UN SISTEMA LÓGICO PARA EL RAZONAMIENTO Y LA TOMA DE DECISIONES: LA LÓGICA DIFUSA COMPENSATORIA BASADA EN LA MEDIA GEOMÉTRICA

Rafael Alejandro Espín Andrade*[1], Eduardo Fernández González** y Erick González Caballero***
* CETDIR Centro de Técnicas de Dirección Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, La Habana, Cuba.
**Universidad Autónoma de Sinaloa, Culiacán, México.
***Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas, La Habana, Cuba.

ABSTRACT
The aim of this paper is to make a deeper study of the advantages and properties of the Compensatory Fuzzy Logic, as fuzzy logic systems and as tools for Decision Making, as well as the interrelation among these two aspects in an only one theoretical body. It will be exposed an example of a Compensatory Fuzzy Logic, it is called Based Geometric Mean Compensatory Logic, their operators, and their relationship with the Boolean Algebra.

KEYWORDS: Fuzzy Logic, Decision Theory, Compensatory Fuzzy Logic.

MSC: 62C05

RESUMEN
El objetivo de este artículo es profundizar en las ventajas y propiedades de las Lógicas Difusas Compensatorias, como sistemas lógicos difusos y como herramientas para la Toma de Decisiones, así como la interrelación entre estos dos aspectos en un solo cuerpo teórico. Como ejemplo de una Lógica Difusa Compensatoria se exponen las Lógicas Compensatorias Basadas en Medias Geométricas, sus operadores, y su relación con el Álgebra Booleana.

1. INTRODUCCIÓN

Si la Lógica es el mejor modelo del razonamiento humano, y si tomar decisiones es una forma de razonar sobre el cuerpo de conocimiento preferencial, entonces la Lógica puede ser un instrumento para la decisión. Pero es necesario un cuerpo lógico capaz de manejar el conocimiento impreciso, la vaguedad y el razonamiento aproximado. Desde la perspectiva de la Ayuda a la Decisión Multicriterio han sido utilizadas lógicas multivalentes como modelos del razonamiento preferencial [Tsoukiàs (1995)], [Tsoukiàs (1997)].

Los Sistemas Expertos son pioneros en la idea de obtener modelos partiendo de expresiones verbales, de manera que los decisores humanos pueden aplicar su experiencia esencial en problemas concretos. La representación del conocimiento sobre la base de la Lógica es aquí protagónica. En los últimos tiempos se ha desarrollado una disciplina matemático-informática llamada *Soft-Computing* o Inteligencia Computacional, véase [Verdegay (2005)]. Entre los fundamentos de esta disciplina está la Lógica Difusa [Zadeh (1965)], [Dubois y Prade (1980) pp. 1-4], [Lindley (1994)].

La "vaguedad" es, junto a la incertidumbre, objeto de modelación de la Lógica Difusa, y esta perspectiva ha permitido avances en la modelación del conocimiento y la toma de decisiones sobre la base de expresiones verbales. La principal ventaja de un enfoque de representación del conocimiento preferencial basado en Lógica Difusa, sería justamente la oportunidad de utilizar el lenguaje como elemento de comunicación y modelación en el análisis de la decisión, creando un modelo explícito del conocimiento preferencial; y

[1]. espin@ind.cujae.edu.cu.

posteriormente utilizar la capacidad de inferencia de la plataforma lógica para proponer decisiones que reflejen mejor la política de decisión del agente humano.

Una lógica para la decisión es, a fin de cuentas, un enfoque funcional que se explicita en sus predicados. Los axiomas que constituyen la base de esta lógica deben recoger características reales de los procesos de toma de decisiones, y de la forma de razonar de los hombres que intervienen en ellos. De aquí su afinidad con los enfoques que adoptan una posición descriptiva de la toma de decisiones. Pero el cuerpo axiomático lógico también debe contener elementos de un pensamiento racional. En este sentido es posible considerar un enfoque lógico para la decisión como una tercera posición que combina componentes normativos y descriptivos. Las lógicas multivalentes, con su capacidad para tratar la imprecisión y el razonamiento aproximado, permiten modelar propiedades que, aunque razonables, carecen de validez general y por tanto no pueden considerarse como axiomas.

En este trabajo se hace un análisis crítico del abordaje de la Toma de Decisiones desde la perspectiva de la Lógica Difusa, y se propone un nuevo enfoque basado en una axiomática a obedecer por las lógicas difusas multivalentes, para buscar sistemas compatibles con el razonamiento preferencial que caracteriza a los procesos reales de toma de decisiones. Se denomina Lógica Difusa Compensatoria (LDC) a esta nueva propuesta. El enfoque teórico multivalente que se ofrece relaciona de manera natural el pensamiento deductivo y las preferencias humanas.

La idea de combinar la Lógica y la Toma de Decisiones en un marco lingüístico se podría soportar en un sistema de axiomas que permitirían: a) modelar un tipo de racionalidad compatible con los efectos de razonamiento aproximado y descriptivo (conductual) del veto; b) manejar la información lingüística de las preferencias del AD; c) agregar la información de preferencias, incluyendo el manejo de los compromisos y de las situaciones simultáneamente ventajosas y desventajosas del AD (de manera no asociativa).

La Compatibilidad (en un sentido difuso) con la Lógica Booleana es una propiedad deseable con el propósito de soportar el fin de “racionalidad”. No existe en la literatura ningún sistema axiomático que satisfaga los requerimientos anteriores.

La diferencia entre la LDC y la Lógica de Preferencia [Hansson (2001) pp. 319-393] es que esta última la forman un conjunto de axiomas basados expresamente en las preferencias, mientras que la primera es un sistema lógico difuso compatible con la Toma de Decisiones, que puede utilizarse en otros campos además de la Teoría de la Decisión.

El artículo tiene la estructura siguiente: en la Sección 2 se dan algunas nociones de Lógica Difusa y de la Toma de Decisiones con múltiples atributos. La Sección 3 aborda los axiomas que debe cumplir una Lógica Difusa Compensatoria. En la Sección 4 se desarrolla la Lógica Compensatoria basada en la Media Geométrica (LCBMG) y se muestra su relación con la Lógica Booleana. En la Sección 5 se demuestra la compatibilidad de la LCBMG con el orden. En la Sección 6 se ejemplifica ampliamente el uso de la LCBMG. Finalmente se dan las conclusiones de este artículo.

2. LÓGICA DIFUSA Y TOMA DE DECISIONES CON MÚLTIPLES ATRIBUTOS.

Aunque recientemente ha emergido dentro de la Lógica Difusa una disciplina que se ha dado en llamar Lógica Difusa en sentido estrecho o Lógica Matemática Difusa [Dubois y col. (2007) p.4], [Hájek (2006)], en el marco de ella, el uso aislado de operadores de agregación a menudo ha suplantado al empleo de grupos de operadores como sistema lógico [Dubois y Prade (1985)], [Detyniecki (2000)].

Aquí se considerará un sistema formado por cuatro operadores fundamentales para definir una lógica multivalente con capacidad para reflejar e inferir conocimiento preferencial: conjunción, negación, disyunción y orden estricto. Las propiedades de estos operadores deben corresponder a las del cuerpo de conocimiento y forma de razonamiento que ellos modelan. Para hacer esto más claro, considérese la decisión multicriterio en sus tres problemas fundamentales: clasificación, selección y ranking. En los tres problemas se realizan juicios sobre objetos o acciones $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$, donde a_i representa el estado del i-ésimo atributo. En clasificación los juicios son absolutos; se trata de determinar a qué clase pertenece el objeto, de acuerdo con su similitud a objetos representativos de cada clase. Sea $\mathbf{G}_k = (g_1, g_2, \ldots, g_N)$ el patrón que identifica la k-ésima clase. Si x_i es el valor de verdad de que a_i es semejante a g_i, la conjunción c de $x_1, x_2, \ldots, x_N$ da el valor de verdad de que $\mathbf{a}$ es similar a $\mathbf{G}_k$. La comparación de los valores de verdad de similitud con las diferentes clases debe permitir una prescripción.

