DISEÑO DE CIRCUNSCRIPCIONES ELECTORALES EN EL ECUADOR

Ramiro Torres[1] y Fernanda Martínez
Escuela Politécnica Nacional
Ladrón de Guevara E11 - 253. Quito, Ecuador

ABSTRACT
The present work aims to design and implement a linear and integer programming model that allows partitioning a region into a given number of territories, according to certain measures of activity. Specifically, the proposed optimization model seeks to divide geographically certain provinces of Ecuador in a fixed number of electoral districts and satisfying the requirements established in the Elections Law of Ecuador, where the territories must be balanced in accordance with populational, and political measures. Moreover, it is required that the dispersion between the basic units within constituted districts is minimized. The computational complexity of the model has been determined and a heuristic method in two phases is exposed. Finally, computational experiments based on real data are reported, where the method obtains results close to the optimum in relatively short times.

KEYWORDS: Political districting problem, integer programming, combinatorial optimization.

MSC:

RESUMEN
El presente trabajo propone diseñar e implementar un modelo de programación lineal y entera que permita particionar una región en un número dado de territorios, respetando ciertas medidas de actividad. Específicamente, el modelo de optimización propuesto busca dividir geográficamente ciertas provincias del Ecuador en un número fijo de distritos electorales cumpliendo los requerimientos establecidos en la Ley Electoral del Ecuador, donde los territorios deben estar balanceados respecto a medidas poblacionales y políticas. Además, es requerido que la dispersión entre las unidades básicas dentro de las circunscripciones formadas sea minimizada. La complejidad computacional del modelo ha sido determinada y un método de solución en dos fases es expuesto. Finalmente, se reportan experimentos computacionales basados en datos reales, donde se obtiene resultados cercanos al óptimo en tiempos relativamente cortos.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de diseño territorial consiste en dividir una región geográfica en un número dado de territorios más pequeños llamados distritos o circunscripciones, de forma que dichos distritos sean factibles u óptimos respecto a ciertos criterios. El problema tratado puede ser aplicado en varios campos, desde la distritalización política, servicios de emergencia, territorios escolares, diseño de territorios para ventas o servicios, etc.
El presente trabajo es motivado por lo estipulado en el artículo 150 de la Ley Orgánica Electoral y de Organizaciones Políticas, Código de la Democracia[2], de la República del Ecuador, que en su parte medular menciona lo siguiente:

> . . . *En las circunscripciones electorales que elijan entre ocho y doce representantes a asambleístas provinciales se subdividirá en dos circunscripciones, aquellas que pasen de trece hasta diez y ocho se subdividirán en tres y las que pasen de diez y ocho lo harán en cuatro circunscripciones; cuando concurran las circunstancias que motiven la subdivisión de circunscripciones electorales, el Consejo Nacional Electoral decidirá su delimitación geográfica garantizando que la diferencia entre asambleístas a elegir en cada nueva circunscripción no sea superior a uno* . . . .

Con este precedente, el Consejo Nacional Electoral (CNE), entidad encargada de llevar adelante los procesos electorales, requiere agrupar los recintos electorales (lugar donde funcionan la mesas receptora del sufragio) en circunscripciones balanceadas con respecto al número de votantes, donde la diferencia entre dos territorios no debe superar los ciento cincuenta mil electores. Además, con el propósito de mejorar la representatividad de las minorías políticas dentro de cada uno de los nuevos territorios electorales, un criterio que equilibra la intención de

[1] ramiro.torres@epn.edu.ec

[2] Ley Orgánica Electoral y de Organizaciones Políticas de la República del Ecuador Código de la Democracia. 2010.

