TÉCNICAS PARA EL ESTUDIO DE LA CANTIDAD TOTAL EN EL ANÁLISIS CONJUNTUAL: MODELOS DECISIONALES

Carlos N. Bouza[1]
Departamento de Matemática aplicada
Universidad de La Habana
San Lázaro y L. Habana CP 10 400.
Ciudad Habana, Cuba.

RESUMEN
El uso de la cantidad total como información para establecer como los clientes asignan la utilidad a las partes de un producto es muy importante en las aplicaciones del Análisis Conjunto. En este trabajo se caracterizan los modelos estadísticos que soportan estos. En la literatura especializada se describen técnicas propias y no se establece cuales son los modelos utilizados y los combinan en forma no ortodoxa para establecer patrones conductuales. En esta contribución se establece como en cada procedimiento se utilizan diversos modelos para elicitar las utilidades y establecer la importancia relativa de los atributos que conforman los productos estudiados. Algunos ejemplos de aplicación son utilizados para ilustrar los procedimientos.

ABSTRACT
The use of the Total Amount as information to settle down how the clients assign the utility to the parts of a product is very important in the applications of Conjoint Analysis. In this work the involved statistical modeling is characterized. In the specialized literature they are only mentioned as techniques and not which of them are used. They combine the models in a non-orthodox form for establishing behavioral patterns. In this contribution is settled down how in each procedure diverse models are applied in the elicitation of the utilities and in establishing the relative importance of the attributes that conform the studied products. Some application examples are used to illustrate the procedures.

KEY WORDS:Monanova, Stress, Tradeoffs, ranking.

MSC: 62H99

1. INTRODUCCIÓN

El análisis conjuntual (conjoint analysis, AC) puede considerase como una técnica del análisis multivariado que permite establecer las preferencias de individuos, sobre algún producto o servicio. Este permite evaluar un acuerdo de las preferencias entre diversas alternativas caracterizadas por grupos de características. Desde otro punto de vista el AC descompone las cualidades dando cada entrevistado un "score" a los perfiles del producto o servicio analizado. Su preferencia es descompuesta para establecer al aporte de cada atributo por separado para posteriormente integrarles y hacer un rankeo general que permita diseñar.

El uso de la cantidad total como información para establecer como los clientes asignan la utilidad a las partes de un producto es muy importante en las aplicaciones del Análisis Conjunto, ver Ferreira-Lopes (2011), Ramírez (2005), Reig-García y Coenders (2002). En los estudios de mercado son comúnmente utilizadas diversas técnicas exploratorias de datos. El Análisis Conjuntual (Conjoint Analysis) es utilizado en las investigaciones de mercado con el fin de establecer como se conforman las preferencias de los consumidores o clientes. El origen de estos procedimientos es el trabajo de Luce-Tukey (1964). En esos estudios la preferencia de los consumidores es dada en forma conjunta pero el interés es conocer como los consumidores entrevistados la conforman a partir de evaluar los diversos atributos del producto. Esto plantea una

[1] bouza@matcom.uh.cu

problemática sensiblemente diferente a los problemas clásicos que se resuelven en las aplicaciones de la Estadística y de la Teoría de la Decisión. Podemos caracterizar el enfoque usual dado en la literatura consultado los aportes de Carmone et. al. (1978), Emery-Barron (1979), Green-Rao (1971), Green-Srivasan (1978), Rao (1977) y Curry (1978) quienes estudian este problema. Todos ellos, y en el resto de la literatura, se desarrollan métodos y procedimientos, se analiza como establecer un modelo que reproduzca en forma aproximada los mecanismos que llevan a fijar la preferencia y a como llegar a un consenso a partir de la entrevista de varios clientes. Softwares ofrecen modulos para aplicar AC. Un ejemplo de ellos es el SAS, vea SASTechmical Report R-109 (1993).

En cada entrevista las distintas partes no son evaluadas por los entrevistados sino el producto en su conjunto. Cada prototipo del producto es diseñado de acuerdo a la presencia de ciertos factores y se asume que la utilidad es expresada por una función lineal aditiva de los valores de las partes. El problema que se aborda puede busca determinar como conforman su evaluación los entrevistados y estimar los valores de cada parte. El AC, al igual que otras técnicas usadas en estudios del mercado tienen sus raíces en la búsqueda de métodos cuantitativos para la Psicología. Este busca desagregar la utilidad asignada a un producto entre los diversos atributos de este, ver Ferreira et al, J. (2009), Varela et al. (2004). Como resultado de la desagregación se tiene que podemos evaluar la importancia de los atributos y predecir la utilidad que los evaluados le asignan a las partes del producto. Es de uso creciente esta técnica y diversos softwares especializados son comercializados en la Web. El modelo teórico que soporta estos no es transparente en la literatura especializada ni en los manuales de usuario. El enfoque usual se basa en que las utilidades de los atributos (partes) del producto se agregan de acuerdo a una cierta función. Si esta es lineal podemos decir que para un producto P_h con J atributos.

En este trabajo se caracterizan los modelos estadísticos que soportan estos. En la literatura especializada se describen técnicas propias y no se establece cuales son los modelos utilizados y los combinan en forma no ortodoxa para establecer patrones conductuales. En esta contribución se establece como en cada procedimiento se utilizan diversos modelos para elicitar las utilidades y establecer la importancia relativa de los atributos que conforman los productos estudiados.

La sección 2 plantea el problema del Análisis Conjunto [AC] y la siguiente como el modelo básico utilizado, el MONANOVA, es utilizado en la modelación.

En la sección 4 se diseccciona la motivación de desarrollar una representación proyectada de los datos en un espacio de menor dimensión. Esto se lleva a cabo para sortear inconsistencias teóricas presentes en la base de datos si se decide aplicar en el modelo ingenuo dadas porque varias hipótesis básicas son violadas y que no se pueda analizar la bondad de su ajuste. En la literatura se recomienda utilizar Escalamiento Multidimensional (Multidimensional Scaling) como técnica alternativa sin discutir el problema estadístico que motiva buscar una representación de los datos originales y no estos, ve Noguchi-Ishii (2000) por ejemplo.

La sección 5 se dedica a la discusión de cómo se llega a establecer procedimientos denominados de "Comparación pareada de Rangos y Consistencia de los Signos". Estos caracterizan a la técnica desarrollada para el estudio de comparaciones pareadas (Trade-Off). Esta parte de la recomendada simplificación de la tarea del entrevistado al usar determinado tipo de cuestionario que evita la proliferación de errores debido al hastío del entrevistado. Por último se discute el uso de las técnicas de la Regresión para desarrollar ajustes de la utilidad bajo modelos lineales.

Algunos ejemplos de aplicación son utilizados para ilustrar los procedimientos.