Usualmente se utilizan los valores lingüísticos de la Lógica Difusa tan sólo basados en el concepto de variable o etiqueta lingüística. Uno de los propósitos de la LDC es la agregación de las preferencias basadas en predicados que se expresan a través de frases complejas del lenguaje natural y no en una sola etiqueta lingüística.

En virtud de lo anterior, se define de manera lingüística el concepto de "conveniencia" de alternativas, de forma determinista, donde una alternativa es o no es conveniente según el criterio del AD, con el objetivo de introducir un concepto que no dependa de un elemento de referencia, como es el caso de las preferencias.

Por otra parte, el conjunto de alternativas convenientes se puede convertir en un conjunto difuso, donde aquellas alternativas cuyos valores de verdad sean mayores estrictamente a 0,5 se considerarán convenientes y los demás no, según la función de pertenencia definida por el AD.

Con ayuda del conjunto difuso anterior se pueden hacer compatibles los conceptos de conveniencia y de preferencia. Si para el AD una alternativa x tiene un mayor grado de verdad en cuanto a ser conveniente que una alternativa y, entonces x se prefiere a y.

En los problemas de selección, dado un conjunto A de acciones potenciales, se trata de encontrar $B \subset A$ tan pequeño como sea posible, de manera que pueda justificarse la no-consideración de todas las acciones en $A \setminus B$. Supóngase que x_i es el valor de verdad de la proposición "el nivel a_i del i-ésimo atributo es conveniente para los objetivos del AD". Entonces, la conjunción de $x_1, x_2, \ldots, x_N$ refleja la agregación de la conveniencia de la acción a como solución del problema de decisión, como miembro de B. Los valores de la conjunción para todo $y \in \mathbf{a}$ ofrecen razones para seleccionar B y descartar $A \setminus B$. En problemas de ranking, se trata de realizar un orden parcial de A, descubriendo y ordenando clases de equivalencia. Los valores de la conjunción pueden utilizarse para determinar si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ pertenecen a la misma clase de equivalencia, o si uno debe ser ubicado mejor que el otro. En todos los casos, el operador de orden estricto puede ser utilizado para diferenciar si $c(\mathbf{a})$ es evidentemente diferente de $c(\mathbf{b})$ o si la indiferencia puede aceptarse.

Como últimamente un sistema lógico es un modelo funcional basado en operadores, una toma de decisiones orientada a la lógica debería reflejar propiedades obtenidas de una aproximación funcional a los problemas de la decisión. En adelante, este enfoque será ilustrado considerando un modelo funcional muy popular. Supóngase que el sistema de preferencias del AD se modela por:

$$U = w_1 u_1 + w_2 u_2 + \ldots + w_N u_N \quad (1)$$

que se define sobre un conjunto de decisión A, con $u_i \in [0,1]$, $w_i > 0$ y $w_1 + w_2 + \ldots + w_N = 1$. Este es un modelo ampliamente utilizado bajo condiciones de independencia. Para hacer una conexión con la aproximación lógica, se puede aceptar que por cada elemento particular del conjunto de decisión, el valor i-ésimo de la función cardinal, mide la conveniencia para el AD del atributo asociado. U mide la conveniencia global del elemento en término de la conveniencia de sus atributos.
Las siguientes propiedades se cumplen:

1. u_i es una función cardinal sobre el dominio de sus respectivos atributos i-ésimos; por cada dimensión particular, se establece un orden estricto por >;
2. U representa un orden débil sobre A; además, si $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in AxA$, $U(\mathbf{a}) > U(\mathbf{b}) \Leftrightarrow$ "$\mathbf{a}$ es preferido estrictamente por $\mathbf{b}$";
3. Sea $\mathbf{a}$ un elemento de A. Denótese por $u_{min}(\mathbf{a})$ ($u_{max}(\mathbf{a})$) el mínimo (máximo) valor de $u_i(\mathbf{a})$ ($i = (1, \ldots, N)$). Nótese que $u_{min}(\mathbf{a}) < U < u_{max}(\mathbf{a})$;

4. Para todo i, U es una función estrictamente creciente de u_i ;
5. Si para todo i, $u_i(\mathbf{a}) = u_{igual}$, entonces $U = u_{igual}$;
6. Si $w_j = 1$ fuera permitido con $u_j = u_{min}(\mathbf{a})$, entonces U podría ser igual a $u_{min}(\mathbf{a})$. Con $u_j = u_{max}(\mathbf{a})$, U podría ser igual a $u_{max}(\mathbf{a})$. Estas son aproximaciones Max-min y Max-max respectivamente.

Las propiedades expuestas arriba no están limitadas a modelos simples. En modelos más generales sobre las preferencias del AD se tiene:

$$U = f_1(u_2, u_3, \ldots, u_N)u_1 + \ldots + f_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_N)u_i + \ldots + f_N(u_1, \ldots, u_{N-1})u_N \qquad (2)$$

con $f_1(u_2, u_3, \ldots, u_N) + \ldots + f_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_N) + \ldots + f_N(u_1, \ldots, u_{N-1}) = 1$ y

$$U = (u_1^{w_1} . u_2^{w_2} \ldots . u_N^{w_N})^{1/N} \qquad (2')$$

con $w_1 + w_2 + \ldots + w_N = N$

Las propiedades de la 1 a la 6, aún se satisfacen.

Aunque recientemente se han propuesto iniciativas axiomáticas diferentes, ver por ejemplo [Gabbay (2006)], se ha utilizado un enfoque casi universal la estructura axiomática de t-norma y c-norma para los operadores de conjunción y disyunción [Dubois y col. (2007) pp.11-12]. Hay dos propiedades de los operadores tipo t-norma que son difícilmente compatibles con el razonamiento preferencial. Ellas son las siguientes:

A. Si *c* es una t-norma, y x_1 y x_2 son valores de verdad de dos predicados, entonces $c(x_1, x_2) < \min(x_1, x_2)$;

B. Si *c* es una t-norma, c es un operador asociativo.

La propiedad A contradice a las propiedades 3, 5 y 6 expuestas más arriba. [Dyson (1980)] probó que el operador de conjunción "min" es equivalente a la aproximación max-min de la toma de decisiones multicriterio. Esto corresponde a una manera de razonar aún más "pesimista" que la aproximación max-min, tanto como $c(x_1, x_2) < \min(x_1, x_2)$.

Por otra parte, si se cumple la propiedad asociativa, los árboles de jerarquía de objetivos que representan preferencias diferentes, producen valores de verdad iguales de sus predicados compuestos. Bajo esta propiedad, los dos árboles de la figura 1 representarían las mismas preferencias, algo inapropiado en un modelo de toma de decisiones. Es obvio, por ejemplo, que el objetivo x tiene mayor relevancia en el árbol de la derecha que en el de la izquierda.

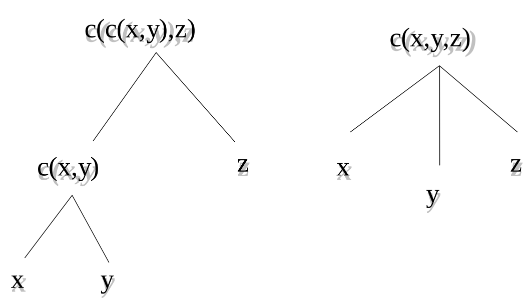

Figura 1

Se deduce de los argumentos arriba expuestos que, a diferencia de la mayoría de los sistemas multivalentes, una nueva lógica para la toma de decisiones no debería basarse en t-normas o c-normas.