voto sobre las diferentes tendencias políticas ha sido considerado. Claramente cuando nos referimos a las minorías políticas, se hace mención a la posibilidad que los partidos políticos con poca votación en elecciones anteriores puedan acceder a cargos de elección popular. Finalmente, se requiere que los nuevos territorios consideren reglas de contigüidad, compacidad y que se dividan en un número fijo de circunscripciones.
Específicamente, el problema en el que nos enfocamos es el particionamiento de las regiones que eligen la mayor cantidad de asambleístas provinciales en territorios disjuntos, con el objetivo de cumplir propósitos electorales. Así, la provincia del Guayas con 17 asambleístas provinciales debe ser dividida en tres circunscripciones, mientras que las provincias de Manabí eligiendo un total de 8 asambleístas y la provincia de Pichincha que elige un total de 12 asambleístas, deben ser divididas en dos circunscripciones cada una de ellas. El resto de provincias serán consideradas como una circunscripción en sí misma.
En la literatura, el problema de diseño de territorios electorales ha sido ampliamente estudiado, donde una gran cantidad de trabajos junto con una amplia variedad de métodos y formulaciones han sido reportados. En [12] se puede encontrar una amplia exposición de los algoritmos y métodos usados en la solución del presente problema. Métodos de búsqueda local [15, 20], métodos heurísticos [19], modelos multi-objetivo [8, 23], o formulaciones del problema como un modelo cuadrático [24] han sido reportados desde los años sesenta.
En Kalcsics, Nickel and Schöder [16] se reporta una completa revisión de las recientes aplicaciones del problema de diseño de territorios y los métodos usados para resolver este problema. Además, un algoritmo de dos fases fue presentado, donde todos los distritos factibles son generados en la fase 1 y en la fase 2 solo balance poblacional es considerado. George et al. [10] estudiaron al problema de distritalización electoral en Nueva Zelanda mediante el uso de un método iterativo asociado con el sistema de información geográfica (GIS). Una heurística de búsqueda tabú es propuesta por Bozkaya, Erkut y Laporte [3], donde se consideran criterios poblacionales y socio-económicos.
En este artículo nos enfocamos en el diseño de circunscripciones electorales con aplicación al caso ecuatoriano, el cual se encuentra estructurado de la siguiente forma. En la Sección 2 se describe formalmente el problema y se presenta un modelo de programación entera, donde su complejidades determinada. En la Sección 3, aspectos relacionados al método de solución son reportados. Finalmente, los resultados basados en instancias reales son presentados en la Sección 4.

2. MODELO DE PROGRAMACIÓN ENTERA

Desde el punto de vista matemático, el problema de diseño de distritos electorales consiste en encontrar la mejor partición de n unidades básicas en p territorios, tal que la función objetivo minimice la suma de las distancias entre las unidades y los centros de los distritos creados (dispersión), satisfaciendo ciertos criterios demográficos, geográficos y políticos sobre los distritos. En este contexto, los territorios son usualmente llamados distritos electorales o circunscripciones electorales. Hess et al. [14] fue el primero en proponer una formulación basada en programación lineal y entera para modelar este problema.
El problema puede ser modelado como un grafo no dirigido $G = (V, E)$ que representa el territorio a ser particionado, donde un recinto electoral o unidad básica es representada por un nodo $i \in V$, y la arista $\{i, j\}$ existe si el nodo i y el nodo j representan recintos adyacentes. Cada nodo $i \in V$ tiene asociado coordenadas geográficas (x_i, y_i), número de electores ω_i, y la fracción de electores del recinto partidaria de una organización política $\wp_{ik}$, con $k \in K$ y siendo K el conjunto de todos los partidos políticos. La principal relación entre los nodos es la distancia que separa a cada uno de ellos, la cual es expresada mediante la distancia euclidiana $d(i, j),\ \forall\ \{i, j\} \in E$:

$$d(i,j) = \sqrt{((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

donde $i, j \in V\ y\ (x_i, y_i), (x_j, y_j)$son sus coordenadas geográficas, respectivamente. Finalmente, sea p el número de circunscripciones electorales a ser construidas.
Una circunscripción es representada por un subconjunto de nodos $V_l \in V$, tal que $\cup_{l=1}^{p} V_l = V$ y $V_k \cap V_l = \emptyset$, con $k \neq l$, es decir, se debe cumplir que cada nodo debe ser asignado a una sola circunscripción. Además, cada distrito debe estar balanceado respecto al criterio demográfico. Así, cada $V_l, \forall\ l = 1,2, \cdots, p$ deberá disponer:

$$M = \frac{1}{p}\sum_{i \in V} \omega_i$$

electores. Debido a que es imposible obtener un equilibrio perfecto, se incluye un parámetro de tolerancia $\mu \in [0,1]$, que definirá límites superiores e inferiores para el número de electores en cada circunscripción. Como se mencionó en la sección anterior, la diferencia entre el límite superior e inferior debe ser menor a 150 000 electores. Además, para asegurar la participación de las minorías y que tengan las mismas oportunidades que el resto de los

partidos políticos que participan en el proceso electoral, definimos el parámetro $\gamma \in [0,1]$ para equilibrar el número de partidarios de una tendencia política dentro de cada circunscripción.
Se plantea un modelo que minimice la distancia entre las unidades básicas que se encuentren dentro de cada distrito y el nodo central del mismo, usando las variables $x_{ij} = 1$ que indican siel nodo j ha sido asignado a la circunscripción con centro en el nodo i, y $x_{ij} = 0$ otro caso. Porsimplicidad denotamos por $x_{ii} \in \{0,1\}$la variable que indica si el nodo i es el centro de una circunscripción.
El Modelo para la Construcción de Circunscripciones Electorales (MCCE) puede ser escritocomo sigue:

