MODELACIÓN MATEMÁTICA DEL MOVIMIENTO DE LA ATMÓSFERA CON LA TRANSICIÓN DE FASE DE AGUA

Hisao Fujita Yashima
Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation,
Université 8 Mai 1945, Guelma, Algérie y Dipartimento di Matematica,
Universitá di Torino, Italia

ABSTRACT
In this paper we propose an equation system which models the motion of the atmosphere, taking into account the phase transition of the water and the fall of water droplets and some results about the solvability of equations in some particular cases, including that of the problem of the thermal effect of the radiation in the stationary state, are presented.
KEYWORDS: Mathematical model of the atmosphere, phase transitión of the water.
MSC: 35Q35, 76N10.

RESUMEN
En este artículo proponemos un sistema de ecuaciones que modela el movimiento de la atmósfera teniendo cuenta la transición de fase del agua y la caída de gotitas de agua y se presentan algunos resultados sobre la resolubilidad de ecuaciones en casos particulares, incluida la del problema del efecto térmico de la radiación en el estado estacionario.
Palabras clave: Modelo matemático de la atmósfera, transición de fase del agua.

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta investigación es modelar el movimiento de la atmósfera teniendo en cuenta la transición de fase del agua en la atmósfera, es decir, modelar los fenómenos atmosféricos incluyendo la formación de nubes, la lluvia y la nieve. Tratamos de tomar en consideración también el efecto térmico de la radiación en la atmósfera.

El modelo que proponemos consiste en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales con algunos operadores integrales. Las cantidades físicas principales que consideramos en nuestro sistema de ecuaciones son la densidad del aire seco ϱ (aquí por "aire seco" entendemos la parte del aire diferente de H_2O), la densidad del vapor de agua π, la densidad del agua líquida $\sigma_l(m)$ contenida en las gotitas de agua de masa m, la densidad del agua solidificada $\sigma_s(m)$ contenida en los cristales de hielo de masa m, la velocidad del aire $v = (v_1, v_2, v_3)$ y la temperatura T; aquí tratamos la masa m de las gotitas y de los cristales de hielo como una variable continua. Consideraremos la presión como función de la densidad y de la temperatura, mientras la velocidad de las gotitas de agua y la velocidad de los cristales de hielo pueden ser determinadas por la velocidad del aire v y la masa m de cada gotita de agua y de cada cristal de hielo. Consideraremos también la fuente del calor debida a la radiación.

En este enfoque algunos científicos propusieron modelos matemáticos (véanse por ejemplo Martchouk *et al.* (1984)[9], Lions *et al.*(1992)[7]), que daban unas características importantes, pero no incluían todas las interacciones que consideramos en nuestro sistema de ecuaciones.
El presente trabajo fué presentado en la *10-th International Conference on Operations Research* que tuvo lugar en marzo de 2012 en La Habana.

2. PROPIEDADES FÍSICAS DE LOS FENÓMENOS CONSIDERADOS

Nuestra modelación se basa en la mecánica de los fluidos y la descripción de la microfísica. En efecto, el movimiento del aire en general puede ser descrito por el sistema de ecuaciones bien conocido del fluido comprensible general (gas viscoso y termoconductor), que se puede encontrar por ejemplo en Landau y Lifchitz (1989)[6]. Por otra parte, como los aspectos de la microfísica y sus descripciones matemáticas no son bien conocidos por los investigadores matemáticos, hay que recordar las propiedades microfísicas que tomamos en consideración; para ello consultamos Matveev(2000) [10], Prodi y Battaglia(2004)[13], Sheng *et al* (2003)[16], Kikoine y Kikoine (1979) [5] y otros.

1) Densidad del vapor saturado

En primer lugar recordemos la *densidad del vapor saturado*. En efecto, en cada temperatura dada T está determinada la densidad del vapor de agua saturado, que denotamos mediante $\overline{\pi}_{s,1}(T)$ cuando se la considera sobre la superficie del agua líquida y mediante $\overline{\pi}_{s,2}(T)$ cuando se la considera sobre la superficie del hielo. Es útil recordar que la densidad del vapor saturado depende muy sensiblemente de la temperatura (es una función creciente de la temperatura T), por ejemplo los valores aproximados de $\overline{\pi}_{s,1}(T)$ es

$$\overline{\pi}_{s,1}(T) = \frac{\mu_h \overline{p}_{vs,1}(T)}{R_0 T}, \quad \overline{p}_{vs,1}(T) \approx E_0 \cdot 10^{\frac{7,63(T-273,15)}{T-31,25}}, \quad E_0 = 6,107 \quad (mbar) \tag{2.1}$$

(véase por ejemplo Matveev (2000)[10]), donde R_0 es la constante universal de los gases, mientras μ_h la masa molar de H_2O; $\overline{p}_{vs,1}(T)$ se la llama habitualmente *presión del vapor saturado*.