2. EL ANÁLISIS CONJUNTUAL

En los estudios de mercado son comúnmente utilizadas diversas técnicas exploratorias de datos. El Análisis Conjunto (Conjoint Analysis) es utilizado con éxito para elicitar las preferencias de los consumidores o clientes en forma indirecta. Esto lo ha hecho una herramienta popular en los estudios de mercado. El origen de estos procedimientos puede ser trazado en la psicometría siendo el trabajo seminal el de Luce-Tukey

(1964). La naturaleza multi-atributo de la preferencia de los consumidores plantea una problemática sensiblemente diferente a los problemas clásicos que se resuelven en la Teoría de la Decisión. Esto ha dado lugar al desarrollo de diversos estudios del método, consulte por ejemplo Carmone et. al. (1978), Emery-Barron (1979), Green-Rao (1971), Green-Srivasan (1978), Rao (1977) y Borg- Groenen, P.(2005). **Ferreira et al..** (2009). Estos desarrollan métodos o analizan como recobrar, en forma aproximada, la preferencia tras descomponer los reportes de los entrevistados en atributos y establecer un consenso que permita describir la determinación de las preferencias.
Las distintas partes no son evaluadas por los entrevistados sino el producto en su conjunto. Cada prototipo del producto es diseñado de acuerdo a la presencia de ciertos factores y se asume que la utilidad es expresada por una función lineal aditiva de los valores de las partes. El problema es determinar como conforman su evaluación los entrevistados y estimar los valores de cada parte.

El AC, al igual que otras técnicas usadas en estudios del mercado tienen sus raíces en la búsqueda de métodos cuantitativos para la Psicología. Este busca desagregar la utilidad asignada a un producto entre los diversos atributos de este. Como resultado de la desagregación se tiene que podemos evaluar la importancia de los atributos y predecir la utilidad que los evaluados le asignan a las partes del producto. Es de uso creciente esta técnica y diversos softwares especializados son comercializados en la web. El modelo teórico que soporta estos no es transparente en la literatura especializada ni en los manuales de usuario. El enfoque usual se basa en que las utilidades de los atributos (partes) del producto se agregan de acuerdo a una cierta función. Si esta es lineal podemos decir que para un producto *h* con *J* atributos:

Valor del producto $h = \sum_{j=1}^{J}$ Valor de la parte *j* del producto *h*

Esta descomposición del producto es determinada por un analista al fijar las *J* partes consideradas esenciales. Una encuesta entre los posibles usuarios o especialistas puede proveer la información necesaria para fijar este modelo. Este hecho es obviado en la mayor parte de los trabajos los que dan por determinadas las partes, vea Castro (2000) por ejemplo.

En las aplicaciones se considera que la información sobre las partes se obtiene de varios individuos. La representatividad de estos no es objeto de análisis en los trabajos sobre AC . Por este motivo debemos considerar este aspecto al utilizar los reportes usuales basados en AC puesto estos solo pueden ser considerados como descriptivos y su poder inferencial es prácticamente nulo. Vea Noguchi-Isogai (1991), Lehmann (1993) para una discusión de algunos de estos aspectos esenciales.

Algunos enfoques se basan en que cada entrevistado ordena los atributos o asigna un valor a su utilidad. Generalmente se fija un intervalo para los posibles valores de la utilidad. A partir de la naturaleza de las encuestas y de sus objetivos se busca ajustar un modelo que satisfaga criterios del tipo Bondad de Ajuste. Cada atributo A_j puede manifestarse de N_j maneras prefijadas (niveles). Una cierta combinación de niveles de los atributos determina un producto particular que en ocasiones es denominado prototipo. El interés del analista es , en muchos estudios, establecer que productos son más preferidos (valor asignado mayor) y que atributos son más importantes en la conformación de el valor de un producto. Con estos resultados el analista puede diseñar el producto a ofertar y que aspectos la publicidad debe destacar.

El diseño de un producto h lo caracterizamos como:

$$P_h=\{a_{11}z_{11h}\ ,\ a_{12}\ z_{12h},\ldots,\ a_{1N1}\ z_{1N1h}\ ,\ldots,\ a_{INI}\ z_{INI\,h}\}$$

Donde

$$z_{ij} = \begin{cases} 1\ si\ el\ atributo\ a_{ij}\ está\ presente\ en\ P_h \\ \qquad 0\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

Denotemos por

$$M=\sum_{j=1}^{J} N_j$$

Sea $\wp$ el conjunto de los posibles productos y A una σ-álgebra definida sobre este conjunto. Una aplicación medible

$$\varphi: \wp \longrightarrow U$$

asigna a cada producto h una utilidad $u_h=\varphi(P_h)$. La más popular es considerar que esta es aditiva denotándola por

$$\varphi(P_h)=\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{Nj} u_h(a_{ij})z_{ijh} + \varepsilon_h$$

El último término modela la distorsión existente entre la verdadera utilidad y la medida por el modelo. Al entrevistar a un individuo b obtenemos como respuesta $u_{h(b)}$. A partir de ella deseamos elicitar el valor de cada $u_{h(b)}(a_{ij})$. En la práctica se hace una encuesta y se entrevista un conjunto Ω de individuos. La información es modelada por la extensión de φ

$$\varphi^*: \Omega \times \wp \longrightarrow U$$

y obtenemos B valores

$$\varphi^*(b,P_h)= u_{h(b)} =\sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{Nj} u_h(a_{ij}|b)z_{ijh} + \varepsilon_{h(b)}$$

si $|\Omega|=B$.

Varios problemas se abren al investigar el mercado usando este enfoque:

1. Estudiar si b es representativo de un conveniente nicho de mercado
2. Resumir la información obtenida de los B entrevistados.

Note que este sencillo y clásico cuestionar estadístico plantea problemas teóricos no resueltos convincentemente en los estudios de mercado. En particular si utilizamos un diseño muestral aleatorio no muy complejo, incluso el simple aleatorio, aparecen estos. No estudiaremos en este trabajo este problema dada la magnitud del mismo.

Al utilizar el modelo aditivo la búsqueda de las utilidades correspondientes a las partes pueden vincularse con un modelo de regresión particular pues la mayor parte de las hipótesis que sustentan los métodos usuales no se cumplen. Por ejemplo determinar cual es la norma más efectiva para el ajuste correspondiente es uno de los que requiere de un estudio teórico.

El número de posibles prototipos

$$\Pi_{j=1}^{J}N_j$$

puede ser demasiado grande para poder evaluarles a todos. Piense en el ejemplo analizado, en él este número es pequeño, y que cada entrevistado podría evaluar los 18 productos. En otros casos su número puede llevar el entrevistado deje de ser cuidadoso al hacer sus reportes. Por otra parte los costos de la investigación serían altos y los errores de respuesta grandes de hacer una valoración de todos los prototipos posibles.