La transitividad completa y la comparabilidad de modelos funcionales ha sido extensamente criticado por la escuela europea de la Ayuda a la Decisión Multicriterio (ADMC), véase [Roy y Vanderpooten (1995)]. [Roy (1990)] describió situaciones en las que un AD real o actor de la decisión no puede (o no desea) tomar una decisión. Estas vacilaciones pudieran ser consecuencia de:

- El AD es una entidad definida vagamente, o quizá una entidad bien precisa con reglas pobremente definidas [Roy (1990)];
- La existencia en la mente del AD (si el AD es una persona real) de ciertas “zonas” de incertidumbre, creencias imprecisas, conflictos y aspiraciones de competencia [Roy (1990)];
- Valores de atributos imprecisos.

La ADMC introdujo las nociones de veto y de incomparabilidad. Éstas son características importantes para un sistema lógico que trate de reflejar el conocimiento y razonamientos imprecisos.

La propiedad de incomparabilidad se define en la modelación clásica de preferencias como una relación J, irreflexiva y simétrica, tal que $aJb \Leftrightarrow \mathrm{n}(a > b) \wedge \mathrm{n}(a = b) \wedge \mathrm{n}(a < b)$, o sea, ni el atributo a es preferido al atributo b, ni el atributo b es preferido al atributo a, ni ambos son igualmente preferidos. Ciertas situaciones donde existe falta de información, incertidumbre, ambigüedad, preferencias multidimensionales y con conflicto son la causa de que J sea no vacío [Öztürk, Tsoukiàs y Vincke (2003)].

Las propiedades 1-6 arriba mencionadas unidas al veto y a la incomparabilidad, son características deseables para un sistema lógico orientado a la toma de decisiones. Aquí se presenta una lógica compensatoria multivalente que satisface estos requerimientos. Esto aparece como un modelo combinado de toma de decisión y razonamiento aproximado.

3. UNA LÓGICA DIFUSA COMPENSATORIA

Sea *n* de *[0,1]* en *[0,1],* un operador de negación, o sea, un operador estrictamente decreciente e involutivo ($\mathrm{n}(\mathrm{n}(x) = x$) que cumple: $\mathrm{n}(0) = 1$ y $\mathrm{n}(1) = 0$ [Dubois y Prade (1980) pp.11-18].

Sean en lo sucesivo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n})$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_\mathrm{n})$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_\mathrm{n})$ elementos cualesquiera del producto cartesiano $[0,1]^\mathrm{n}$.

Una cuarteta de operadores continuos $(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{o}, \mathrm{n})$, c y d de $[0,1]^\mathrm{n}$ en $[0,1]$, o de $[0,1]^2$ en $[0,1]$ y n un operador negación, constituyen a Lógica Difusa Compensatoria (LDC) si se satisface el siguiente grupo de axiomas:

I. **Axioma de Compensación:** $\min(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n}) \le c(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n}) \le \max(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n})$

II. **Axioma de Conmutatividad o Simetría:**

$$\mathrm{c}(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{i}, \ldots, x_\mathrm{j}, \ldots, x_\mathrm{n}) = \mathrm{c}(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{j}, \ldots, x_\mathrm{i}, \ldots, x_\mathrm{n})$$

III. **Axioma de Crecimiento Estricto:** Si $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_{\mathrm{i-1}} = y_{\mathrm{i-1}}, x_{\mathrm{i+1}} = y_{\mathrm{i+1}}, \ldots, x_\mathrm{n} = y_\mathrm{n}$ son diferentes de cero, y $x_\mathrm{i} > y_\mathrm{i}$, entonces $\mathrm{c}(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n}) > \mathrm{c}(y_1, y_2, \ldots, y_\mathrm{n})$

IV. **Axioma de veto:** Si $x_\mathrm{i} = 0$ para algún i entonces $\mathrm{c}(\mathbf{x}) = 0$.

V. **Axioma de Reciprocidad Difusa:** $\mathrm{o}(x, y) = \mathrm{n}[\mathrm{o}(y, x)]$

VI. **Axioma de Transitividad Difusa:** Si $\mathrm{o}(x, y) \ge 0{,}5$ y $\mathrm{o}(y, z) \ge 0{,}5$, entonces

$$\mathrm{o}(x, z) \ge \max(\mathrm{o}(x, y), \mathrm{o}(y, z))$$

VII. **Leyes de De Morgan:**

$$\mathrm{n}(\mathrm{c}(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n}) = \mathrm{d}(\mathrm{n}(x_1), \mathrm{n}(x_2), \ldots, \mathrm{n}(x_\mathrm{n}))$$
$$\mathrm{n}(\mathrm{d}(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n}) = \mathrm{c}(\mathrm{n}(x_1), \mathrm{n}(x_2), \ldots, \mathrm{n}(x_\mathrm{n}))$$

Los operadores c y d reciben el nombre de conjunción y disyunción respectivamente. El operador o recibe el nombre de orden estricto difuso.

El Axioma de Compensación da nombre a la estructura propuesta; la propiedad que refleja suele ser utilizada en la literatura de operadores difusos para definir el concepto de operador compensatorio [Detyniecki (2000)]. Obsérvese que para el caso particular de dos componentes, el hecho de que el valor del operador se encuentre entre el mínimo y el máximo, puede interpretarse como que el segundo valor compensa el valor del primero en la veracidad de la conjunción. La idea se generaliza al caso de n componentes. Este axioma es consistente con las Propiedades 3 y 6 de la Sección 2. Nótese que como $\mathrm{c}(x_1, x_2,...,x_i,...,x_j,...,x_n) > \min(x_1, x_2,...,x_i,...,x_j,...,x_n)$, el razonamiento del AD es menos "pesimista" que la manera max-min de razonar.

El Axioma de Conmutatividad o Simetría es deseable porque es natural que el resultado de la conjunción sea independiente del orden en que se tomen los predicados básicos.
La introducción del Axioma de Crecimiento Estricto dota al sistema de una sensibilidad que hace que cualquier variación en los valores de los predicados básicos modifique el valor de verdad del predicado compuesto, siempre que ninguno de los predicados básicos tenga valor cero. Como consecuencia de este axioma se tiene además la deseada propiedad de no asociatividad porque no existen operadores compensatorios asociativos, estrictamente crecientes [Dubois y Prade (1985)]. Este axioma es consistente con la propiedad 4 de la Sección 2.

El Axioma de Veto se inspira en el enfoque de la ADMC, como se discutió en la Sección 2. Esta propiedad otorga a cualquier predicado básico de una conjunción la capacidad de vetar, es decir la capacidad de impedir cualquier forma de compensación cuando su valor es igual a cero.

En un "marco difuso", los Axiomas V-VI coinciden con las propiedades de relaciones de preferencia estricta de los modelos funcionales de decisión. (Propiedades 1-2 de la Sección 2). El orden borroso permite asociar un valor de verdad al enunciado de preferencia estricta; es una forma de modelar la imprecisión que conduce con frecuencia a la incomparabilidad.

En lo adelante, dado un operador negación y de acuerdo con los axiomas V y VI, un orden estricto es un predicado $\mathrm{o}: \mathrm{U}^2 \to [0,1]$ que satisface las dos condiciones siguientes:

A1. $\mathrm{o}(x, y) = \mathrm{n}[\mathrm{o}(y, x)]$ (reciprocidad difusa)

B1.Si $\mathrm{o}(x, y) \geq 0{,}5$ y $\mathrm{o}(y, z) \geq 0{,}5$, entonces $\mathrm{o}(x, z) \geq \max(\mathrm{o}(x, y), \mathrm{o}(y, z))$ (transitividad difusa max-max)

En la literatura se aborda el concepto de orden estricto difuso de diferentes maneras. [Dasgupta y Deb (1996)], [Dasgupta y Deb (2001)], [Chiclana y col.(2003)], [García-Lapresta y Meneses-Poncio (2001)], [García-Lapresta y Marques (2003)], [Switalski (2001)], [Bodenhorf (2008)]. La propiedad de antisimetría ($\mathrm{p}(x, y) > 0 \Rightarrow \mathrm{p}(y, x) = 0$) que emplean otros autores para definir orden estricto no es compatible con el deseado comportamiento sensible ante cambios en los predicados básicos (Axioma de Crecimiento Estricto). Según [Switalski (2001)], [Switalski (2003)] y [García-Lapresta (2001)], la selección de la fuerte propiedad transitividad difusa max-max , en presencia de la reciprocidad difusa, permite la satisfacción de un grupo de propiedades deseables que aportan mayor significación al orden estricto . Note que la propiedad transitiva de los modelos (1) y (2) se cumple en el caso determinista: Si $\mathrm{o}(x, y) = 1$ y $\mathrm{o}(y, z) = 1$, entonces $\mathrm{o}(x, z) = 1$.