2) Calor latente

En segundo lugar, recordemos que el *calor latente* juega un papel muy importante en la transición de fase del agua en la atmósfera, dando y absorbiendo la energía térmica al aire, cuando se realiza la transición de fase. Mediante L_{gl} denotemos el calor latente de la transición gas-líquido, mediante L_{ls} el de la transición líquido-sólido y mediante L_{gs} el de la transición gas-sólido. Sus valores aproximados son

$$L_{gl}(T) \approx (3244 - 2,72\,T)10^3 \ (J/kg), \qquad L_{ls} \approx 335 \cdot 10^3 \ (J/kg) \tag{2.2}$$

(véase por ejemplo Matveev(2000) [10]), mientras $L_{gs} = L_{gl} + L_{ls}$.

3) Velocidad de la transición de fase

En lo que concierne a la velocidad de la transición de fase, como primera aproximación supongamos que la cantidad de condensación/evaporación sobre una gotita es proporcional al producto de la densidad del vapor excedente a la del vapor saturado, $\pi - \overline{\pi}_{s,1}(T)$, y de la superficie $S_l(m)$ de la gotita (de masa m);

expresando la cantidad de condensación/evaporación por unidad de masa del agua líquida de las gotitas y denotándola con h_{gl}, esta hipótesis se expresa por

$$h_{gl} = h_{gl}(T, \pi; m) = K_1 m^{-1} S_l(m)(\pi - \overline{\pi}_{s,1}(T)), \tag{2.3}$$

donde K_1 es una constante. Análogamente, supongamos que la cantidad h_{gs} de sublimación sobre un cristal de hielo de masa m (por unidad de masa de hielo) es dada por

$$h_{gs} = h_{gs}(T, \pi; m) = K_2 m^{-1} S_s(m)(\pi - \overline{\pi}_{s,2}(T)), \tag{2.4}$$

donde K_2 es una constante y $S_s(m)$ la superficie de un cristal de hielo de masa m. Además denotemos por $K_{ls}(T, m)$ el índice de solidificación y por $K_{sl}(T, m)$ el de fusión.

4) Aparición y desaparición de gotitas y cristales de hielo

En la Naturaleza no existen gotitas (ni cristales de hielo) de diámetro menor que un valor crítico, ya que las gotitas muy pequeñas tendrían una curvatura muy elevada, que ocasiona una evaporación más rápida; la condensación del agua se realiza sólo sobre partículas suspendidas en el aire, llamados *aerosoles*, de diámetro mayor que el valor crítico. Además, se observa que en la atmósfera, incluso cuando la temperatura es inferior a 0^oC, al principio se forman gotitas de agua y sucesivamente ellas se solidifican con una probabilidad que depende de la temperatura T y de la masa m de la gotita. Por eso es conveniente introducir funciones $g_0(m)$, $g_1(m)$ y $g_2(m)$ de m, una constante N^* y una función $\tilde{N}$ de σ_l y σ_s (N^* y $\tilde{N}$ representarían el número de aerosoles existentes por unidad de volumen y el de aerosoles ya contenidos en gotitas o cristales de hielo) y suponer que la cantidad de nuevas gotitas creadas de masa m, la de gotitas de masa m que desaparecen y la de cristales de hielo de masa m que desaparecen por unidad de tiempo y volumen están dadas por

$$g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma_l, \sigma_s)]^+[\pi - \bar{\pi}_{s,1}(T)]^+, \tag{2.5}$$

$$g_1(m)[\pi - \bar{\pi}_{s,1}(T)]^- \sigma_l, \tag{2.6}$$

$$g_2(m)[\pi - \bar{\pi}_{s,2}(T)]^- \sigma_s. \tag{2.7}$$

Las cantidades (2.5)-(2.7) se expresan como las de masa (y no como número de gotitas o de cristales de hielo).

5) Agregación

Si una gotita de masa m y una de masa m' se encuentran, dos gotitas se convierten en una gotita de masa $m + m'$, es decir, tiene lugar el proceso de agregación de gotitas. Describiremos la variación de la densidad del agua líquida $\sigma_l(m)$ debida a las agregaciones, denotando por $\beta_l(m, m')$ la probabilidad (normalizada para la masa de agua) de encuentro entre una gotita de masa m y una de masa m' (véase por ejemplo Voloshtchuk (1984) [18]). Cuando dos cristales de hielo se encuentran, no necesariamente se convierten en un pedazo de hielo. Pero desde el punto de vista matemático, podemos describir de manera análoga este proceso de agregación de cristales de hielo, introduciendo una cierta probabilidad $\beta_s(m, m')$ de agregación entre un cristal de hielo de masa m y uno de masa m'.
Hay también encuentros entre un cristal de hielo y una gotita. En efecto, como decíamos antes, por debajo de 0^oC pueden coexistir gotitas de agua líquida y cristales de hielo. La presencia de gotitas de agua líquida en la temperatura inferior a la de fusión debe ser considerada come sobrefusión que se mantiene por la falta de núcleos de congelación. Recordemos que, por otra parte, los cristales de hielo son óptimos núcleos de congelación. Por eso podemos suponer que, si se encuentran una gotita de agua y un cristal de hielo en

tal temperatura, se convierten en un cristal de hielo. Por lo tanto para describir este proceso es suficiente introducir la probabilidad $Z_{ls}(m, m')$ de encuentro entre un cristal de hielo de masa m y una gotita de masa m', encuentro que necesariamente genera un cristal de hielo de masa $m + m'$.