$$\min \sum_{i\in V} \sum_{j\in V} d(i,j) x_{ij} \qquad (1)$$

$$sujeto\ a$$

$$\sum_{j\in V} x_{ij} = 1, \qquad \forall\, i \in V \qquad (2)$$

$$x_{ij} \leq x_{ii}, \qquad \forall i, j \in V \qquad (3)$$

$$\sum_{i\in V} x_{ii} = p, \qquad (4)$$

$$\sum_{j\in V} \omega_j x_{ij} \leq (1+\mu) x_{ii} M, \qquad \forall\, i \in V \qquad (5)$$

$$\sum_{j\in V} \omega_j x_{ij} \geq (1-\mu) x_{ii} M, \qquad \forall\, i \in V \qquad (6)$$

$$\sum_{j\in V} \wp_{jk} x_{ij} \leq \gamma \sum_{j\in V} x_{ij}, \qquad \forall\, i \in V, k \in K \qquad (7)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i, j \in V \qquad (8)$$

La función objetivo (1) trata de minimizar la medida de dispersión de las circunscripciones. La restricción (2) asegura que cada nodo es asignado exactamente a una sola circunscripción. La restricción (3) garantiza que los nodos sean asignados a un centro, si y solo si dicho centro es considerado en la solución. La restricción (4) determina que se construyen exactamente p circunscripciones electorales. Las restricciones (5) y (6) determinan un balance entre la cantidad de electores que conforman cada circunscripción, y (7) asegura varias tendencias políticas dentro de cada circunscripción. Finalmente, la restricción (8) define que las variables usadas sean binarias.
El problema de construcción de circunscripciones electorales MCCE es NP-completo, aun para casos simples, correspondiente a p = 2 y sin considerar tendencias políticas.

Teorema 1 El modelo de diseño de circunscripciones electorales (MCCE) es NP - completo.
Demostración:
Conocemos que el problema de particionamiento [6] es NP - completo. Así, se propone reducir en tiempo polinomial cualquier instancia del problema de particionamiento a una instancia de MCCE. Considere una instancia del problema 2-paticionamiento dado por un conjunto de enteros positivos $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. La tarea del problema es encontrar un conjunto S^* tal que:

$$\sum_{i\in S^*} s_i = \sum_{i\notin S^*} s_i$$

Consideramos un grafo completo no dirigido $G = (V, E)$, donde para cada elemento $s_i \in S$, $i = 1,2,\dots,n$, es asociado un nodo i con un número de electores igual a s_i, es decir, se dispone de un grafo con n nodos y $\omega_i = s_i, \forall i \in V$. La distancia para toda arista $\{i,j\} \in E$ es $d(i,j) = 1$. Además, el número de circunscripciones que deben ser creadas es igual a 2 y definimos los parámetros de tolerancia $\mu = \epsilon / M$, $\epsilon \in [0,1[$, y $\gamma = 1$. Para la construcción de nuestra instancia consideramos un solo partido político, con lo que la restricción (7) es redundante.
Ahora suponemos que S^* es una solución del problema de particionamiento. Una solución de nuestro modelo MCCE puede ser obtenida tomando los nodos asociados a los elementos del conjunto S^* para construir la primera circunscripción, y los nodos que no pertenecen a dicho conjunto para la segunda. Así, cada distrito dispone de un

número igual de electores definidos por $\sum_{i\in S^*} \omega_i$lo cual es una solución factible para nuestro modelo MCCE con costo $|V| - 2$.
Por otro lado, considere una solución factible de nuestro modelo MCCE con costo mayor o iguala $|V| - 2$. Por el parámetro p se tiene que la solución selecciona exactamente 2 nodos, identificando los centros de los distritos creados. Estos centros se encuentran enlazados con los restantes $n - 2$ nodos mediante un solo arco, indicando si dicho nodo pertenece al distrito C_1 o al distrito C_2. Esto produce un costo de nuestra solución factible igual a $|V| - 2$. Ahora, por el valor asignado al parámetro μ, se tiene que:

$$(M - \epsilon) \leq \sum_{j\in C_i} \omega_j x_{ij} \leq (M + \epsilon), \quad \forall i = 1,2,$$