Con la definición de A1 y B1 dada más arriba, la función $\mathrm{o}(x, y) = 0{,}5[\mathrm{C}(x) - \mathrm{C}(y)] + 0{,}5$, con $\mathrm{n}(x) = 1 - x$, es un orden estricto sobre el universo del predicado C, ver [Dubois y Prade (1980) pp.80-83], que ya ha sido utilizado con éxito [Espin y col. (2007)]. El predicado $\mathrm{o}(x, y)$ permite entonces medir "cuánto mejor es x que y " si C mide la conveniencia de las alternativas x, y para el decisor. Si $\mathrm{o}(x, y) = 0{,}5$, entonces x, y se considerarían indiferentes. Más aún, este orden lógico puede utilizarse de manera más general para comparar las veracidades de afirmaciones modeladas a través de predicados. Es un instrumento para establecer una relación entre las preferencias del decisor y las veracidades atribuidas a su conocimiento. Estos elementos aparecen separados en la mayoría los modelos teóricos que se han propuesto antes.
Existen muchas posibilidades para definir la implicación de acuerdo a los avances que al respecto hay en la literatura [Dubois y col. (2007) pp.12-15]; se prefiere comenzar en este trabajo, partiendo de definiciones que

utilicen combinaciones de los operadores conjunción, disyunción y negación, para explorar el efecto que esta clase de operadores tienen en el comportamiento de la implicación.

La implicación puede ser definida en el caso general como $\mathrm{i}_1(x,y)=\mathrm{d}(\mathrm{n}(x),y)$ (3)
o $\mathrm{i}_2(x,y)=\mathrm{d}(\mathrm{n}(x),\mathrm{c}(x,y))$ (4), de ese modo generaliza las tablas de verdad de la lógica booleana de dos maneras diferentes.

La equivalencia es consecuentemente definida a partir del operador implicación como
$\mathrm{e}(x,y)=\mathrm{i}(x,y)\wedge\mathrm{i}(y,x)=\mathrm{c}(\mathrm{i}(x,y),\mathrm{i}(y,x))$. (4)

Los cuantificadores universal y existencial deben ser introducidos de manera natural a partir de los operadores conjunción y disyunción seleccionados, introducidos los mismos, se tiene que cualquiera sea un predicado difuso p sobre el universo U las proposiciones universal y existencial se definen respectivamente como:

$$\forall_{x\in\mathrm{U}}\mathrm{p}(x)=\bigwedge_{x\in\mathrm{U}}\mathrm{p}(x) \quad (5)$$

$$\exists_{x\in\mathrm{U}}\mathrm{p}(x)=\bigvee_{x\in\mathrm{U}}\mathrm{p}(x) \quad (6)$$

Las leyes de De Morgan son propiedades esenciales en el comportamiento, que relacionan de una manera natural y universalmente aceptada los operadores conjunción (c) y disyunción (d). Partiendo de la apuntada selección de los operadores o y n, su introducción permite comprobar fácilmente un comportamiento similar al del operador conjuntivo que se expresa en las siguientes propiedades:

1. Propiedad de Compensación: $\min(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le \mathrm{d}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le \max(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
2. Propiedad de Conmutatividad o Simetría: $\mathrm{d}(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n)=\mathrm{d}(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$
3. Propiedad de Crecimiento Estricto:
   Si $x_1=y_1, x_2=y_2,\ldots,x_{i-1}=y_{i-1},x_{i+1}=y_{i+1},\ldots,x_n=y_n$ no son iguales a uno, y $x_i>y_i$, entonces $\mathrm{d}(x_1,x_2,\ldots,x_n)>\mathrm{d}(y_1,y_2,\ldots,y_n)$
4. Si $x_i=1$ para algún i entonces $\mathrm{d}(\mathbf{x})=1$
   Para un vector $(a,a,\ldots,a)$ cualquiera sea $a\in[0,1]$ se tiene del axioma de compensación que $a=\min(a,a,\ldots,a)\le \mathrm{c}(a,a,\ldots,a)\le \max(a,a,\ldots,a)=a$. De este resultado se puede concluir utilizando una de las Leyes de De Morgan, que la disyunción satisface la misma desigualdad. Por lo tanto se satisface la Propiedad de Idempotencia siguiente:
5. $\mathrm{c}(a,a,\ldots,a)=a$, $\mathrm{d}(a,a,\ldots,a)=a$

Esta propiedad es consistente con la Propiedad 5 de la Sección 2. Esto es consecuencia del Axioma I. Nótese que $\mathrm{c}(1,1,\ldots,1)=1$. Con el Axioma de Veto, este resultado generaliza la conjunción Booleana Nótese también que los operadores no compensatorios, tales como $\mathrm{c}(x_1,x_2)<\min(x_1,x_2)$ no satisfacen la idempotencia, por tanto, ellos no coinciden con la Propiedad 5 de la Sección 2.

Los operadores que satisfacen el Axioma 1 se llaman Operadores Compensatorios. [Detyniecki (2000)]. Los operadores compensatorios simétricos encontrados en la literatura son los siguientes [Detyniecki (2000)]:

1. Operadores de máximo y mínimo; el primero no satisface los axiomas de Crecimiento Estricto y de Veto; el operador mínimo no satisface el Axioma de Crecimiento Estricto.
2. Los estadísticos de k-orden, que incluyen el operador mediana, no satisfacen los Axiomas de Crecimiento Estricto y de Veto.
3. Las combinaciones de norma y co-norma, como son los operadores compensatorios exponenciales (incluyendo le llamado Operador de Zimmerman) y los operadores de convexidad lineal, no satisfacen el Axioma de Veto.
4. La media aritmética no satisface el Axioma de Veto.

5. Las medias cuasi – aritméticas, incluyen, por ejemplo a la media geométrica. Estos son operadores de la forma $M_f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i))$, donde f es una función continua estrictamente monótona que se extiende, con el uso de los límites correspondientes, a puntos donde no está definida. Estos operadores satisfacen los Axiomas I-III. Si se tiene además que para todo $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\lim_{x_i \to 0} M_f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, se cumplirá también el Axioma IV.

Entonces, teniendo en cuenta que $d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - f^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(1 - x_i))$ $n(x) = 1 - x$ y $o(x, y) = 0{,}5[C(x) - C(y)] + 0{,}5$, se tendrá una clase de Lógicas Compensatorias que se llamarán Lógicas Compensatorias Basadas en Medias Cuasi-Aritméticas (LCBMCA).

4. LÓGICAS COMPENSATORIAS BASADAS EN LA MEDIA GEOMÉTRICA (LCBMG) Y SUS RELACIONES CON LA LÓGICA BOOLEANA.

La media geométrica, que puede obtenerse $f(x) = \ln x$, satisface la condición anterior y por tanto los axiomas I-IV.

Si se toma la media geométrica, $c(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 . x_2 .. x_n)^{1/n}$, como el operador de conjunción.