Esto plantea otro problema que es resuelto en el Diseño Experimental al utilizar un diseño factorial. En la práctica el número de productos posibles es grande y se debe utilizar un diseño experimental que garantice la ortogonalidad. Una solución usual es utilizar un factorial fraccionado. Si podemos ajustar un modelo predictivo adecuado podremos 'predecir' las utilidades de los prototipos no evaluados directamente. En tal caso se ajustará alguna ecuación de regresión. La 'exactitud' de estas predicciones en este tipo de problema es otro problema teórico que debe ser estudiado.

El producto h impresiona al entrevistado b y se obtiene la evaluación descrita por

$$\varphi^{**}: \Omega \longrightarrow F$$

donde F es una cierta familia de representaciones del valor de las partes. La medición que obtenemos podemos representarla como $\varphi^{***}(b,F)=y$ siendo $y \in Y \subset \Re$ y

$$\varphi^{***}: \Omega \times F \longrightarrow Y$$

Otro problema importante es el de establecer la comunicación con el entrevistado b mediante un cuestionario que permita obtener la medición y en la que determina la preferencia por el producto que evalúa. La percepción del producto por b y su evaluación es un proceso psicológico complejo . Un enfoque es considerarle como no afectado por causas externas. Esto no es cierto pero corresponde a la matemática sugerir modelos que caractericen estos procesos. El analista deberá tomar en cuenta que su información está afectada por los errores debidos al uso de criterios muestrales, o de utilizar un panel de expertos y también la interrelación entre los atributos. Así si tenemos que si hay dos atributos A y C, el primero con N_A niveles el segundo con $N_{C,}$ y fijamos un par de niveles específicos α_j y $\chi_{j'}$ la preferencia por el producto determinado por estos dos niveles se puede modelar como

$$F_{jj'} = f_A(\alpha_j) + f_C(\chi_{j'})$$

El entrevistado b nos reportaría

$$Y_{jj'}(b) = F_{jj'}(b) = f_A(\alpha_j|b) + f_C(\chi_{j'}|b)$$

Pero b está afectado por percepciones personales e históricas y causas diversas externas que distorsionarán la información obtenida por lo que hay que considerar la existencia de un error o residuo, como en el Análisis de Regresión, vea Johnson-Wichern (1998) por ejemplo, y representar la información brindada por b como

$$Y_{jj'}(b) = F_{jj'}(b) + \varepsilon_{jj'}(b)$$

Si el error está dado por la percepción del producto. Pero si los residuos están en la percepción de cada atributo por separado

$$Y_{jj'}(b) = f_A(\alpha_j + \varepsilon_{Aj}|b) + f_C(\chi_{j'} + \varepsilon_{Cj'}|b)$$

Estos errores son considerados aleatorios y con media cero. Debemos destacar que en muchas ocasiones ni siquiera $Y_h(b)$ es observado pues el cuestionario utilizado induce otros errores que son denominados en la Teoría del Muestreo como errores de medición. Estos difícilmente tienen una media cero tampoco la independencia generalmente es válida dado que se asocian a deficiencias en el diseño del cuestionario o al intento de los respondientes de distorsionar la realidad, vea Lamb et. al. (1998). Estos errores muchas veces son sistemáticos y generan sesgos. Se puede añadir los posibles errores de no-respuesta y el cuadro no es ya tan transparente. Asano (1982) desarrolló un estudio de Monte Carlo de esta problemática. Este trabajo sigue otras experiencias como las de Emery-Barron (1979) y Carmone et.al. (1978). Asumiremos que hay sesgos constantes debido al cuestionario. Sea $S_h(b)$ este sesgo.

La información es obtenida usando un cierto criterio de escala. En el AC es muy corriente el uso de escalas nominales, ordinales o métricas. En muchos casos los datos son obtenidos en escala ordinal pero son transformados usando una comparación pareada que permite establecer una ordenación.

Considerando que la escala ordinal es utilizada, la existencia de H prototipos y que el entrevistado nos da su preferencia mediante un vector

$$\boldsymbol{Y} = [y_1, \ldots, y_H]^T \ .$$

Una función ϕ nos transforma este vector en otro

$$\mathbf{Z}=[z_1,..., z_H]^T$$

en el que el orden de preferencia no es alterado. Es decir que si cuando $y_j \leq y_{j'}$ entonces preferimos j a j' ($j \Rightarrow j'$) entonces al comparar z_j y $z_{j'}$ también $j \Rightarrow j'$, para todo j y $j'=1,...,H$.

Cada producto es determinado por factores los que están presentes con uno solo de sus niveles en este. Cada factor o atributo posee N_j niveles diferentes por lo que podemos asignar a cada factor un vector N_j-dimensional e identificar con una coordenada igual a uno al nivel presente en el producto y con un cero a los demás. Tomemos a $d^T_j[h]=(d_{j1}[h],...,d_{jNj}[h])$ como este vector para el factor j y denotemos al producto P_h por

$$D_h=(d^T_1[h],..., d^T_J[h]).$$

El diseño de la investigación es caracterizado por la matriz de diseño

$$\boldsymbol{D}=[D_1,..., D_H]^T$$

Por otra parte los métodos utilizados para obtener los datos son el de la Cantidad Total de información y el de las Diferencias Individuales.

Cada combinación de método y escala requiere de establecer un criterio para medir el ajuste de los datos y estos requieren una herramienta para realizar el AC. Siguiendo el análisis de Noguchi-Ishii (2000) tenemos la Tabla 2.1 la que da una idea global de esta problemática:

Método	Escala	Criterio de Bondad del Ajuste	Herramienta del Análisis Conjunto
Cantidad Total	Ordinal	Comparación pareada de Rangos y consistencia de los signos	Análisis de Acuerdos (Trade Off)
	Ordinal	Stress[Estrés]	Análisis Monotónico de Varianza (MONANOVA)
	Métrica	Ajuste L_p	Análisis de regresión
Preferencias Individuales	Transformación de ordinal a comparación pareada	Estimación Máximo Verosímil	Logit
	Ordinal	Minimizar violaciones del espacio de los datos y del modelo	Programación Lineal
	Nominal	Ajuste L_p	Análisis de Regresión Ponderada
	Ordinal	Ajuste L_p	Análisis de Regresión Ponderada

Tabla 2.1. Herramientas propias del AC por método y escala.

3. EL USO DEL MONANOVA

En este trabajo estaremos concernidos con el método de la Cantidad Total (CT) desarrollando un estudio metódico de los modelos estadísticos y decisionales envueltos.