y debido a que $\omega_j \in \mathbb{Z}^+, \forall j \in V$, se cumple que las 2 circunscripciones están balanceadas perfectamente respecto al número de electores, revelando de este modo una solución factible para el problema de particionamiento. Por lo tanto MCCE es NP - completo. ■
Debido al resultado anterior, la existencia de un algoritmo polinomial para encontrar la solución óptima del modelo MCCE es remota. Por tal motivo, un método que permitan obtener buenas aproximaciones en un tiempo razonable de la solución del problema distritalización territorial es el principal objetivo de la siguiente sección. En [2, 22, 11] se puede encontrar una revisión completa de meta heurísticas usadas en muchos trabajos reciente para enfrentar este problemas (búsqueda tabú, búsqueda local, recocido simulado, entre otras).
En nuestro caso, una técnica de descomposición en dos fases independientes, una fase de localización y una fase de asignación, ha sido seleccionada. Esto debido a que el modelo MCCE puede ser visto como un problema de p-centros con múltiples restricciones de balance (5),(6), y (7). El esquema de solución es similar al reportado por Kalcsics, Nikel, y Schröder [16].

3. RESOLVIENDO EL MODELO MCCE

El algoritmo propuesto consta de dos fases. La primera es la fase de localización, en la que se seleccionan los centros de las circunscripciones y la segunda fase es la de asignación, la que se encarga de asignar cada nodo a su respectivo centro. Las fases son ejecutadas en cascada iterativamente hasta obtener resultados satisfactorios.

3.1. Fase de localización de centros

En esta sección presentamos en detalle algunas aproximaciones consideradas para la construcción de soluciones factibles para la fase de localización de centros. Cabe mencionar que en esta fase no se consideran los criterios de balance de territorios, tanto poblacionales como políticos, mencionados anteriormente. Los centros para las circunscripciones a ser creadas son aquellos p nodos que minimizan la máxima distancia a todos los nodos dentro de los territorios. Observe que la selección de los centros es un factor importante en la división correcta de los territorios, ya que una mala elección del centro produce un alto impacto en la solución del problema.
Así, el problema a resolver en esta fase es el denominado p-centros. El problema consiste en determinar p nodos (centros) de un grafo, tal que se minimice la distancia total a los otros nodos del grafo a su centro más cercano. Se conoce que dicho problema es NP-duro [17], con numerosas aplicaciones en el problema de clasificación (clustering), entre otros [4, 13, 21].
Un punto de partida para obtener una configuración inicial de los centros es usar el algoritmo k-medias. El método de k-medias es un algoritmo de búsqueda local originalmente propuesto por Forgy [9] y MacQueen [18], cuyo objetivo es particionar n nodos (puntos) en k grupos bajo la siguiente estructura: se inicia con k nodos los que son establecidos como centros de cada conglomerado, se asigna los nodos restantes a su centro más cercano, y luego se re-calcula los nuevos centros con los nodos asignados. Este proceso de asignación de nodos y reajuste de centros se repite hasta que el método se estabiliza, es decir, los centros no sufren cambios.
Note que con este algoritmo los centros no han sido ubicados sobre nodos del grafo, por lo que la distancia del centro de gravedad a todos los nodos dentro de cada circunscripción es calculada y los nodos más cercanos a cada centro son reasignados como los centros de cada una de las p circunscripciones.
Una segunda aproximación para la determinación de la configuración de los centros de los territorios es usar el algoritmo de Cooper [7], el cual es un proceso iterativo que satisface la estructura de nuestro problema. Este método inicia escogiendo una posición inicial para cada centro de las p circunscripciones, y reasigna los nodos a los centros mientras la localización de los centros varia.
Tanto el algoritmo k-medias como el método de Cooper necesitan recibir como datos de entrada p nodos para ser considerados como centros iníciales. Para ello algunas variantes han sido probadas:

- *Criterio 1:* Escoger como centros los p nodos con mayor cantidad de electores.

- *Criterio 2*: Seleccionar la posición de los centros aleatoriamente, donde la probabilidad de que un nodo $i \in V$ sea seleccionado como centro es proporcional a su peso w_i.
- *Criterio 3*: Modificar el proceso anterior, el cual puede ser esquematizada de la siguiente forma:

---

1) Seleccionar un nodo $i \in V$ y asignarlo como el centro c_1 de la primera circunscripción.
2) Asignar todos los nodos a esta única circunscripción y actualizar sus medidas de dispersión.
3) Para $l = 2, \ldots p$ hacer
   a) Determinar el nodo más lejano a los centros y ubicarlo como centro c_l de la circunscripción l
   b) Reasignar los nodos $i \in V$ a las circunscripciones con centros $1,2, \ldots, l$

La variante del criterio 3 produce circunscripciones relativamente buenas, pero su tiempo de cálculo es alto. Note que para cada uno de los p centros, los restantes $n - p$ nodos tienen que ser asignados a una nueva circunscripción. Esto implica que el procedimiento propuesto opera en un tiempo $O(pn^2)$.