Como consecuencia de las Leyes de De Morgan, la disyunción correspondiente sería:

$d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - ((1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n))^{1/n}$

De todo lo anterior se desprende que la cuarteta de operadores formada por la media geométrica y su dual como operadores conjuntivo y disyuntivo, junto al orden $o(x, y) = 0{,}5[C(x) - C(y)] + 0{,}5$ y la negación $n(x) = 1 - x$ constituyen una Lógica Compensatoria que se llamará Lógica Compensatoria basada en la Media Geométrica (LCBMG).

Para la LCBMG, las definiciones de los cuantificadores universal y existencial, serían respectivamente:

$$\forall_{x \in U} p(x) = \bigwedge_{x \in U} p(x) = \sqrt[n]{\prod_{x \in U} p(x)} = \qquad (5')$$
$$= \begin{cases} \exp(\frac{1}{n}\sum_{x \in U} \ln(p(x))) & \text{si } p(x) \neq 0, \text{para todo } x \in U \\ 0 & \text{si algún } x \; p(x) = 0 \end{cases}$$

$$\exists_{x \in U} p(x) = \bigvee_{x \in U} p(x) = 1 - \sqrt[n]{\prod_{x \in U} (1 - p(x))} =$$
$$= \begin{cases} 1 - \exp(\frac{1}{n}\sum_{x \in U} \ln(1 - p(x))) & \text{si } \; p(x) \neq 0 \text{para todo } x \in U \\ 0 & \text{si para algún } x \; p(x) = 0 \end{cases}$$

(6’)

Para el caso de conjuntos acotados de $\Re^n$, los cuantificadores universal y existencial en LCBMG son definidos de manera natural desde los conceptos de conjunción y disyunción respectivamente, si se pasa al caso continuo a través del cálculo integral:

$$\forall x \, p(x) = \begin{cases} e^{\frac{\int_X \ln(p(x))dx}{\int_X dx}} & \text{si } p(x) > 0 \text{ para todo } x \in X \\ 0 & \text{En cualquier otro caso} \end{cases} \qquad (5'')$$

$$\exists x\, \mathrm{p}(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{\int_X \ln(1-\mathrm{p}(x))dx}{\int_X dx}} & \text{si } \mathrm{p}(x) > 0 \text{ para todo } x \in X \\ 1 & \text{En cualquier otro caso} \end{cases} \tag{6''}$$

Las fórmulas del Cálculo Proposicional de LCBMG son funciones de los operadores c, d, n e i. Consecuentemente con la definición dada por la expresión 5, cualquier función $f: [0,1]^n \to [0,1]$

de LCBMCA se considera válida si $f(\mathbf{x}) > 0$ para cualquier elemento del dominio y además

$$\frac{\int_{[0,1]^n} \ln f(x) dx}{\int_{[0,1]^n} dx} > \frac{1}{2} \tag{7}$$

De acuerdo con el Cálculo de Predicados introducido a través de las definiciones de los cuantificadores, se satisface el siguiente Teorema de Compatibilidad con la Lógica Booleana:

Teorema 1: Las formulas válidas del cálculo proposicional de LCBMG son exactamente las del Cálculo Proposicional Booleano (CPB) para cualesquiera de las dos selecciones del operador implicación (i_1 ó i_2), correspondientes a las formulas (3) y (4) respectivamente.

Demostración:

Se escogió el sistema de Kleene, y fueron calculados los valores de verdad de sus axiomas utilizando la versión 6.5 de MATLAB para ambas implicaciones, que aparecen en la tabla 1 identificadas por i_1 e i_2.

Los resultados se ofrecen en la Tabla 1.

Axiomas de Kleene:

$AX1: \quad A \to (B \to A)$

$AX2: \quad (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$

$AX3: \quad A \to (B \to A \wedge B)$

$AX4: \quad A \wedge B \to A \quad A \wedge B \to B$

$AX5: \quad A \to A \vee B \quad B \to A \vee B$

$AX6: \quad (A \to C) \to ((B \to C)) \to (A \vee B \to C))$

$AX7: \quad (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$

$AX8: \quad \neg(\neg A) \to A$

	i_1	i_2
Ax1	0,5859	0,5685
Ax2	0.5122	0.5073
Ax3	0.5556	0.5669
Ax4	0.5859	0.5661
Ax5	0.8533	0.5859
Ax6	0.5026	0.5038
Ax7	0.5315	0.5137
Ax8	0.5981	0.5981

Tabla 1: Valores de verdad de los axiomas de Kleene

Como todos los valores de verdad son mayores que 0,5, y la axiomática de Kleene es una de las vías equivalentes de deducir las fórmulas del CPB entonces las fórmulas válidas del Cálculo Proposicional de LCBMG son fórmulas válidas de la Lógica Booleana. Para terminar la prueba de la equivalencia, basta probar que las fórmulas que no son válidas en el CPB, no lo son en el Cálculo Proposicional de LCBMG. Ello se cumple porque si es no válida en el CPB existirá un $\mathbf{x}$ del Dominio de f en la formula (7), que cumple $f(\mathbf{x}) = 0$, que por definición es cero.

Esta propiedad distingue esta Lógica Multivalente; los sistemas multivalentes generalizan unas u otras propiedades de la lógica bivalente, pero ninguno antes ha demostrado una propiedad de carácter general como este teorema de compatibilidad.

5. COMPATIBILIDAD DE LCBMG CON EL ORDEN

En el marco de la teoría normativa de la decisión se suele utilizar la relación de orden débil $\geq$ (reflexiva y transitiva sobre el conjunto de los pares de alternativas) que suele interpretarse como $x \geq y$ si x es al menos tan buena como y.

Desde la concepción básica de la Teoría de la Medición, si atribuimos a un predicado p la modelación de las preferencias del decisor, entonces la relación de orden débil $\geq$ correspondiente a las preferencias del decisor debe satisfacer: 8

$x \geq y$ si y sólo si $\mathrm{p}(x) \geq \mathrm{p}(y)$

En este sentido si p y q son predicados que miden las preferencias en relación con los objetivos 1 y 2, un operador r es apropiado para modelar la 'confluencia' de objetivos si se cumple la condición:

$$\mathrm{r}(x \geq_1 y, x \geq_2 y) \text{ si y sólo si } \mathrm{r}(\mathrm{p}(x), \mathrm{q}(x)) \geq \mathrm{r}(\mathrm{p}(y), \mathrm{q}(y)) \quad (8)$$

donde $\geq$ es una relación de orden débil que expresa las preferencias teniendo en cuenta ambos objetivos.

Condiciones necesarias y suficientes para la desigualdad $\mathrm{r}(\mathrm{p}(x), \mathrm{q}(x)) \geq \mathrm{r}(\mathrm{p}(y), \mathrm{q}(y))$ han sido estudiadas sólo para algunos operadores; por ejemplo, [Bellman y Giertz (1973)], examinaron el caso del operador mínimo. En el marco de la selección de las conectivas de una Lógica Multivalente con intenciones normativas, debe satisfacerse la condición (8) por los operadores seleccionados para la conjunción y la disyunción, para que dichos operadores puedan ser utilizados para ordenar alternativas 'según la conjunción o la disyunción de todos los objetivos'; (8) merece el nombre de 'compatibilidad de la conjunción y la disyunción con el orden'. Sin embargo, las lógicas multivalentes propuestas privilegian unas u otras propiedades lógicas de dudosa importancia en la modelación del razonamiento y la decisión como la distributividad y la asociatividad [Dubois y Prade (1980) pp.277-279], e incumplen propiedades importantes como (8).

Es posible introducir a través de la conectiva $\rightarrow$ una relación de orden débil en el sentido de LCBMG porque las propiedades reflexiva y transitiva son satisfechas en el sentido de 7 por la relación $\mathrm{o}(x,y) : x \geq y$ si y solo si $\mathrm{p}(y) \rightarrow \mathrm{p}(x)$.

Tal relación de orden puede ser interpretada como que x es al menos tan bueno como y desde la perspectiva de p, si y sólo si se cumple que si y es conveniente desde la perspectiva de p, entonces x lo es.