La preferencia para datos ordinales puede ser modelada al hacer que las variables transformadas sean descritas por la ecuación:

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}$$

Donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es un vector de errores aleatorios no medibles, $E[\boldsymbol{\varepsilon}]=\mathbf{0}$. y $\boldsymbol{\beta}\in\Re^M$ un vector de parámetros desconocidos que debemos estimar. Cada coordenada β_t de $\boldsymbol{\beta}$ representa el valor del atributo si el correspondiente nivel de la parte aparece en el producto evaluado. Recuerde que los atributos que aparecen en P_h son representados en $\boldsymbol{D}$ y que el elemento d_{ht} , $t=1,...,M$ identifica un atributo de A_1 *si* $t \in[1, N_1]$, de A_2 si $t \in[N_1+1, N_1+N_2]$ y así sucesivamente. Entonces el atributo de A_J es representado por un β_t con $t \in[\sum^{J-1}_{j=1} N_j , M]$.

Como aparece en la Tabla 2.1 la estimación de $\boldsymbol{\beta}$ debe ser llevada a cabo utilizando la medida por el Estrés. La medida de Estrés fue propuesta originalmente por Kruskal (1965) al plantearse la búsqueda de una transformación monótona de los valores observados. Asumiendo que se realiza un experimento aleatorio y que su resultado es w se considera válido que:

$$z(w)=\sum_{t=1}^{M} g_j(w)\beta_t+\varepsilon(w)$$

Si $\boldsymbol{B}$ es una aproximación de $\boldsymbol{\beta}$ una representación aproximada de $z(w)$ es

$$z(w|b)=\sum_{t=1}^{M} g_j(w)B_t$$

donde se espera que $||\boldsymbol{B}-\boldsymbol{\beta}||_p$ sea pequeño, $p>0$. El error de la aproximación es usualmente medido usando $p=2$ y si se hacen W observaciones se computa

$$e(b)=\sum_{w=1}^{W}[z(w)-z(b)]^2$$

donde

$$z(b)=\sum_{w=1}^{W} z(w)/W$$

Una medida invariante del error bajo transformaciones lineales llevó a la propuesta de

$$S^2(\phi, \mathbf{B})=D_1^2/D_2^2$$

Donde

$$D_1^2=\sum^{W}_{w=1} [z(w)-z(b)]^2$$

$$D_2^2=\sum^{W}_{w=1} [z(w|b)-z(b)]^2$$

El interés del decisor es minimizar esta expresión. Esto plantea el problema de optimización, ver Borgawardt, (2001):

$$Arg.\ Min.\ S^2(\phi,\mathbf{B})=\mathbf{B^*}(\phi).$$

Definición 3.1 : $S^2(\phi,\mathbf{B^*}(\phi).)$ es llamada función directa de Estrés.

Note que $\underline{S^2(\phi,\mathbf{B^*}(\phi).)}$ es una medida de Bondad del Ajuste dada por utilizar la transformación ϕ. El decisor desea determinar una transformación óptima ϕ_0 tal que $S^2(\phi_0,\mathbf{B^*}(\phi_0).)$ sea mínima. Esto es que debemos resolver el problema

P1:
Arg $\text{Min}_{\mathbf{B},\phi}$ $S^2(\phi ,\mathbf{B^*}(\phi).)= D_{10}^2/D_{20}^2$
Sujeto a:
$D_{10}^2=\sum^{W}_{w=1} [z(w)-z(b|\phi_0]^2$
$D_2^2=\sum^{W}_{w=1} [z(w|b,\phi_0) -z(b|\phi_0]^2$
$rank\ z(w|b, \phi_0)=rank.Y(b|w),\ w=1,...,W.$

P1 plantea un problema de Programación Entera que es NP-duro, vea Borgwardt (2001). Por ello las heurísticas en boga desarrolladas dentro de las familias de los Algoritmos Genéticos, de Recocido Simulado etc., ver Aarts-Lenstra (1997), son utilizables. Sin embargo no hay reportes de experiencias en el sentido de resolver estos problemas usando una sofisticada heurística.

La búsqueda de ϕ_0 para obtener una aproximación optima $\boldsymbol{B}_0$ es un viejo tema de investigación dentro de la estadística que ha generado y genera una vasta literatura, vea por ejemplo el trabajo seminal de Box y Cox (1964) y Johnson-Wichern (1998).

El MONANOVA se basa en la solución de P1. Una solución inicial $S(\phi_1, \boldsymbol{B}_1)$ es computada y se calcula

$$\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_1.$$

Un método de búsqueda nos permite determinar una nuevo vector $\boldsymbol{B}_2$ en una vecindad de $\boldsymbol{B}_1$. El método utilizado generalmente para fijar la solución inicial está dada por hacer

$$S^2(\phi, \boldsymbol{B}_1) = D_{11}^{\;2}/D_{21}^{\;2}$$

donde:

$$D_{11}^{\;2} = \sum^{W}_{w=1} [z(w)\text{-}z(w|\boldsymbol{B}_1]^2$$

$$D_2^{\;2} = \sum^{W}_{w=1} [z(w|\,\boldsymbol{B}_1)\text{-}z(\boldsymbol{B}_1)]^2$$

Tomando $z(\boldsymbol{B}_1)$ como la media de las predicciones $z(w|\,\boldsymbol{B}_1)$. Note que

$$\partial S^2(\phi_1, \boldsymbol{B}_1)/\partial \boldsymbol{B}_1 = V^{-2}(V\partial U/\partial \boldsymbol{B}_1^{\;T}\text{-}U\partial V/\partial \boldsymbol{B}_1^{\;T})$$

la matriz de gradiente $\boldsymbol{G}$ es proporcional a la de las derivadas parciales y como

$$(V/4)\partial S^2(\phi_1, \boldsymbol{B}_1)/\partial \boldsymbol{B}_1 = (\partial U/\partial \boldsymbol{B}_1^{\;T}\text{-}\, S^2(\phi_1, \boldsymbol{B}_1)\partial V/\partial \boldsymbol{B}_1^{\;T})/4$$

se tiene que

$$G = \text{-}\, S(\phi, \boldsymbol{B})[(Z\text{-}\boldsymbol{DB}) + \boldsymbol{DB}\text{-}\underline{z}(\boldsymbol{B})]/\boldsymbol{UD}$$

Tanto U como V son sumas de cuadrados y $\underline{z}(\boldsymbol{B})$ es el correspondiente vector de medias

Entonces una nueva transformación ϕ_2 es definida y se busca la solución óptima.

El MONANOVA utiliza para la t-ésima búsqueda a

$$\boldsymbol{B}_{t+1} = \boldsymbol{B}_t\text{-}\alpha_{t+1}\, G_{t+1}$$

α_{t+1} es el paso que debe darse y G_{t+1} es una dirección que es determinada buscando la minimización del Estrés. La búsqueda concluye cuando $S(\phi_t, \boldsymbol{B}_t) < \delta$, δ es un valor prefijado por el decisor. Esta transformación será la denominada ϕ_0 y minimiza la suma de cuadrados residual que aparece en la medida de Estrés después de remover el valor total explicado.