6) Efecto térmico de la radiación

La absorción y la emisión de la radiación por la atmósfera provocan la variación de la temperatura. En ecuaciones generales de nuestro modelo denotaremos por E_{rad} el efecto térmico de la radiación, mientras examinaremos las relaciones específicas de la radiación y del calor en el aire en el epígrafe 6.

3. SISTEMA DE ECUACIONES

Teniendo en cuenta las relaciones que hemos recordado en el epígrafe precedente, proponemos un sistema de ecuaciones para describir el movimiento del aire. La estructura básica de este sistema es la de las ecuaciones de la mecánica de los fluidos, en particular para un gas viscoso termoconductor (véase Landau y Lifchitz (1989)[6]). De la manera análoga al caso de un gas ideal, utilizamos la expresión de la presión p dada por

$$p = R_0(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T,$$

donde R_0 es la constante universal de los gases, mientras μ_a y μ_h son la masa molar media del aire seco y la del agua respectivamente.
En esta hipótesis la ley de la conservación de la cantidad de movimiento se traduce en

$$(\varrho + \pi)\big(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v\big) = \eta\Delta v + \big(\zeta + \frac{\eta}{3}\big)\nabla(\nabla \cdot v) + \tag{3.8}$$

$$-R_0\nabla((\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T) - \Big[\int_0^\infty (\sigma_l(m) + \sigma_s(m))dm + \varrho + \pi\Big]\nabla\Phi,$$

donde Φ es el geopotencial, mientras η y ζ son los coeficientes de viscosidad. El término $\int_0^\infty(\sigma_l(m) + \sigma_s(m))dm\nabla\Phi$ resulta del principio de acción-reacción y del efecto de la fricción entre las gotitas o los cristales de hielo y el aire (véanse (3.14), (3.15)).
En cuanto a la ley de la conservación de la energía, tenemos que añadir a la ecuación clasica del balance de la energía de la dinamica del gas los términos que representan el efecto térmico de la radiación y el de la transición de fase de H_2O. Así tenemos

$$(\varrho + \pi)c_v\Big(\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T\Big) = \kappa\Delta T - R_0(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T\nabla \cdot \vec{v} + \tag{3.9}$$

$$+\eta\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla \cdot v\Big)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta(\nabla \cdot v)^2 + E_{rad} + L_{gl}H_{gl} + L_{ls}H_{ls} + L_{gs}H_{gs},$$

donde c_v y κ son el calor específico y el coeficiente de conductividad térmica respectivamente, mientras H_{gl}, H_{gs} y H_{ls} son la cantidad por unidad de tiempo y de volumen de condensación o evaporación, la de sublimación y la de solidificación o fusión del agua; para H_{gl} y H_{gs} tenemos las relaciones

$$H_{gl}(T, \pi, \sigma_l(\cdot)) = \int_0^\infty h_{gl}(m)\sigma_l(m)dm, \qquad H_{gs}(T, \pi, \sigma_s(\cdot)) = \int_0^\infty h_{gs}(m)\sigma_s(m)dm.$$

Puesto que para las componentes del aire diferentes de H_2O en las temperaturas normales de la atmósfera no hay la transición de fase, para la densidad ϱ del aire seco podemos considerar la ecuación de continuidad clásica

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho v) = 0. \tag{3.10}$$

Para la densidad π del vapor de agua, es necesario tener en cuenta su variación debida a la cantidad de condensación/evaporación H_{gl} y la de sublimación H_{gs}. Por lo tanto tenemos que considerar la ecuación

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl}(T, \pi, \sigma_l(\cdot)) - H_{gs}(T, \pi, \sigma_s(\cdot)). \tag{3.11}$$

En lo que concierne a la densidad $\sigma_l(m)$ del agua líquida contenida en gotitas de masa m, su variación está determinada por el crecimiento o la disminución de gotitas por la condensación sobre o evaporación desde su superficie, la solidificación de gotitas, la fusión de critales de hielo, la aparición de nuevas gotitas por la condensación sobre aerosoles, la desaparición de gotitas por el cumplimiento de evaporación y el proceso de agregación. Así la variación de $\sigma_l(m)$ se la describe por la ecuación

$$\frac{\partial \sigma_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma_l u_l) + \frac{\partial (m h_{gl} \sigma_l)}{\partial m} = [h_{gl} - K_{ls}(T, m)]\sigma_l + \tag{3.12}$$

$$+K_{sl}(T, m)\sigma_s + g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma_l, \sigma_s)]^+[\pi - \overline{\pi}_{s,1}(T)]^+ - g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{s,1}(T)]^- \sigma_l +$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta_l(m - m', m')\sigma_l(m')\sigma_l(m - m')dm' - m\sigma_l(m)\int_0^\infty \beta_l(m, m')\sigma_l(m')dm' +$$

$$-m\sigma_l(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m', m)\sigma_s(m')dm',$$

donde u_l es la velocidad de las gotitas.

