	3/4	710	Cartagena-Murcia-308	1,170,426.50	36.30	47.77	15.938	106.005
	1	351	Cartagena-Murcia-1	1,392,117.00	0	100	6.766	16.030
4	0	417	200-210-397-415	761,970.00	54.73	0	6.937	22.388
	1/4	417	Cartagena-Murcia-200-231	847,586.25	47.84	13.03	6.937	22.077
	1/2	417	Cartagena-Murcia-200-231	1,029,096.50	47.84	26.07	6.937	21.990
	3/4	710	Cartagena-Murcia-308-368	1,210,603.75	47.84	39.11	15.938	105.493
	1	351	Cartagena-Murcia-1-2	1,392,117.00	0	100	6.766	15.967

Tabla 4:  $F^3 = \{Murcia, Catagena, Lorca\}$

Nuevos centros	$\theta_i$	No. de Candidatos <sup>1</sup>	Localizaciones <sup>2</sup>	Cuota de Mercado	%		Tiempo (seg)	
					$y_{ij}$	$z_i$	Can <sup>1</sup>	Mod <sup>2</sup>
1	0	403	202	338,930.00	24.34	0	8.266	20.202
	1/4	403	202	338,930.00	24.34	0	8.266	20.148
	1/2	403	Murcia	413,568.50	0	29.70	8.266	20.378
	3/4	685	Murcia	620,352.75	0	44.56	15.219	96.305
	1	339	Murcia	827,137.00	0	59.41	8.313	14.664
2	0	403	202-247	466,517.00	33.51	0	8.266	20.012
	1/4	403	202-247	466,517.00	33.51	0	8.266	20.018
	1/2	403	Cartagena-Murcia	596,279.00	0	42.83	8.266	20.387
	3/4	685	Cartagena-Murcia	894,418.50	0	64.24	15.219	95.650
	1	339	Cartagena-Murcia	1,192,558.00	0	85.66	8.313	17.090
3	0	403	194-240-247	555,636.00	39.91	0	8.266	20.051
	1/4	403	Murcia-202-247	588,568.75	33.52	8.76	8.266	20.034
	1/2	403	Cartagena-Murcia-93	768,306.00	22.26	32.92	8.266	20.094
	3/4	685	Cartagena-Lorca-Murcia	1,044,087.75	0	75	15.219	95.572
	1	339	Cartagena-Lorca-Murcia	1,392,117.00	0	100	8.313	14.516
4	0	403	53-194-240-404	615,972.00	44.24	0	8.266	20.101
	1/4	403	Murcia-194-240-247	663,924.75	39.91	7.77	8.266	20.124
	1/2	403	Cartagena-Lorca-Murcia-202	865,523.50	24.34	32.82	8.266	19.983
	3/4	685	Cartagena-Lorca-Murcia-311	1,128,820.25	24.34	56.74	15.219	95.112
	1	339	Cartagena-Lorca-Murcia-1	1,392,117.00	0	100	8.313	14.598

Tabla 5:  $F^4 = \{Murcia, Cartagena, Lorca, Molina de Segura\}$

Nuevos centros	$\theta_i$	No. de Candidatos <sup>1</sup>	Localizaciones <sup>2</sup>	Cuota de Mercado	%		Tiempo (seg)	
					$y_{ij}$	$z_i$	Can <sup>1</sup>	Mod <sup>2</sup>
1	0	329	88	243,674.00	17.50	0	8.531	11.141
	1/4	329	88	243,674.00	17.50	0	8.531	11.192
	1/2	329	Murcia	255,244.00	0	18.33	8.531	11.249
	3/4	548	Murcia	382,866.00	0	27.50	12.812	49.817
	1	274	Murcia	510,488.00	0	36.66	9.109	8.382
2	0	329	88-197	371,261.00	26.66	0	8.531	11.101
	1/4	329	Murcia-88	371,296.00	17.50	9.16	8.531	11.022
	1/2	329	Murcia-88	498,918.00	17.50	18.33	8.531	11.171
	3/4	548	Cartagena-Murcia	656,931.75	0	47.18	12.812	49.652
	1	274	Cartagena-Murcia	875,909.00	0	62.91	9.109	8.331
3	0	329	88-301-332	454,971.00	32.68	0	8.531	11.006
	1/4	329	Murcia-88-197	498,883.00	26.66	9.16	8.531	11.094
	1/2	329	Cartagena-Murcia-88	681,628.50	17.50	31.45	8.531	11.081
	3/4	548	Archena-Cartagena-Murcia	906,108.00	15.65	49.42	12.812	49.565
	1	274	Cartagena-Molina-Murcia	1,200,937.00	0	86.26	9.109	8.269
4	0	329	88-180-301-332	514,218.00	36.93	0	8.531	11.112
	1/4	329	Murcia-88-301-332	576,749.50	32.68	8.74	8.531	11.006
	1/2	329	Cartagena-Lorca-Murcia-98	767,429.50	16.80	38.32	8.531	11.170
	3/4	548	Cartagena-Lorca-Molina-Murcia	1,044,087.75	0	75	12.812	49.691
	1	274	Cartagena-Lorca-Molina-Murcia	1,392,117.00	0	100	9.109	8.284