El valor de la parte j está dado por:

$$V_j = Max\,\{B_t\,,\, t \in [\,\Sigma^{j\text{-}1}_{q=1} N_q\,,\, \Sigma^{j}_{q=1} N_q\,]\}.\text{-}\, Min\,\{B_t\,,\, t \in [\,\Sigma^{j\text{-}1}_{q=1} N_q\,,\, \Sigma^{j}_{q=1} N_q\,]\}.$$

Una ilustración está dada por el siguiente ejemplo de aplicación:

Ejemplo 3.1. 20 turistas son entrevistados y expresan sus preferencias por los paquetes ofertados. La asignan a cada uno de los 6 paquetes un valor entre 1 y 4 . Estos tienen dos factores:

1. Lugar :
Atributos: Playa, Ciudad, Combinación de Playa y Ciudad

2. Tipo de Paquete: Todo Incluido, Continental

Los resultados aparecen en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2. Valoración de los paquetes por 20 turistas

	Lugar Asignado			
Prototipo	1	2	3	4
1	3	3	4	3
2	4	5	5	2
3	6	2	3	2
4	6	2	2	6
5	0	4	3	4
6	1	4	3	3
Total	20	20	20	20

La información primaria fue obtenida al someter un cuestionario a la consideración de los individuos entrevistados.

Los prototipos son descritos por las filas de la Matriz

$$D=\begin{bmatrix} 0\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,10\,0\,1 \\ 1\,00\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,10 \\ 0\,0\,1\,0\,1 \end{bmatrix}$$

Entonces la valoración de un entrevistado determina un vector donde cada coordenada es la utilidad asignada al correspondiente prototipo. Así si pedimos una ordenación ascendente de los prototipos ϕ puede ser hacer la ordenación descendente. Aplicando el MONANOVA usual obtenemos para un Estrés igual a cero que

$$\boldsymbol{B}=(1\ \ 5\ \ -3\ \ 4\ \ 0)^T$$

La predicción computada es $z(b|\phi_0)=(9\ \ 5\ \ 5\ \ 1\ \ 1\ \ -3)^T$. La contribución a la Cantidad Total del factor Forma de Pago $[A_2]$, que es representada por B_t, $t=4,5$, es

$$V_2=Max\,\{B_t\,,\ t\in[\ N_1+1, N_2\,]\}.-Min.\,\{\,B_t\,,\ t\in[\ N_1+1, N_2\,]\}=4\text{-}0=4$$

Para el Destino este es

$$V_1=Max\,\{B_t\,,\ t\in[1, N_1\,]\}.-Min.\,\{\,B_t\,,\ t\in[\ 1, N_1\,]\}=5-(-3)=8$$

Por lo que el Destino se considera 2 veces más importante que la Forma de Pago.
El uso del MONANOVA permite determinar un conjunto de valores que hagan un buen ajuste de estas medidas. Tomando los datos transformados se calculan las distancias $d^*_{ij}=||z_i-z_j\,||_p$

Nuevamente lo mas popular es hacer $p=2$ y utilizar la medida de Estrés

$S^*(\phi,B)=D^*_1/D^*_2$

En la que

$$D^{*2}{}_1=\sum_{i\neq j}(d_{ij}-d^*_{ij})^2$$

$$D^*{}_2=\sum_{i\neq j}d^{*2}_{ij}$$

El problema general del Escalamiento Multidimensional (MDS) se vincula con el AC al plantearse la solución del problema de Optimización

$$P2\text{: } Min.\ ||Z-Z(\boldsymbol{B})||_p$$

La solubilidad de este problema, incluso para $p=2$, requiere de algunos supuestos teóricos para satisfacerles. Hayashi (1968) propuso una modificación que utilizara posteriormente Noguchi-Ishi (2000) en el AC desarrollando el estimador de $\boldsymbol{\beta}$

$$B^*=[D^{*T}D^*]^{-1}D^{*T}Z^*$$

Donde $\boldsymbol{D}^*$ es obtenida al eliminar la primera columna de cada factor en $\boldsymbol{D}$ buscando que $|\boldsymbol{D}^{*T}\boldsymbol{D}^*|\neq 0$. Se requiere transformar Z en Z^* si el orden no es preservado al hacer este cambio, vea Noguchi -Ishii (2000). Los ajustes se llevan a cabo usando $\boldsymbol{B}^*$.

Ejemplo 3.1. Utilizando los datos del ejemplo anterior y resolver P2 se obtiene

$$\boldsymbol{B}^*=(\ 0\ \ 2\ \ -2\ \ 0{,}5\ \ -0{,}5)^T$$

Con término constante $B_0=3{,}5$ y $Z^*(b)=(6\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ )$ con un Estrés de cero también. Esta nueva predicción coincide con la transformación de $Z=\phi(Y)$ obtenida. En este caso $V_1=4$ y $V_1=1$ por lo que este método le asigna un valor mayor a la contribución del Destino a la Cantidad Total.

4. EL USO DEL ESCALAMIENTO MULTIDIMENSIONAL

4.1 El método

En ocasiones es más recomendable hacer una representación de la información obtenida haciendo una proyección en un espacio de menor dimensión. Esto se lleva a cabo para sortear determinados problemas con el ajuste del modelo que llevan a que la estimación de $\boldsymbol{\beta}$ sea difícil o imposible usando los datos originales. Una solución es utilizar la técnica del Escalamiento Multidimensional (Multidimensional Scaling). En ella se busca la mejor transformación en el sentido de reducir la dimensión sin generar deformaciones considerables. Definiendo una medida de similitud o de disimilitud entre los pares de observaciones originales se busca que, al hacer la transformación $Z=\phi(Y)$, la representación mantenga un comportamiento de la similitud (disimilitud) parecido a la original. El problema es buscar la representación optima. Dos principios sostienen los métodos del Escalamiento Multidimensional:

El escalamiento multidimensional (MDS) es un sistema formado por un conjunto de técnicas para la visualización de los datos para modelar las semejanzas o las desemejanzas de los datos.

Los algoritmos de MDS pueden ser considerados como de taxonomía numérica. Podemos hacer una clasificación de ellos en

- Escalamiento multidimensional clásico (Torgerson-Gower). La matriz de entrada contiene las desemejanzas entre los pares de ítems. La salidas es una matriz de coordenadas que fijan la configuración que reduce al mínimo una función de pérdida llamada *tensión (stress)*
- Escalamiento multidimensional métrico: Este es un procedimiento de optimización que considera una variedad de funciones de la pérdida y de matrices de entrada con distancias y pesos. Se utiliza en el caso de laborar con variables definidas en un intervalo o producto de calcular razones. La función de pérdida en este contexto (stress o *tensión)* se minimiza. Es usual utilizar un procedimiento llamado Stress Majorization.
- Escalamiento multidimensionalno métrico**-** Este se ocupa de datos ordinales. Se basa en el estudio de la relación entre la matriz desemejanzas de los ítems así como la distancia euclidiana entre los ítems y su localización en un adecuado espacio No-métrico: La relación se obtiene usualmente usando la regresión isotónica.