De manera análoga, la consideración del crecimiento o la disminución de cristales de hielo por la sublimación, la solidificación de gotitas, la fusión de cristales de hielo, la desaparición de cristales de hielo por el cumplimiento de sublimación y el proceso de agregación nos conduce a la ecuación

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma_s u_s) + \frac{\partial (m h_{gs} \sigma_s)}{\partial m} = [h_{gs} - K_{sl}(T, m)]\sigma_s + \tag{3.13}$$

$$+K_{ls}(T, m)\sigma_l - g_2(m)[\pi - \overline{\pi}_{s,2}(T)]^- \sigma_s + \frac{m}{2}\int_0^m \beta_s(m - m', m')\sigma_s(m')\sigma_s(m - m')dm' +$$

$$-m\sigma_s(m)\int_0^\infty \beta_s(m, m')\sigma_s(m')dm' + m\int_0^m Z_{ls}(m - m', m')\sigma_s(m - m')\sigma_l(m')dm' +$$

$$-m\sigma_s(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m, m')\sigma_l(m')dm',$$

donde u_s es la velocidad de los cristales de hielo.

Para las velocidades u_l y u_s de las gotitas y de los cristales de hielo, admitamos que ellas están determinadas por

$$u_l(m, x, t) = v(x, t) - \frac{1}{\alpha_l(m)}\nabla\Phi, \tag{3.14}$$

$$u_s(m, x, t) = v(x, t) - \frac{1}{\alpha_s(m)}\nabla\Phi, \tag{3.15}$$

donde $\alpha_l(m)$ y $\alpha_s(m)$ son los coeficientes de fricción entre el aire y las gotitas y entre el aire y los cristales de hielo.

4. SOLUCIÓN LOCAL DEL SISTEMA GENERAL

Bajo condiciones apropiadas se peude demostrar que el sistema ligeramente modificado de las ecuaciones (3.8)-(3.13) admite en un intervalo de tiempo suficientemente pequeño una y una sola solución (Selvaduray y Fujita Yashima[15], véanse también Fujita *et al.*(2011)[4], Belhireche *et al.* (2011)[2]).
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto limitado con una frontera regular. Supongamos las condiciones

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.16}$$

$$T\big|_{\partial\Omega} = \overline{T}^* \in W_q^{2-\frac{1}{q},\,1-\frac{1}{2q}}(\partial\Omega\times\,]0,t_1[\,), \qquad \inf_{(x,t)\in\partial\Omega\times\,]0,t_1[} \overline{T}^*(x,t) > 0, \qquad t_1 > 0, \tag{4.17}$$

$$v(\cdot,0) = v_0(\cdot) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega), \qquad v_0\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.18}$$

$$T(\cdot,0) = T_0(\cdot) \in W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega), \qquad \inf_{x\in\Omega} T_0(x) > 0, \qquad T_0\big|_{\partial\Omega} = \overline{T}^*\big|_{t=0}, \tag{4.19}$$

$$\varrho(\cdot,0) = \varrho_0(\cdot) \in W_p^1(\Omega), \qquad \inf_{x\in\Omega} \varrho_0(x) > 0, \tag{4.20}$$

$$\pi(\cdot,0) = \pi_0(\cdot) \in W_p^1(\Omega), \qquad \inf_{x\in\Omega} \pi_0(x) > 0, \tag{4.21}$$

$$\sigma_l(\cdot,\cdot,0) = \sigma_{l,0}(\cdot,\cdot) \in W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega), \qquad \sigma_{l,0}(\cdot;\cdot) \geq 0, \tag{4.22}$$

$$\sigma_s(\cdot,\cdot,0) = \sigma_{s,0}(\cdot,\cdot) \in W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega), \qquad \sigma_{s,0}(\cdot;\cdot) \geq 0, \tag{4.23}$$

$$\exists \bar{M}' \geq \bar{m}_a \ \text{ tal que } \ \sigma_{l,0}(m,x) = \sigma_{s,0}(m,x) = 0 \quad \text{si } \ m \in\,]0,\bar{m}_a] \cup [\bar{M}',\infty[. \tag{4.24}$$

Además supongamos que

$$\Phi \in C^3(\Omega), \qquad \nabla\Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sobre } \ \partial\Omega \quad (\vec{n} : \text{vector normal sobre } \partial\Omega), \tag{4.25}$$

$$E_{rad} \in L^q(\Omega\times\,]0,t_1[\,), \tag{4.26}$$

$$\beta_l(m',m'') = \beta_s(m',m'') = Z_{ls}(m',m'') = 0 \qquad \text{cuando } \ m' + m'' \geq \overline{M}_\beta \tag{4.27}$$

con una constante $\overline{M}_\beta < \infty$ y que $\alpha_l(m)$, $\alpha_s(m)$, $K_{ls}(T,m)$, $K_{sl}(T,m)$, $g_0(m)$, $g_1(m)$, $g_2(m)$, $\beta_l(m,m')$, $\beta_s(m,m')$, $Z_{ls}(m,m')$, $\overline{\pi}_{s,1}(T)$ y $\overline{\pi}_{s,2}(T)$ son funciones regulares.
Finalmente por razones técnicas introducimos el promedio local π_ϑ de π y la aproximación de $h_{gl}(m)$, $h_{gs}(m)$, H_{gl}, H_{gs} por

$$\widetilde{h}_{gl}(m) = K_1 m^{-1} S_l(m)(\pi_\vartheta - \overline{\pi}_{s,1}(T)),$$

$$\widetilde{h}_{gs}(m) = K_2 m^{-1} S_s(m)(\pi_\vartheta - \overline{\pi}_{s,2}(T)),$$

$$\widetilde{H}_{gl} = \int_0^\infty \widetilde{h}_{gl}(m)\sigma_l(m)dm, \quad \widetilde{H}_{gs} = \int_0^\infty \widetilde{h}_{gs}(m)\sigma_s(m)dm.$$