## 8. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Respecto al número de candidatos en los diferentes escenarios, se observa lo siguiente: El número de candidatos a localización óptima decrece al aumentar el número de centros preexistentes para cada valor de  $\theta_i$ . Para  $\theta_i = \frac{3}{4}$  el número de candidatos es mayor que para  $0 \leq \theta_i \leq \frac{1}{2}$ , pero esa diferencia en número va decreciendo porcentualmente al aumentar el número de centros preexistentes. Así, en la Tabla 2 la diferencia porcentual es  $\frac{767 - 446}{446} \cdot 100 = 71.97\%$  y en la Tabla 5 es  $\frac{548 - 349}{349} \cdot 100 = 66.56\%$ . Para  $\theta_i = 1$ , el número de candidatos también es menor que para  $0 \leq \theta_i \leq \frac{1}{2}$ , pero ahora la

diferencia en número va creciendo porcentualmente al aumentar el número de centros preexistentes. En la Tabla 2 la diferencia es  $\frac{446 - 378}{446} \cdot 100 = 15.24\%$  y en la Tabla 5 es  $\frac{329 - 274}{329} \cdot 100 = 16.71\%$ .

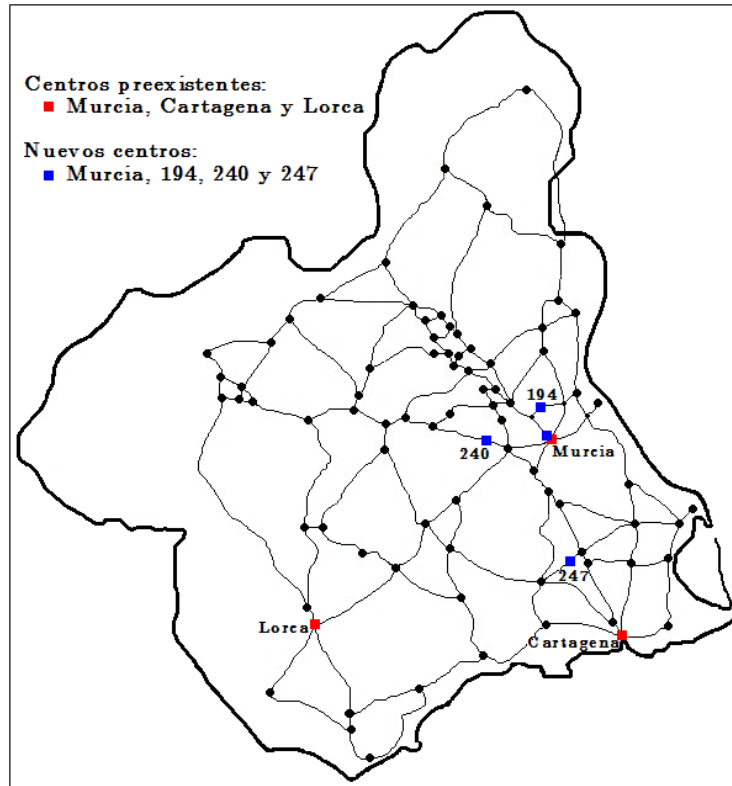


Figura 10.

En cuanto a las localizaciones óptimas, resulta que son bastante estables en relación a la variación de  $\theta_i$ . Los cambios de localización se producen al aumentar  $\theta_i$  significativamente, y algunas localizaciones permanecen óptimas para un gran rango de valores. Para valores de  $\theta_i$  elevados las ciudades más pobladas suelen ser las localizaciones óptimas y este hecho se constata más cuanto mayor es el número de competidores.

Como era de esperar, la cuota de mercado disminuye conforme al número de centros preexistentes es mayor. Sin embargo, se observa que esta disminución es mayor para valores de  $\theta_i$  pequeños, sobre todo si el número de centros localizados es bajo. Si los valores de  $\theta_i$  son altos y se localizan muchos centros, se observa que la cuota de mercado decrece muy lentamente con el número de centros preexistentes. En particular, para  $\theta_i = 1$  y cuatro nuevos centros la cuota de mercado obtenida por la firma entrante no se ve afectada al aumentar el número de centros preexistentes.