Nótese además partiendo de esa interpretación de la relación $\rightarrow$, que si en (8) r se interpreta como la conjunción y la disyunción bivalentes, y el orden débil por el operador implicación, esta propiedad puede ser escrita a través de las siguientes fórmulas válidas de la lógica bivalente:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{p}_1(x) \rightarrow \mathrm{p}_1(y)) \wedge (\mathrm{p}_2(x) \rightarrow \mathrm{p}_2(y)) \wedge \ldots \wedge (\mathrm{p}_n(x) \rightarrow \mathrm{p}_n(y)) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (\mathrm{p}_1(x) \wedge \mathrm{p}_2(x) \wedge \ldots \wedge \mathrm{p}_n(x)) \rightarrow (\mathrm{p}_1(y) \wedge \mathrm{p}_2(y) \wedge \ldots \wedge \mathrm{p}_n(y))\end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}&(\mathrm{p}_1(x) \rightarrow \mathrm{p}_1(y)) \vee (\mathrm{p}_2(x) \rightarrow \mathrm{p}_2(y)) \vee \ldots \vee (\mathrm{p}_n(x) \rightarrow \mathrm{p}_n(y)) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (\mathrm{p}_1(x) \vee \mathrm{p}_2(x) \vee \ldots \vee \mathrm{p}_n(x)) \rightarrow (\mathrm{p}_1(y) \vee \mathrm{p}_2(y) \vee \ldots \vee \mathrm{p}_n(y))\end{aligned} \quad (10)$$

Escrito de otro modo:

$$(x \leq_1 y) \wedge (x \leq_2 y)) \wedge \ldots \wedge (x \leq_n y) \leftrightarrow x \leq_c y \quad (11)$$

$$(x \leq_1 y) \wedge (x \leq_2 y)) \wedge \ldots \wedge (x \leq_n y) \leftrightarrow x \leq_d y \quad (12)$$

Donde $\leq_i, \leq_c, \leq_d$ son respectivamente los órdenes correspondientes al predicado i-ésimo y a los predicados que se agregan a través de la conjunción y disyunción los predicados p_i.

Como consecuencia del Teorema 1, esas fórmulas se satisfacen en el sentido de (7) por LCBMG; por lo tanto (8) es compatible con la conjunción y la disyunción seleccionadas.
Nótese que ni el orden estricto difuso definido a través de los axiomas V y VI, ni el orden débil definido a través del operador implicación, son transitivos en un sentido determinista. El primero introduce preferencias difusas, donde como hemos dicho anteriormente la transitividad queda relegada al caso de la certeza absoluta como caso particular de la propiedad transitiva max-max. Igual sucede con la transitividad de la relación de orden débil definida a través de la implicación; en este caso, además se cumple la transitividad en el sentido definido por LDC.

La propiedad de incomparabilidad se define en la LDC a partir de la fórmula de orden dada en la Sección 3, como se muestra a continuación:
Se dice que x es preferido a y con valor de verdad α, si $x \in \mathrm{P}_\alpha(y)$, donde $\mathrm{P}_\alpha(y) = \{x : \mathrm{o}(x,y) > \alpha\}$.
Se dice que x y y son indiferentes con valor de verdad α, si $x \in \mathrm{I}_\alpha(y)$, donde
$\mathrm{I}_\alpha(y) = \{x : \mathrm{o}(\mathrm{o}(x,y);0{,}5) \le \alpha \vee \mathrm{o}(\mathrm{o}(y,x);0{,}5) \le \alpha\}$.
Si $\alpha = 0{,}5$ no existe incomparabilidad entre x y y, pero si $\alpha > 0{,}5$ entonces x y y son incomparables si $x \notin \mathrm{P}(y)$, $x \notin \mathrm{I}(y)$ y $y \notin \mathrm{P}(x)$.

6. UN EJEMPLO ILUSTRATIVO: COMPETITIVIDAD DE EMPRESAS

El Cálculo con Palabras propuesto por Zadeh y Kacprzyk [Zadeh y Kacprzyk (1999) pp.3-7] parte de las llamadas variables lingüísticas. Muchas aproximaciones a la toma de decisiones han usado estas variables para modelar la información, combinadas con relaciones difusas de preferencia y matrices. Existen importantes avances en la modelación de las preferencias con el uso de información lingüística.
A continuación se ilustra con un ejemplo la oportunidad que ofrece una LDC para resolver problemas de decisión de la vida real, con ayuda del lenguaje natural o profesional.

El siguiente modelo empleando LCBMG ordena un conjunto de empresas en un mercado competitivo. En su construcción participaron como expertos especialistas de la empresa consultora BIOMUNDI, la cual ha alcanzado un gran desarrollo en la oferta de servicios de inteligencia competitiva en Cuba. Corresponde a un trabajo de consultoría sobre el mercado de adhesivos tisulares en varias zonas geográficas.

A continuación aparecen las formulaciones verbales y su traducción al lenguaje del Cálculo de Predicados:
Una empresa es competitiva en una línea de productos para un mercado dado si 1) la economía de la empresa es sólida y 2) su posición tecnológica es de avanzada y 3) es muy fuerte en la línea de productos en el mercado de referencia
1) Una empresa es económicamente sólida si tiene un buen estado financiero y buenas ventas. Si el estado financiero fuera algo malo debe ser compensado con muy buenas ventas.
2) Una empresa tiene una posición tecnológica de avanzada si su tecnología actual es buena y además es dueña de patentes, o tiene productos en investigación desarrollo, o dedica cantidades importantes de dinero a esta actividad. Si su tecnología es algo atrasada, entonces debe tener muchas patentes, o muchos productos en investigación desarrollo, o dedicar cantidades muy importantes de recursos a esta actividad.
3) Una empresa es fuerte en una línea de productos, si tiene fortaleza en el mercado, tiene una línea variada de productos y es independiente del proveedor

El modelo es el siguiente predicado compuesto:

$$\mathrm{C}(x) = \mathrm{s}(x) \wedge \mathrm{T}(x) \wedge \mathrm{l}^2(x)$$

donde:

$$\mathrm{s}(x) = \mathrm{f}(x) \wedge \mathrm{v}(x) \wedge (\neg(\mathrm{f}(x))^{0.5} \rightarrow \mathrm{v}^2(x))$$

$$\mathrm{T}(x) = \mathrm{t}(x) \wedge (\mathrm{p}(x) \vee \mathrm{i}(x) \vee \mathrm{d}(x)) \wedge (\neg\, \mathrm{t}^{0,5}(x) \rightarrow (\mathrm{p}^2(x) \vee \mathrm{i}^2(x) \vee \mathrm{d}^2(x))\ \text{y}$$

$$\mathbf{l}(x) = \mathbf{m}(x) \wedge \mathbf{vl}(x) \wedge \mathbf{ip}(x)$$

Los predicados tienen los siguientes significados:

$\mathrm{C}(x)$: La empresa x es competitiva

$\mathrm{S}(x)$: La empresa x tiene una economía sólida

$T(x)$: La empresa x tiene una posición tecnológica de avanzada
$l(x)$: La empresa x es fuerte en la línea de productos
$f(x)$: La empresa x tiene un buen estado financiero
$v(x)$: La empresa x tiene buenas ventas
$t(x)$: La empresa x tiene actualmente una buena tecnología
$p(x)$: La empresa x es dueña de patentes
$i(x)$: La empresa x tiene productos en investigación desarrollo
$d(x)$: La empresa x dedica importantes cantidades de dinero a la investigación desarrollo
$m(x)$: La empresa x tiene fortaleza en el mercado
$vl(x)$: La empresa x tiene una línea variada de productos
$ip(x)$: La empresa x es independiente del proveedor

El estudio y el uso de funciones de la forma $f(x) = x^a$ donde a es un número real, u otras, como vías de modificar la función de pertenencia asociada a un predicado, para lograr un nuevo significado, que modifica el anterior intensificándolo o atenuándolo, es una práctica habitual en las aplicaciones de la lógica difusa [Dubois y Prade (1985)], [Novák (1999)]. Nótese que en este caso se usan los exponentes 0,5 y 2 para modelar las palabras ‘algo’ y ‘muy’ respectivamente, [Zadeh (1975)].
Las figuras 2-5 ilustran el modelo a través de un árbol lógico. En la figura 2 se ilustra el predicado conjuntivo $C(x)$ para evaluar la competitividad. En las figuras 3, 4 y 5 se incorporan al árbol paso a paso los predicados que definen la Solidez Económica ($S(x)$), la Posición Tecnológica de Avanzada ($T(x)$) y la Fortaleza en la Línea de Productos ($l(x)$).