Entonces tenemos el

TEOREMA 4.1. *Sean $p > 4$, $2q > p > q > 3$; supongamos las condiciones* (4.16)-(4.24). *Entonces existe un $\bar{t} > 0$ tal que el sistema* (3.8)-(3.13) *con la substitución de $\widetilde{h}_{gl}$, $\widetilde{h}_{gs}$, $\widetilde{H}_{gl}$ y $\widetilde{H}_{gs}$ en lugar de h_{gl}, h_{gs}, H_{gl} y H_{gs} admita, en el intervalo de tiempo $[0,\bar{t}]$, una y una sola solución $(v,T,\varrho,\pi,\sigma_l,\sigma_s)$ en la clase*

$$v \in W_p^{2,1}(Q_{\bar{t}}), \qquad T \in W_q^{2,1}(Q_{\bar{t}}), \quad T > 0, \qquad \varrho \in C^0([0,\bar{t}];W_p^1(\Omega)), \tag{4.28}$$

$$\inf_{(x,t)\in Q_{\bar{t}}} \varrho(x,t) > 0, \qquad \pi \in C^0([0,\bar{t}]; W_p^1(\Omega)), \quad \pi \geq 0,$$

$$\sigma_l, \sigma_s \in C^0([0,\bar{t}]; W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega)), \quad \sigma_l, \sigma_s \geq 0,$$

donde

$$\|\varphi\|_{W_r^{2,1}(Q_t)} = \|\varphi\|_{L^r(0,t;W_r^2(\Omega))} + \|\partial_t \varphi\|_{L^r(Q_t)}, \qquad Q_t = \Omega \times]0,t[.$$

El esquema general de la demostración del teorema 4.1 es lo siguiente:

(i) Dados $v = \overline{v}$ y $T = \overline{T}$, se resuelven las ecuaciones (3.10)-(3.13) para ϱ, π, σ_l y σ_s.

(ii) Dados $\overline{v}$ y $\overline{T}$ y construidas las soluciones ϱ, π, σ_l y σ_s en la etapa (i), se resuelven las ecuaciones linealizadas de (3.8)-(3.9) para v y T.

(iii) Se demuestra que, en un intervalo de tiempo bastante pequeño, el operador que, al dato $(\overline{v}, \overline{T})$, asocia la solución (v,T) de la etapa (ii) es una contracción.

Desde el punto de vista técnico, en la etapa (i) necesitamos considerar las ecuaciones (3.12)-(3.13) como ecuaciones de transporte en un espacio de las variables "espaciales" m y x. Para las ecuaciones linealizadas de (3.8)-(3.9) utilizamos las técnicas para las ecuaciones de los fluidos viscosos compresibles desarrolladas desde Solonnikov (1976)[17].

Si se pudiera demostrar la existencia de la solución local sin utilizar el promedio local π_ϑ de π, naturalmente sería mejor. Para eso sería necesaria una investigación del comportamiento de las ecuaciones (3.11)-(3.13). En este enfoque se han estudiado algunos aspectos del sistema (3.11)-(3.13) con funciones v y T dadas (véanse Ascoli y Selvaduray(20012)[1], Selvaduray [14]).

5. ECUACIÓN DE LAS GOTITAS EN CAÍDA

La segunda condición de (4.25) no es natural. En efecto, si Φ es el geopotencial, se tiene $\nabla\Phi = (0,0,g)^T$ con la aceleración de la gravedad casi constante $g > 0$ y por eso no se puede hallar un dominio limitado tal que $\nabla\Phi \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Si $\nabla\Phi \cdot \vec{n} \neq 0$ sobre $\partial\Omega$, no se puede utilizar la técnica debida a la integración por partes que utilizamos para la estimación en los espacios de Sobolev de σ_l y σ_s en la etapa (i) de la demostración del teorema 4.1. Por eso, para resolver nuestro sistema de ecuaciones bajo condiciones más naturales, hay que examinar las ecuaciones (3.12)-(3.13) con la condición $\nabla\Phi \cdot \vec{n} \neq 0$ sobre $\partial\Omega$. Puesto que no es fácil resolver bajo esta condición las ecuaciones (3.12)-(3.13) y que la ecuación (3.13) tiene más o menos una misma estructura que la ecuación (3.12), tenemos que comenzar por un estudio de la ecuación para σ_l con condiciones suficientemente simples.