Además, en cada uno de los 16 escenarios, se observa que para valores pequeños de  $\theta_i$  sólo en muy pocos nodos la demanda es compartida por la firma entrante y sus competidores. Para valores grandes de  $\theta_i$  ocurre lo contrario.

El tiempo máximo de cómputo para generar la lista de candidatos y encontrar las localizaciones óptimas se alcanza para  $\theta_i = \frac{3}{4}$ . El tiempo para generar la lista de candidatos se incrementa al aumentar el número de centros preexistentes para cada valor  $\theta_i$  pero ocurre lo contrario para encontrar las localizaciones óptimas. Los tiempos que se requieren para encontrar las localizaciones óptimas disminuyen significativamente, mientras que los tiempos que se requieren para generar la lista de candidatos se incrementan en menor proporción conforme aumenta el número de centros preexistentes.

## 9. CONCLUSIONES Y FUTURAS INVESTIGACIONES

Se ha visto que bajo ciertas condiciones los modelos de precios en origen y tipo Huff, el número de candidatos a localización para una nueva firma que desea entrar en competencia con otras ya existentes con el objetivo de maximizar su cuota de mercado, se reduce a un conjunto finito de puntos, y mediante su correspondiente formulación como un problema de programación lineal entera mixta se pueden encontrar sus soluciones óptimas. Además, cuando ocurre que la demanda de los consumidores se tiene que repartir entre las firmas que compiten por el mercado, un análisis del parámetro de la proporción de la demanda nos permite determinar quiénes serán los candidatos a localización.

Como trabajos futuros de investigación, será de interés analizar bajo qué condiciones otros tipo de modelos de localización competitiva, por ejemplo modelos con funciones de elección no deterministas, o modelos donde la demanda sea variable, la búsqueda de los candidatos a localización se reduzca a un conjunto finito de puntos de la red, los cuales se encuentren dentro de una distancia umbral de los consumidores.

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido realizado como parte del proyecto ECO-2008-00667/ECON financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España y del Fondo Europeo para el Desarrollo Regional (FEDER).

RECEIVED JANUARY 2010  
REVISED JUNE 2010

## REFERENCIAS

- [1] DREZNER T. and EISELT H.A. (2002): Consumers in competitive location models. In: **Facility Location: Application and Theory** (Drezner Z. and Hamacher H. Eds.), 151-178. Springer Verlag, Berlin.
- [2] EISELT H.A. and LAPORTE G. (1998): Demand allocation functions. **Location Science**, 6, 175-187.
- [3] FERNÁNDEZ P., PELEGRÍN B., GARCÍA M.D. and PEETERS P. (2007): A discrete location-price problem under the assumption of discriminatory pricing: Formulations and parametric analysis. **European Journal of Operations Research**, 179, 1050-1062.
- [4] FRANCIS R.L., LOWE T.J. and TAMIR A. (2002): Demand point aggregation for location models. In: **Facility Location: Application and Theory** (Drezner Z. and Hamacher H. Eds.), 207-232. Springer Verlag, Berlin.
- [5] GABSZEWICZ J.J. and THISSE J.F. (1992): Location. In: **Handbook of Game Theory with Economic Applications** (Aumann R. and Hart S. Eds.), 281-304. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.
- [6] GARCIA M.D. FERNÁNDEZ P. and PELEGRÍN B. (2004): On price competitive in location-price models with spatially separated markets. **TOP**, 12, 351-374.
- [7] HAKIMI L. (1983): On locating new facilities in a competitive environment. **European Journal of Operations Research**, 12, 29-35.
- [8] NAKANISHI M. and COOPER L.G. (1974): Parameter estimate for multiplicative interactive choice model: Least square approach. **Journal of Marketing Research**, 11, 303-311.
- [9] PELEGRÍN B., FERNÁNDEZ P., SUÁREZ R. and GARCÍA M.D. (2006): Single facility location on a network under mill and delivered pricing. **IMA Journal of Management Mathematics**, 17, 373-385.

- [10] PLASTRIA F. (2001): Static competitive facility location: An overview of optimization approaches. **European Journal of Operational Research**, 129, 461-470.
- [11] SERRA D. and REVELLE C. (1995): Competitive location in discrete space. In: **Facility Location: A Survey of Applications and Methods** (Drezner Z. Ed.), 367-386. Springer Verlag, Berlin.
- [12] SUÁREZ-VEGA R., SANTOS PEÑATE D.R. and DORTA-GONZÁLEZ P. (1994): Discretization and Resolution of the  $(r | X_p)$ -Medianoid Problem Involving Quality Criteria. **TOP**, 12, 111-133.
- [13] Xpress-MP. (2007). **Dash Optimization**.