El MSD es muy utilizado en la búsqueda de visualizaciones de datos complejos, en minería de datos, ciencias de la información, psicometría, marketing, ecología etc Esta es una alternativa con ventajas ante otros métodos como el análisis factorial, análisis discriminante., y análisis conjunto. El MDS permite obtener las dimensiones subyacentes en los juicios de los entrevistados sobre la semejanza de ítems. Esto es una de las ventajas notables del MDS.

Procedimiento MDS

(1) Formulación del problema

a) Fijar el número de variables a comparar. Es recomendable que este estè entre 8 y 20.

b) Establecer el objetivo del estudio y su utilización

(2) Obtención de los datos de entrada

a) Para cada par de ítems medir la semejanza (generalmente se utilizan en 7 puntos de acuerdo a la Escala de Likert que mueve el nivel de muy similar a muy disímil).

b) La primera pregunta debe ser la más discriminativa y continuar en esa línea. Por ejemplo pregunta primero se compara A con B. Después B con otro y así sucesivamente.

c) El número de preguntas es una función del número de alternativas: $Q = N(N - 1) / 2$= número de preguntas, N= número de marcas de alternativas.

(3) Enfoques: a) . Los los datos son una opinión (acercamiento derivado) sobre los ítems que se descomponen en cualidades que son clasificadas en una escala del diferencial semántico; b) Los entrevistados reportan su preferencia y no en términos de semejanza

(4) Análisis de los datos

a) En muchos softwares estadísticos están disponibles programas. A menudo brindan opciones para utilizar el MDS- métrico y MDS-no métrico. Los investigadores fijan el número de dimensiones que desea sean creadas. A más dimensiones mejor sera el ajuste estadístico, pero hace más difícil interpretar los resultados.

b) La salida de un programa estadístico da como resultado un mapa que fijara la ubicación de cada ítem. En general se utiliza el espacio de dos dimensiones. La proximidad de ítems en el mapa indica cuan similares o preferidos son. Las dimensiones som etiquetados por el investigador y depende del juicio de este.

c) El ajuste es valorado a partir del cálculo de un coeficiente de determinación-que mide qué por ciento de la variación de los datos escalados es explicado por el procedimiento de MDS. En general si $R^2>0,6$ se considera aceptable. La meidad del stress (tensión) permite completar este valoracin junto con otras pruebas .

Generalmente se utiliza una distancia y se calculan las *H(H-1)* distancias $d_{ij} = ||y_i - y_j||_p$ las que son ordenadas.

4.2. Regresión isotónica

La regresión isotónica (IR) busca el ajuste de un vector con ponderaciones (pesos) conforme a un sistema asigna una ordenación simple o orden parcial sobre las variables. La regresión isotónica también es llamada regresión monotónica.

Se determina un grafo acíclico dirigido $G = (N,E)$ cuyos nodos se corresponden con las variables .

El problema IR, donde se define una orden simple corresponde a un programa de optimización cuadrático (QP):

En el caso en que $G = (N,E)$ es un orden total se utiliza un algoritmo iterativo para solucionar QP.

IR tiene un importante papel en la inferencia estadística. Por ejemplo es usada para determinar el mínimo de la función de stress del ajuste de una curva isotónica a los resultados experimentales. De hai su rol en el MDS no-métrico, donde se trata de situar los puntos de referencias buscando que las distancias entre los puntos ubicados describa la desemejanza entre los puntos. La regresión isotónica se utiliza para determinar las distancias ideales que preserven la ordenación relativa de la desemejanza.

5. COMPARACIÓN PAREADA DE RANGOS Y CONSISTENCIA DE LOS SIGNOS

El método de comparaciones pareadas (Trade-Off) parte de la simplificación de la tarea del entrevistado al usar tablas, figuras etc. , vea en Castro (2000) una amplia descripción de los cuestionarios usados comúnmente. En la herramienta usada para conocer las preferencias que le asigna un entrevistado a un panel aparecen solo dos factores al unísono. La respuesta puede ser una utilidad o un rango. Este tipo de cuestionario es muy utilizado dada su simplicidad y porque permite evaluar muchos niveles usando solo unos pocos prototipos.

El estudio de los métodos estadísticos basados en estadígrafos lineales de rango ha dado lugar ha una teoría que permite caracterizar los momentos de estos a partir del número de observaciones, vea Gibbons (1971) para mayor información. Considere que la preferencia es descrita por un modelo aditivo y que el entrevistado le asigna un rango $R_h \in \{1,...,H\}$al prototipo h. En nuestro caso es de interés el momento de primer orden de un rango el que está dado por:

$$E(R_h)=(H+1)/2$$

Al analizar un cierto nivel ν se computa el promedio de los rangos asignados a los n_ν prototipos evaluados en cuyo diseño interviene:

$$r_\nu=\sum_{h=1}^{H} R_h\, q(h,\nu)/n_\nu$$

donde

$$q(h,\nu)=\begin{cases} 1 \; si\ el\ nivel\ \nu\ aparece\ en\ el\ prototipo \\ 0\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

Centrando estas variables se obtiene

$$\delta_\nu=r_\nu-E(r_\nu)$$

para cada ν. Si los rangos fueron asignados en forma tal que valores pequeños de ellos indican una mayor preferencia por el prototipo lo mismo es válido para δ_ν

Una medida de dispersión es

$$V^2=\sum_{\nu=1}^{M} \delta_\nu^2/M$$

Las utilidades de cada nivel particular son elicitadas calculando:

$$u_\nu=\delta_\nu/V$$

La valoración de un factor continua siendo realizada mediante el cálculo del recorrido de los valores de sus niveles

$$V^*_j = Valor\ de\ A_j=Max\{u_\nu | \nu\in A_j\}- Min.\{u_\nu | \nu\in A_j\}$$

En muchas ocasiones es mejor utilizar un valor relativo del valor y se computa:

$$\zeta_j=Valor\ de\ A_j/\sum_{j=1}^{J} A_j$$

Ejemplo 5.1 En la aplicación desarrollada tenemos que

ν	1	2	3	4	5
r_ν	2,31	2,41	2,86	2,38	2,49
u_ν	-0,97	-0,46	1,85	-0,81	-0,05

Por lo que

j	1	2
$Max\{u_\nu \| \nu\in A_j\}$	1,85	-0,05
$Min.\{u_\nu \| \nu\in A_j\}$	-0,97	-0,81
V^*_j	2,82	0,76
ζ_j	0,788	0,212

De este análisis obtenemos nuevamente que tiene mayor valor el Destino. En esta ocasión es casi 4 veces más importante en la preferencia por un prototipo que el tipo de paquete.