Si consideramos el caso del equilibrio entre la densidad real del vapor y la del vapor saturado, es decir $\pi = \overline{\pi}_{s,1}(T)$, y de la temperatura por encima de 0^oC (suponiendo naturalmente que $\sigma_s = 0$), la ecuación (3.12) se reduce a

$$\frac{\partial \sigma_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma_l u_l) = \frac{m}{2} \int_0^m \beta_l(m-m',m')\sigma_l(m')\sigma_l(m-m')dm' + \tag{5.29}$$

$$-m\sigma_l(m) \int_0^\infty \beta_l(m,m')\sigma_l(m')dm'.$$

En primer lugar consideremos la ecuación (5.29) en el dominio

$$\Omega = \mathbb{R} \times]0,1[= \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 < z < 1\} \tag{5.30}$$

con la velocidad $u_l = u_l(m)$ de gotitas

$$u_l = u_l(m) = (\overline{v}, -\frac{g}{\alpha(m)}), \qquad \overline{v}: \text{ constante}, \tag{5.31}$$

correspondiente al geopotencial $\nabla\Phi = (0,g)^T$ y el viento constante y horizontal $v = (\overline{v}, 0)$. Se ve fácilmente que un problema análogo en tres dimensiones con $\Omega_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < z < 1\}$, $\nabla\Phi = (0,0,g)^T$, $v = (\overline{v}, 0, 0)$, incluso cuando $\overline{v} = \overline{v}(y)$ es una función de y, se reduce a nuestro problema en dos dimensiones.
Si el proceso es estacionario, escribiendo simplemente σ y u en lugar de σ_l y u_l, la ecuación (5.29) se reduce a

$$\nabla_{(x,z)} \cdot (\sigma(m,x,z)u(m)) = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',x,z)\sigma(m-m',x,z)dm' + \tag{5.32}$$

$$-m\sigma(m,x,z)\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m',x,z)dm', \qquad \nabla_{(x,z)} = (\partial_x, \partial_z)^T.$$

Vamos a estudiar la ecuación (5.32) con la condición (de entrada)

$$\sigma(m,x,1) = \overline{\sigma}(m,x), \tag{5.33}$$

suponiendo para la función $\overline{\sigma}(m,x)$ por ejemplo las condiciones:

$$\overline{\sigma}(\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \tag{5.34}$$

$$\overline{\sigma}(m,x) \geq 0 \qquad \text{en } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \tag{5.35}$$

$$\operatorname{supp}(\overline{\sigma}) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R} \qquad (0 < \overline{m}_a < \overline{m}_A < \infty), \tag{5.36}$$

$$\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)}, \tag{5.37}$$

donde

$$M_1 = \sup_{2\overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A, \overline{m}_a \leq m' \leq m - \overline{m}_a} \frac{m\alpha(m)}{2g}\beta(m-m',m'). \tag{5.38}$$

Entonces tenemos el siguiente resultado (Merad *et al.*[11]).

TEOREMA 5.1. *Si* $\overline{\sigma}(m,x)$ *satisface las condiciones* (5.34)-(5.37)*, entonces la ecuación* (5.32) *con la condición* (5.33) *admite una y una sola solución* σ *en la clase*

$$\sigma \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,1]). \tag{5.39}$$

Para demostrar el teorema 5.1 introduzcamos el cambio de variables

$$\xi = x - \overline{v}\,\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)$$

y, para cada $z \in [0,1]$, definamos la familia de curvas

$$\gamma_\tau = \{(m,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,|\, \xi = \tau - \overline{v}\,\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)\}, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{5.40}$$

Entonces podemos escribir la ecuación (5.32) en la forma

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(z) = F_z(\sigma(z)), \qquad \sigma(z) = \sigma(\cdot,\cdot,z), \tag{5.41}$$

con

$$F_z(\sigma(z)) = F_z(\sigma(z))(m,\xi) =$$
$$= -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,z)}} \beta(m-m',m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m-m',\eta'',z)\mu_\gamma(dm') +$$
$$+\frac{m\alpha(m)}{g}\sigma(m,\xi,z)\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,z)}} \beta(m,m')\sigma(m',\eta',z)\mu_\gamma(dm'),$$

donde

$$\tau(m,\xi,z) = \xi + \overline{v}\,\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \qquad \gamma_\tau^{[0,m]} = \gamma_\tau \cap [0,m]\times\mathbb{R},$$

y $\mu_\gamma(dm')$ denota la medida sobre la curva γ_τ, mientras η' y η'' son tales que

$$(m',\eta') \in \gamma_{\tau(m,\xi,z)}, \quad (m-m',\eta'') \in \gamma_{\tau(m,\xi,z)}.$$

Naturalmente la condición (5.33) se transforma en

$$\sigma(1) = \sigma(m,\xi,1) = \overline{\sigma}(m,\xi). \tag{5.42}$$

Podemos considerar la ecuación (5.41) y la condición (5.42) como el problema de Cauchy para

$$\sigma(\cdot,\cdot,z) \in L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}), \qquad 1 \geq z \geq 0.$$

Utilizando también una estimación de la norma $\|\sigma(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}$ y estimando el operador integral con la ayuda de la propiedad de la convolución sobre la curva γ_τ, podemos obtener estimaciones necesarias para la resolución de este problema de Cauchy (para los detalles, véase Merad *et al.*[11]).