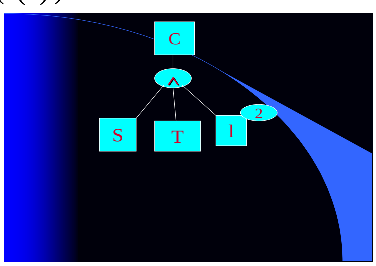

Figura 2

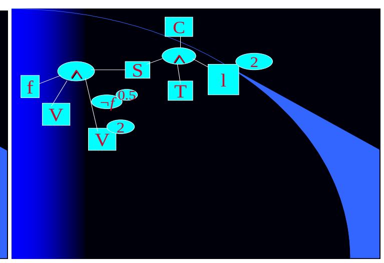

Figura 3

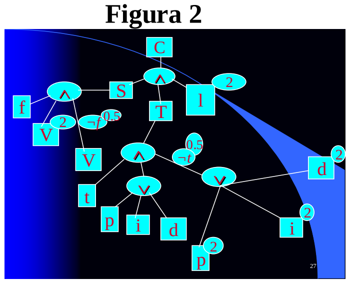

Figura 4

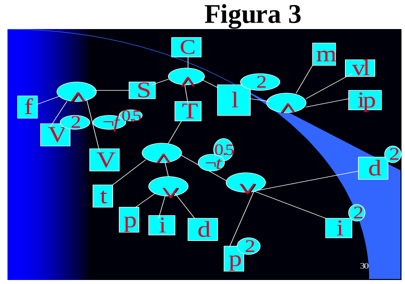

Figura 5

En el árbol las expresiones condicionales son expresadas colocando sobre el arco el predicado correspondiente a la premisa y como extremo del propio arco, la tesis.
Obsérvese que:

1. El modelo de preferencias construido a través del lenguaje puede ser muy variado y rico.

2. El uso de condicionales permitió en este caso, incrementar las exigencias de un atributo partiendo del estado de otro. Ello podría describir, aunque no es este el caso, situaciones de dependencia preferencial.

3. La evaluación se realiza de la manera descrita por el árbol usando como atributos, las veracidades asociadas a los predicados básicos f, V, t, p, i, d, ip, vl y m. En el ejemplo que se ilustra en la tabla 1, las veracidades se obtuvieron o bien directamente a través de la evaluación de expertos debidamente informados, o a través de funciones de pertenencia sobre datos numéricos en los predicados que esto fue posible, como es el caso de los predicados V, p, i, d y vl, que se obtuvieron respectivamente de los datos de ventas, número de patentes, número de productos en Investigación Desarrollo, monto invertido en Investigación Desarrollo, y número de productos que integran la línea.

4. Se utilizaron funciones de pertenencia sigmoidales que en el caso de funciones crecientes o decrecientes son recomendadas en la literatura por consideraciones teóricas [Dubois y Prade (1985)]. Ello se ilustra a través de las figuras 6 y 7 para el caso de los predicados V e i, en dependencia de los datos de las ventas y del número de productos en Investigación Desarrollo. Ciertos parámetros de estas funciones quedan determinados fijando las preimágenes de dos valores, como se ilustra en las figuras mencionadas. Ello define las expresiones correspondientes a los predicados V e i a partir del significado de dichas expresiones, utilizando los datos. La preimagen de 0,5 se establece de manera que a partir de ese dato se considera que la afirmación contenida en el predicado es aceptablemente cierta. La preimagen de 0,1 establece un valor para el cual el dato hace casi inaceptable la afirmación correspondiente.

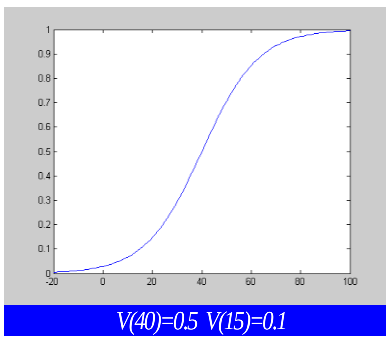

Figura 6

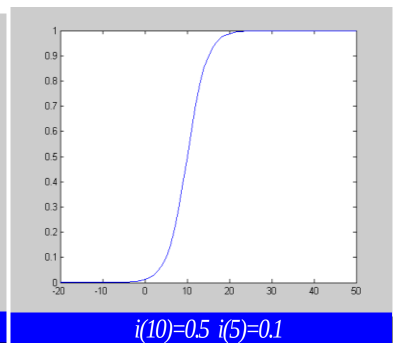

Figura 7

La tablas 2 y 2´ recoge las evaluaciones de 4 empresas en un mercado de adhesivos tisulares de un país de América Latina. La implicación utilizada en los cálculos fue i_2, que los autores consideran posee un mejor comportamiento [Espin et al (2006)]

Empresa *x*	f(*x*)	V(*x*)	T(*x*)	p(*x*)	i(*x*)	d(*x*)	Ip(*x*)
A	0,5	0,47	0,3	0,93	0,81	0,61	0,6
B	0,6	0,63	0,5	0,41	1	0,95	0,8
C	0,9	0,75	0,7	0,62	0,55	0	1
D	0	0,99	0,8	0,81	0,79	0,7	0,5

Tabla 2. Cálculo con LCBMG de las Competitividad de 4 empresas cubanas (Primeras variables).

Empresa x	vl(*x*)	m(*x*)	S(*x*)	T(*x*)	l(*x*)	$l^2(x)$	C(*x*)
A	0,23	0,1	0,5	0,516	0,234	0,058	0,246
B	0,77	0,4	0,611	0,682	0,627	0,393	0,545
C	0,92	0,8	0,812	0,584	0,903	0,815	0,728
D	0,39	1	0	0,763	0,58	0,336	0

Tabla 2’ Cálculo con LCBMG de las Competitividad de 4 empresas cubanas (continuación).

Del valor de verdad del predicado $C(x)$ (Tablas 2 y 2´) se infiere que i) es bastante cierto que la empresa C es competitiva en el mercado estudiado; ii) es aceptablemente cierto que B es también competitiva; iii) es falso que A y D sean competitivas.

Nótese también en las tablas 2 y 2´ que:

1. Todos los valores del predicado C están entre el mínimo y el máximo de los valores de verdad de los predicados S, T y l^2 en correspondencia con el cumplimiento del axioma de compensación.
2. El valor del predicado C para la empresa D es cero debido al valor del predicado S, que a su vez se obtiene del predicado básico f, en ambos casos debido al axioma de veto. En este caso, no se produce compensación alguna, a pesar de que por ejemplo T tiene un valor alto de veracidad.
3. Aunque el predicado d en la empresa C es 0, el resultado final no lo es, debido a que d es parte de una disyunción, dentro del predicado T. Precisamente como la contribución de d es disyuntiva, a pesar de que d tiene valor 0 se hace posible que la empresa C sea la mejor evaluada a través del predicado construido para expresar las preferencias.
4. El predicado l^2 expresa un incremento en la exigencia en relación con l debido al modificador introducido. Este exponente, como toda la estructura del árbol, determina la contribución de cada predicado básico o atributo a la evaluación de la Competitividad.
5. Los valores de verdad del predicado sobre la competitividad de las empresas son lo bastante diferentes para sugerir el ranking de competitividad C-B-A-D. Nótese que aplicando la definición de orden estricto de LCBMG se tiene $o(0{,}246;0)=0{,}6230$, $o(0{,}545;0{,}246)=0{,}6495$ y $o(0{,}728;0{,}545)=0{,}5918$. Si aplicamos el orden débil de la implicación utilizada tendríamos $o(0{,}246;0)=1$, $o(0{,}545;0{,}246)=0{,}6057$ y $o(0{,}728;0{,}545)=0{,}5510$.