6. LA CORRELACIÓN Y LA REGRESIÓN

Entre los métodos más frecuentemente usados en las aplicaciones estadísticas están la correlación y la regresión. Al analizar la CT usando una escala métrica la regresión es utilizada con el fin de medir el valor de las partes. En este caso la información dada por un entrevistados es una variable aleatoria mensurable Y y esta se asocia a un vector de variables de diseño $x \in \Re^M$. Las coordenadas x_{ij} de este vector identifican si el nivel i de A_j está presente y el modelo aditivo de la utilidad fija que para el h-ésimo prototipo:

$$Y_h = \sum^J_{j=1} \sum_{i \in Aj} u_{ij} x_{ij} = \boldsymbol{u}^T_h \, \boldsymbol{x}_h$$

Las utilidades pueden ser centradas respecto a la media u^*_i y trabajar con $u^*_{ij} = u_{ij} - u^*_i$. El prototipo es valorado por

$$Y^*_h = \sum^J_{j=1} \sum_{i \in Aj} u^*_{ij} x_{ij} = \boldsymbol{u}^{*T}_h \, \boldsymbol{x}_h$$

Y podemos rankear (ordenar) los prototipos. Considerando que el orden dado a un prototipo es descrito por el modelo aditivo

$$r_h = \beta_0 + \sum^J_{j=1} u_{ij}(ih) + \varepsilon_h$$

donde $u_{ij}(ih)$ es la utilidad asignada al nivel presente, denotado por i, del factor A_j del producto P_h. Esta utilidad denota el valor de la parte (part worth). Usando un modelo general se va a considerar la naturaleza de la escala.

Las partes pueden estar asociadas a factores discretos en cuyo caso se denota:

$$u_{jk} = \begin{cases} \alpha_{jk} \; si \; k = 1, \dots, N_j - 1 \\ -\sum_{j=1}^{N_j - 1} \alpha_{jk} \; en \; otro \; caso \end{cases}$$

Algunos factores continuos son descritos por el modelo lineal

$$u_{jk} = x_k \beta_j + \varepsilon_{jk}$$

ε_{jk} es un error aleatorio no medible y $E[\varepsilon]=0$, y $\beta_j \in \Re$ es un parámetro desconocido pero estimable y x_k es una variable conocida y relacionada con el valor de la parte.

Por ejemplo el turista puede no conocer el valor de utilizar un cierto destino (A_j) pero si su distancia del punto de arribo a cada una de las ofertas (x_k , $k=1,2,3$) que relaciona con valor de la parte. El uso de una norma L_p permite resolver el problema de optimización que plantea la regresión pero para ello deberíamos conocer el valor de cada parte "*jk*".

Otros factores son modelables usando otros modelos pero es de particular interés hacerlo con:

$$u_{jk} = x_k \, \gamma_{j1} + x^2_k \, \gamma_{j2} + \varepsilon_{jk}$$

Este es un modelo de regresión polinomial de grado 2. Este es llamado factor ideal o anti-ideal según sea su papel.

En teoría otros modelos pueden incorporarse a la descripción del mecanismo que instrumenta la desagregación del valor asignado al producto

Se usará la notación siguiente:

δ= Número de factores discretos
N_j = Número niveles del factor discreto j
L=Número de factores lineales
x_j=factor lineal j-ésimo.
Q= Número de factores ideales o anti-ideales.
ς_j =factor ideal o anti-ideal j-ésimo.
r_{hb} es la respuesta obtenida del individuo b entrevistado.

Describamos la matriz de diseño Ω. Sin perder en generalidad consideremos que a la primera columna se asigna el valor uno , representando el término constante β_0.

Le siguen los factores discretos a los que se asignan los δ siguientes bloques. El bloque j-ésimo contendrá N_j columnas. Cada una corresponde a la desviación de cada nivel del factor de la media total. El valor '*1*' corresponde a la presencia del nivel en el factor y el '*0*' a su no presencia. Estas son usadas para la estimación de los parámetros α_{jk}*'s*.

A los factores lineales se les asigna una columna con el valor centrado respecto la media en A_j de las variables x_{jk}. Ellas se utilizan en la estimación de los β_j's en el modelo lineal.
Cada regresión polinomial es representada por dos columnas correspondientes a los valores centrados respecto a la media en A_j de las ζ_j*'s* y el cuadrado de esta diferencia las que serán usadas en la estimación de los parámetros que en esa regresión intervienen.

La estimación de los parámetros desconocidos es descrita por la relación

$$[B_0 \boldsymbol{A} \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{\rho}]^T = [\Omega^T\ \Omega]^{-1} \Omega^T \boldsymbol{r}$$

donde B_0 estima a β_o, $\boldsymbol{A}$ lo hace con $[\ \alpha_{11,...,}\ \alpha_{1N1}\ ,\alpha_{21}\ ,...,\ \alpha_{\delta N\delta}\ ]^T$, $\boldsymbol{B}$ es el estimador de $[\beta_1,...,\ \beta_L]^T$, $\boldsymbol{\rho}$ estima a $[\gamma_{j1}\ ,\gamma_{j2}]^T$ y $\boldsymbol{r}$ es el vector de los reportes obtenidos en las T entrevistas. La solución es implementada a través del modelo MANOVA instrumentado en la mayor parte de los paquetes estadísticos comerciales.

Al tenerse B entrevistas la varianza total está dada por

$$S^2 = \sum^{B}_{b=1} \sum^{H}_{h=1} [r_{hb} - r_{hb^*}]^2 / [HT-\delta-L-2Q-1]$$

A partir de estos resultados es sencillo aplicar la metodología del Análisis de Regresión. La matriz de varianzas y covarianzas muestral es simplemente $S^2[\Omega^T\ \Omega]^{-1}$

Los estimadores y sus errores son denotados como:

Factor	Estimador	Varianza
Discreto	a_{jkj} si $j=k,...,N_j-1$ $-\sum^{Nj-1}_{k=1} a_{jk}$ si $j=N_j$	$V(a_{jk})$ si $j=k,...,N_j-1$ $\sum^{Nj-1}_{k=1} V(a_{jk}) - 2 \sum_{k\neq} Cov\ [a_{jk},a_{jk'}]$
Lineal	$B_j x_k$	$x^2_j V(B_j)$
Ideal o Anti-ideal	ϱ_{j2} $\varrho_{j1} - 2\varrho_{j2}\varsigma_j$	$V(\varrho_{j2})$, $V(\varrho_{j1} - + 4\varsigma_j^2 V(\varrho_{j2}) - 4\varsigma_j Cov(\varrho_{j1},\varrho_{j2})$

Usando los estimadores podemos estimar el valor de cada parte. Su importancia es dada, al igual que al usar otros métodos, al calcular el recorrido R_j de las utilidades para cada factor y fijar :

$$V_j = R_j / \sum^{J}_{j=1} R_j$$

Generalmente se utiliza el criterio mínimo cuadrático pero otras normas como la L_1 pueden ser mejores en términos de su robustez estadística y su precisión, vea Staudte-Sheather (1990) y Marona et al. (2006) para una discusión de esta problemática. No se han detectado aplicaciones usando un método robusto a pesar de los problemas que realmente aparecen en la práctica con los outliers y el mal ajuste de los modelos. Un estdio en al lnea de los se discute en Marona et al. (2006) es un campo abierto.