Volviendo a la ecuación de evolución, pero simplificando el problema en un dominio

$$0 < z < 1$$

con la velocidad de gotitas

$$u(m) = -\frac{1}{\alpha(m)}g,$$

la ecuación (5.29) se reduce a

$$\partial_t\sigma(m,t,z) + \partial_z(\sigma(m,t,z)u(m)) = \tag{5.43}$$
$$= \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',t,z)\sigma(m-m',t,z)dm' +$$
$$-m\sigma(m,t,z)\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m',t,z)dm'.$$

La idea de transformar el problema en una ecuación diferencial ordinaria en un espacio de Banach con el operador integral definido sobre una curva γ_τ nos permite de obtener la solución global de la ecuación

(5.43) y su convergencia hacia la solución estacionaria. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado (véase Belhireche *et al.*(2012)[3]).

TEOREMA 5.2. *Supongamos que* $\overline{\sigma}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times [0,1])$ *y* $\overline{\sigma}_1 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ *satisfacen las condiciones*

$$\overline{\sigma}_0(m,z) \geq 0 \qquad \textit{c.d. sobre } \mathbb{R}_+ \times [0,1], \qquad \overline{\sigma}_1(m,t) \geq 0 \qquad \textit{c.d. sobre } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

$$\overline{\sigma}_0(m,z) = 0, \quad \overline{\sigma}_1(m,t) = 0 \qquad \textit{para } m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[\,,$$

$$\max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times [0,1])}, \|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)}\right) < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)},$$

donde M_1 *es la constante dada en* (5.38)*. Entonces la ecuación* (5.43) *con las condiciones*

$$\sigma(m,t,1) = \overline{\sigma}_1(m,t), \qquad \sigma(m,0,z) = \overline{\sigma}_0(m,z) \tag{5.44}$$

admite una y una sola solución $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [0,1])$.
Además, si

$$\overline{\sigma}_1^t \to \overline{\sigma}_1^\infty \quad \textit{para } t \to \infty \quad \textit{en } L^\infty(\mathbb{R}_+ \times]0,1[), \tag{5.45}$$

entonces se tiene

$$\sigma^t \to \sigma^\infty \quad \textit{para } t \to \infty \quad \textit{en } L^\infty(\mathbb{R}_+ \times]0,1[\times]0,1[), \tag{5.46}$$

donde

$$\overline{\sigma}_1^t(m,s) = \overline{\sigma}_1(m,t+s), \quad \sigma^t(m,s,z) = \sigma(m,t+s,z) \quad \textit{para } 0 < s < 1,$$

y σ^∞ *es la solución de la ecuación estacionaria con la condición de entrada* $\overline{\sigma}_1^\infty$ *(independiente de* $(t,s) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$*).*

6. ECUACIONES DE LA RADIACIÓN Y SU EFECTO TÉRMICO

En la ecuación (3.9) hemos introducido el efecto térmico de la radiación E_{rad} y en la construcción de la solución local (teorema 4.1) lo hemos tratado como una función dada. Ahora queremos examinar las relaciones entre la radiación y la temperatura.
Denotemos por $I_\lambda(x,q)$ la intensidad de la radiación de longitud de onda λ en la dirección $q \in S^2$ al punto $x \in \mathbb{R}^3$ y por $T(x)$ la temperatura al punto $x \in \mathbb{R}^3$ (las funciones I_λ y T pueden depender también del tiempo $t \in \mathbb{R}$). Según la descripción de los físicos (véase por ejemplo Liou (2002[8]), $I_\lambda(x,q)$ debe satisfacer la ecuación

$$(q \cdot \nabla) I_\lambda(x,q) = -(a_\lambda(x) + r_\lambda(x)) I_\lambda(x,q) + \tilde{J}_\lambda(x,q,I_\lambda,T), \tag{6.47}$$

donde

$$\tilde{J}_\lambda(x,q,I_\lambda,T) = \frac{r_\lambda(x)}{4\pi} \int_{S^2} I_\lambda(x,q') P_\lambda(q',q) dq' + a_\lambda(x) B[\lambda, T(x)], \tag{6.48}$$

$$B[\lambda,T] = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \left(e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1\right)^{-1} \tag{6.49}$$

(en (6.49) c es la velocidad de la luz, h la constante de Planck y k la constante de Boltzmann); se acostumbra llamar $B[\lambda,T]$ la *función de Planck*. En (6.47)-(6.48) $a_\lambda(x)$ es el coeficiente de absorción y $r_\lambda(x)P_\lambda(q',q)$

es el de difusión (por desviación o por reflexión), q' siendo la dirección de la radiación entrante y q la de la radiación saliente. Para $a_\lambda(x)$, $r_\lambda(x)$ y $P_\lambda(q',q)$ admitimos que

$$a_\lambda(x) \geq 0, \quad r_\lambda(x) \geq 0, \quad a_\lambda(x) + r_\lambda(x) \leq C < \infty \quad (C : \text{constante}), \tag{6.50}$$

$$P_\lambda(q',q) \geq 0 \quad \forall q', q \in S^2, \qquad \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} P_\lambda(q',q)dq = 1 \quad \forall q' \in S^2. \tag{6.51}$$