7. CONCLUSIONES

En las secciones de este trabajo se presenta un nuevo enfoque para los sistemas multivalentes llamado Lógica Difusa Compensatoria que, además de aportar un sistema formal con propiedades lógicas de notable interés, constituye un puente entre la Lógica y la Toma de Decisiones. La LDC entra a formar parte del arsenal de métodos para la evaluación multicriterio, adecuándose especialmente a aquellas situaciones en que el AD puede describir verbalmente, frecuentemente en forma ambigua, la heurística que utiliza cuando ejecuta acciones de evaluación/clasificación multicriterio. Sin embargo, la consistencia de la plataforma lógica dota a esta propuesta de una capacidad de formalización del razonamiento que rebasa los enfoques descriptivos de los procesos de decisión. Es una oportunidad para usar el lenguaje como elemento clave de comunicación en la construcción de modelos semánticos que faciliten la evaluación, la toma de decisiones y el descubrimiento de conocimiento. La LDC puede ser un paso importante que acerque a la comunidad científica al objetivo de crear un cálculo con palabras, propuesto por [Zadeh y Kaeprzyc (1999) pp.3-7].

La Lógica compensatoria basada en la media geométrica (LCBMG), satisface propiedades relevantes en cuanto a su relación con la Lógica Booleana y la compatibilidad con el orden.

Son posibles otros sistemas lógicos basados en operadores compensatorios. El estudio de sus propiedades y de las características que pudieran hacerlos recomendables para problemas específicos es un camino abierto a la investigación.

RECEIVED, JULY 2010
REVISED APRIL 2011

REFERENCIAS

[1]BELLMAN, R. y GIERTZ, M. (1973): On the Analytic Formalism of the Theory of Fuzzy Sets. **Information Sciences** 5, 149-156.

[2]`BODENHORF, B y DEMIRCY, M. (2008): Strict fuzzy orderings with a given context of similarity. **Internat. J.Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems**, 16, 147–178.

[3]CHICLANA, F., HERRERA, F., HERRERA-VIEDMA, E. y MARTINEZ, L. (2003): A note on the reciprocity in the aggregation of fuzzy preference relations using OWA operators. **Fuzzy Sets and Systems**, 137 , 71–83.
[4] DASGUPTA, M. y DEB, R. (1996): Transitivity and Fuzzy Preferences. **Social Choice and Welfare**, 13 , 305-318.
[5] DASGUPTA, M. y DEB, R. (2001): Factoring Fuzzy Transitivity. **Fuzzy Set and System**, 118 (3), 489-502.
[6] DETYNIECKI, M. (2000): Mathematical Aggregations Detyniecki operators and its application to Video Querying. Berkeley University. Disponible en: http://www.lip6.fr/reports/index-eng.html.

[7] DUBOIS, D. y PRADE, H. (1980). **Fuzzy Sets and Systems**: **Theory and Applications**. Academic Press Inc, N. York.

[8] DUBOIS, D. y PRADE, H. (1985): A review of fuzzy set aggregation connectives. **Information Sciences**, 36, 85-121.

[8] DUBOIS, D. y col. (2007): **Fuzzy-Set Based Logics. A history oriented presentation of their main development.** Volumen 8. Elsevier BV.

[9] ESPIN, R., FERNÁNDEZ, E., MAZCORRO, G., MARX-GÓMEZ, J. y LECICH, M.I. (2006): Compensatory Logic: A fuzzy normative model for decision making. **Investigación Operacional**, 27, 188-197.
[10] ESPIN, R., FERNANDEZ, E. y MAZCORRO, G. (2007): A fuzzy approach to cooperative n-person games. **European Journal of Operational Research**, 176, 1735-1751.

[11] GARCÍA-LAPRESTA, J.L. y MENESES-PONCIO, L.C.(2001). An empirical analysis of fuzzy transitivities En Decision Making, **VIII SIGEF Congress Proceedings**, 129-133

[12] GARCÍA-LAPRESTA, J.L. y MARQUES, R.A. (2003). Constructing reciprocal and stable aggregation operators. **Proceedings AGOP 2003, Alcala de Henares**, 73-78

[13] GABBAY, D. y METCALFE, G.(2006).Fuzzy logics based on [0, 1)-continuous uninorms. **Archive for Mathematical Logic**, 46, 425-449.

[14] HÁJEK, P. (2006): What is Mathematical Fuzzy Logic? **Fuzzy Sets and Systems**, 157, 597 – 603.

[15] HANSSON, S.O. (2001): **Handbook of Philosophical Logic.** Kluwer Academic Publishers. Segunda Edición. Volumen 4. Amsterdam.

[16] LINDLEY, D. (1994). En: Wright G., and P. Ayton (eds.) **Subjective Probability**, Wiley & Sons, Chichester.

[17] NOVÁK, V. y PERFILIEVA, I. (1999): **Evaluating linguistic expressions and functional fuzzy theories in Fuzzy Logic**. En L. A. Zadeh and J. Kacprzyk. Computing with words in Information/ Intelligent Systems 1. (Foundations) 383-606. Physica-Verlag.

[18] ÖZTÜRK, M.; TSOUKIÀS, A. y VINCKE, P. (2005): Preference Modelling. En **Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys**, **International Series in Operations Research & Management Science**, Volumen 78, II, 27-59. Springer New York.

[19] POMEROL, CH. (1995): Artificial Intelligence and Human Decision-Making, En: Slowinski, R., (ed.) **OR: Toward Intelligent Decision Support, 14th European Conference on Operational Research**, 169-196.

[20] SWITALSKI, Z. (2001): Transitivity of Fuzzy Preferences relations: An empirical study. **Fuzzy Sets and Systems**, 118, 503-508

[21] SWITALSKI , Z. (2003): General Transitivity conditions for fuzzy reciprocal preference matrices, **Fuzzy Sets and Systems**, 137, 85-100.

[22] TSOUKIÀS, A y VINCKE, PH. (1992): A survey of non-conventional preference modelling. **Ricerca Operativa**, 61, 5-49.

[23] TSOUKIÀS, A y VINCKE, PH. (1995): A new axiomatic foundation of partial comparability. **Theory and Decision**, 39, 79-114.

[24] TSOUKIÀS, A y VINCKE, PH. (1997): Extended preference structures in MCDA. En **J. Climaco**, editor, **Multicriteria Analysis**, . 37-50. Springer Verlag, Berlin.

[26] VERDEGAY, J.L. (2005). Una revisión de las metodologías que integran la Soft computing. **Actas del Simposio sobre Lógica Fuzzy y Soft Computing LFSC 2005 (EUSFLAT)**.151-156.

[27] ZADEH, L. A. (1965). Fuzzy Sets, **Information and Control**, 8, 338-353.

[28] ZADEH, L.A. (1975). The Concept of Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-I, **Information Sciences**, 8, 199-249.

[29] ZADEH, L.A. (1975). The Concept of Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-II, **Information Sciences**, 8, 301-357.

[30] ZADEH, L. A. y KACPRZYK, J., editors. (1999). Computing with words in Information/Intelligent Systems. (Applications) 2 Volumen 34 **Studies in Fuzziness and Softcomputing**. Phisyca-Verlag.