Otro índice que es considerado como importante en el AC es la correlación parcial entre el valor de los atributos y la respuesta. Tomando este como:

$$R(A_j\,,Z)=R(\boldsymbol{D}_j\boldsymbol{B}_j,Z)$$

Donde $\boldsymbol{D}_j$ es :la submatriz con las columnas de $\boldsymbol{D}$ asociadas al factor A_j y $\boldsymbol{B}_j$ el vector con las estimaciones de los parámetros asociados a sus partes. Para el MONANOVA

Obtuvimos

$$R(A_1, Z)=0{,}956$$
$$R(A_2\,, Z)=0{,}293$$

Esto nos indica que la respuesta depende fuertemente del lugar.

En el caso de las Comparaciones Pareadas estos fueron:

$$R(A_1, Z)=0{,}8856$$
$$R(A_2\,, Z)=0{,}4883$$

Lo que sugiere una menor fortaleza en la relación entre Destino y el Ajuste. Sin embargo en ambos casos es el Destino la parte más importante.

RECEIVED JULY 2009
REVISED NOVEMBER 2009

REFERENCIAS

[1] AARTS, E, y J. LENSTRA (1997): **Local Search in Combinatorial Optimization**. Wiley Inter Sc. Series in Discrete Mathematics and Optimization, Chichester.

[2] ASANO , H. (1982): A Monte Carlo simulation of conjoint analysis. An empirical study on the recovery of structure. **NRC Marketing Bull**. 3, 89-97.

[3] ASANO , H. (1988): Collection of Marketing Research Techniques for Developing New Products. Japan. Manag. Ass., Tokyo.

[4] Borg, I. y Groenen, P.(2005): **Modern multidimensional scaling: theory and practice** (2dos ed.), Springer-Verlag Nueva York.

[5] BORGAWARDT, K.H. (2001): **Optimierung Operations Research Spieltheory. Mathematische Grundlagen**. Birkhäuser Verlag, Basel.

[6] BOX, G.E.P. y D. R. COX (1964): An analysis of transformations (with discussion). **J. of the Royal Stat. Soc.** B27, 211-252.

[7] CARMONE, F. J., P.E. GREEN and K.J. ARUN (1978): Robustness of Conjoint Analysis: some Monte Carlo results **. J. of Marketing Res**. 15, 300-303.

[8] CURRY J. (1998): **Conjoint analysis: after the basics**. Sawtoth Tech. N. York.

[9] EMERY, D.R. and F.H. BARRON (1979): Axiomatic and numerical conjoint measurement: an evalution of diagnostic efficacy. **Psychometrika**.. 44, 195-210.

[10] FERREIRA, S.D., RIAL, A., PICÓN, E. y VARELA, J. (2009): Efecto del orden de presentación de los atributos sobre los resultados del Análisis Conjunto. **Metodología de Encuestas** 11: 103-119.

[11] FERREIRA-LOPES S. (2011): Análisis conjunto. Teoría, campos de aplicación y conceptos inherentes- **Estud. perspect. tur**..20, .2.feb./abr.

[12] GREEN P. E. and V.R. RAO (1971): Conjoint measurement for quantifying judgmental data. **J. of Marketing Res.** 8, 355-363.

[13] GIBBONS, J.D. (1971): **Nonparametric Statistical Inference**. Mc. Graw Hill, N. York.

[14] HAYASHI, C. (1968): One dimensional quantification and multidimensional scaling quantification. **Ann,. of Japan Ass. For Philosophy of Sci**. 3, 115-120.

[15] JOHNSON, R. A. y D. W. WICHERIN (1998): **Applied Multivariate Statistical Analysis**. Prentice Hall. New Jersey.).

[16] JOHNSON, R. M. (1975): A simple method for pairwise monotone regression. **Psychometrika**, 40. 163-168.

[17] JOHNSON, R.M. (1973): Pairwise nonmetric multidimensional scaling. **Psychometrika,** 38, 11-18.

[18] KRUSKAL, J.B. (1965): Analysis of factorial experiments by estimating monotone transformations of the data**. J. of the Royal Stat. Soc**. 27B, 251-263.

[19] LAMB, C. W. , J. F. HAIR y C. McDANIEL (1998): **Marketing. International** Thompson Editores, Mexico.

[20] LEHMAN, P.R. (1993): **Investigación y Análisis de Mercado**. CECSA, México.

[21] LUCE, R. D. and J.W. TUKEY (1964): Simultaneous conjoint measurement: a new type of fundamental management. **J. of Mathematical Psychology**, I, 1-27.

[22] MARONA, R.A:, R. D. DOUGLAS MARTIN and V. J. YOHAI (2006): **Robust Statistics, Theory and Methods**, Wiley,Chichester.

[23] NOGUCHI H. and H. ISHII (2000): The application of rank ordinal data using DEA model to conjoint analysis. **Mathematica Japonica**, 51, 21-34.

[24] NOGUCHI , H. and H. ISHII (2000):Methods for determining the statistical part worth value of factors in conjoint analysis**. Mathematical and Computer Mod**. 31, 12, 261-271.

[25] NOGUCHi H. and T. ISOGAI (1991): Conjoint Analysis: studies in the humanities and Social Science. **XL**, 111-148.

[26] RAO, V. R. (1977): Conjoint measurement in marketing analysis (En, Setta, J. N.,[editor.] **Multivariate Methods for Market and Survey Research)** AMA, Chicago. 257-286.

[27] RAMÍREZ, J.M., BARRERA, R. y BERBEL, J.M. (2005): Medición de la calidad de servicio mediante la metodología de Análisis Conjunto. **XV Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica**, Sevilla.

[28] REIG-GARCÍA, C. y COENDERS, G. (2002): Segmentación del mercado turístico según las preferencias ambientales. **Cuadernos de Turismo**, 9: 109-121

[29] SASTECHMICAL REPORT R-109 (1993): , **Conjoint Analysis Examples**, Gary, NC: SAS Institute Inc.,

[30] STAUDTE, R.G. y S. J.. SHEATHER (1990): **Robust Estimation and Testing**. J. Wiley, N. York.

[31] VARELA, J., PICÓN y E. BRAÑA, T. (2004): Segmentation of the Spanish domestic tourism market". **Psicothema**, 16: 76-83

[32] WU, W. B.; WOODROOFE, M.; Y MENTZ, G. (2001): Regresión isotónica: Otra mirada en el problema del changepoint . **Biometrika** 8, 793-804.