Para la temperatura T, en primer lugar consideramos la ecuación estacionaria con una difusión dada por un operador de Laplace, es decir

$$\kappa \Delta T = \nabla \cdot F \qquad (\kappa : \text{constante} > 0), \tag{6.52}$$

donde F está definido por

$$F = (F_1, F_2, F_3), \qquad F_j(x) = \int_0^\infty \int_{S^2} I_\lambda(x,q) q_j dq d\lambda. \tag{6.53}$$

El término $\nabla \cdot F$ representa el efecto térmico de la radiación.
Para formular un problema matemático, ponemos la condición de la entrada de la radiación a través de la frontera $\partial\Omega$ del dominio Ω

$$I_\lambda(x^0,q) = I_\lambda^0(x^0,q), \qquad \text{para } x^0 \in \partial\Omega, \ q \in S^2_-(x^0), \tag{6.54}$$

$$S^2_-(x^0) = \{q \in S^2 \,|\, \exists\varepsilon > 0\,,\, x^0 + \alpha q \in \Omega, \ \forall \alpha \in]0,\varepsilon[\,\},$$

y la condition en la frontera para la temperatura

$$\vec{n} \cdot \nabla T = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega. \tag{6.55}$$

Entonces podemos demostrar el siguiente resultado (véase Messaadia y Fujita Yashima (2012)[12]).

TEOREMA 6.1. *Sea Ω un abierto limitado de $\mathbb{R}^3$ con la frontera regular. Si $a_\lambda(x) \geq 0$ y $r_\lambda(x) \geq 0$ son suficientemente pequeños, entonces el sistema* (6.47)*,* (6.52) *con las condiciones* (6.54)-(6.55) *admite una solución* $(\{I_\lambda\}_{\lambda \in]0,\infty[}, T)$ *en la clase*

$$I_\lambda \in L^\infty(\Omega \times S^2), \quad \forall \lambda \in]0,\infty[, \qquad T \in H^2(\Omega), \quad \inf_{x\in\Omega} T(x) > 0. \tag{6.56}$$

Es útil recordar que la función $B[\lambda, T]$ es muy nolineal. Pero ella posee propiedad de monotonía, lo que nos permite de demostrar la existencia de una solución.

RECEIVED SEPTEMBER, 2012
REVISED NOVEMBER, 2012

REFERENCES

[1] ASCOLI, D. and SELVADURAY, S. (2012): Wellposedness in the lipschitz class for a hyperbolic system arising from a model of the atmosphere including water phase transition Technical Report 6, Quaderno Dip. Mat. Torino.

[2] BELHIRECHE, H., AISSAOUI, M. Z., and YASHIMA, H. F. (2011): Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. **Sciences Technologie Univ. Constantine**, 31:9–17.

[3] BELHIRECHE, H., AISSAOUI, M. Z., and YASHIMA, H. F. (2012): Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute **Quaderno Dip. Mat. Torino**, (5).

[4] FUJITA YASHIMA, H., CAMPANA, V., and M.Z. (2011): Systéme d'équations d'un modéle du mouvement de l'air impliquant la transitionn de phase de l'eau dans l'atmosphére **Ann. Math. Afr.**, 2:66–92.

[5] KIKOINE, A. K. and KIKOINE, I. (1979): **Physique moléculaire (traduit du russe)** Mir, Moscou,.

[6] LANDAU, L. L. and LIFCHITZ, E. M. (1989): **Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6)** Mir, Moscou, (traduit du russe).

[7] LIONS, J.-L., TEMAM, R., and WANG, S. (1992): New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications **Nonlinearity**, 5:237–288.

[8] LIOU, K.-N. (2002): **An introduction to atmospheric radiation** Acad. Press.

[9] MARTCHOUK, G. I. e. a. (1984): **Modelación matemática de las circulaciones generales de la atmosfera y del océano (en ruso)** Gidrometeoizdat, Leningrad.

[10] MATVEEV, L. T. (1965, 1984, 2000): **Physics of the atmosphere** Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg.

[11] MERAD, M., BELHIRECHE, H., and YASHIMA, H. F. Solution stationnaire de l'd́e coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal To appear in Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.

[12] MESSAADIA, N. and YASHIMA, H. F. (2012): Solution stationnaire du système d'équations de la radiation et de la température dans l'air. **Quaderno Dip. Mat. Torino**, 3.

[13] PRODI, F. and BaTTAGLIA, A. (2004): **Meteorología - Parte II, Microfísica** Grafica Pucci, Roma.

[14] SELVADURAY, S. On quasilinear hyperbolic system with some integral operators relative to an atmospheric model on the transition of water defined on the whole space In preparation.

[15] SELVADURAY, S. and YASHIMA, H. F. Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati: gassoso, liquido e solido To appear in Memorie Accad. Sci. Torino.

[16] SHENG, P.-X., MAO, J.-T., LI, J.-G., ZHANG, A.-C., SANG, J.-G., and PAN, N.-X. (2003): **Física de la atmósfera (en chino)** Beijing Daxue Chubanshe (Peking Univ. Press), Pekín.

[17] SOLONNIKOV, V. A. (1976): Sobre el problema a las condiciones iniciales y a la frontera para las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso compresible (en ruso) **Zapiski Nauch. Sem. LOMI**.

[18] VOLOSHTCHUK, V. M. (1984): **Teoría cinética de coagulacón (en ruso)** Gidrometeoizdat, Leningrad.