3.2. Fase de Asignación

En esta fase se conoce la localización de los centros de las circunscripciones, con lo que el problema de asignación de unidades básicas a centros de territorios debe ser formulado.

Para resolver este problema, un modelo de programación lineal derivado del modelo MCCE es propuesto. Dado que en esta fase se conoce los centros, las variables x_{ii} en el nuevo modelo ya no son necesarias y las restricciones (3) y (4) pueden ser eliminadas. Sin embargo, se mantiene el objetivo de minimizar la suma de las distancias entre los nodos y los centros. Además, el modelo de asignación conserva las restricciones de balance, compacidad y contigüidad de los territorios.

Sea C el conjunto de los p nodos determinados como centros de los distritos. Denotamos la variable de decisión $x_{cj} = 1$ indicando si el nodo $j \in V \setminus C$ es asignado a la circunscripción concentro $c \in C$, y $x_{cj} = 0$ otro caso. Usando los parámetros definidos anteriormente, el Modelo Reducido para la Construcción de Circunscripciones Electorales (MRCCE) puede ser formulado de la siguiente forma:

$$\min \sum_{c \in C} \sum_{j \in V \setminus C} d(c,j) x_{cj}$$

$$sujeto\ a$$

$$\sum_{j \in V \setminus C} x_{cj} = 1 , \qquad \forall\, c \in C$$

$$\omega_c + \sum_{j \in V \setminus C} \omega_j x_{cj} \le (1+\mu) M , \qquad \forall\, c \in C$$

$$\omega_c + \sum_{j \in V \setminus C} \omega_j x_{cj} \ge (1-\mu) M , \qquad \forall\, c \in C$$

$$\wp_{ck} + \sum_{j \in V \setminus C} \wp_{jk} x_{cj} \le \gamma \sum_{j \in V \setminus C} x_{cj} , \qquad \forall\, c \in C, k \in K$$

$$x_{cj} \in \{0,1\}, \qquad \forall c \in C, j \in V \setminus C$$

El tamaño del modelo MRCCE depende de |C|, que para nuestro caso genera un número reducido de restricciones y puede ser resuelto eficientemente mediante un solver de programación lineal y entera (SCIP).

3.3. Algoritmo

En la presente sección, las fases presentadas anteriormente son integradas en un algoritmo que permite obtener soluciones factibles del problema de distritalización electoral. Como se mencionó anteriormente, este trabajo adapta la aproximación propuesta en [16] al caso ecuatoriano.
El método de solución considerado es un proceso iterativo en donde en cada iteración se resuelve la fase de localización de centros y la fase de asignación en cascada. Cuando una configuración de centros es encontrada $C \subset V$ con los criterios de la fase 1, la fase 2 se centra en asignar los nodos restantes $V \setminus C$ en alguno de los $p = |C|$ centros. Si el valor de la dispersión de la nueva solución es menor a las anteriormente generadas, esta es almacenada y se continua con una nueva iteración. El algoritmo siguiente muestra la implementación del mismo expresado en pseudo-código. El algoritmo toma como entrada el número de iteraciones y el número de distritos a ser construidos, retornando como solución la partición de menor dispersión encontrada P^{best}

Entrada: N:= Número de iteraciones, p:= número de grupos
Salida: Un particionamiento factible P^{best}

1. $P^{best} = \emptyset$
2. $f_{obj}(P^{best}) = +\infty$
3. $for\ i = 1\ to\ N\ do$
    - Generar $C \in V$ usando la fase de localización de centros.
    - Resolver el modelo (MRCCE) de la fase de asignación y obtener una partición factible P
    - if ($f_{obj}(P) < f_{obj}(P^{best})$) then
        - P^{best} =P
    - end if

   end for
4. **Retornar** P^{best}

---

donde $f_{obj}(P)$es el valor de la función objetivo de MRCCE al producir la partición factible P.

4. EXPERIMENTACIÓN

En la presente sección se reportan los experimentos computacionales realizados con instancias del mundo real proporcionadas por el Consejo Nacional Electoral. Los modelos de programación entera fueron resueltos usando SCIP V 2.0.1 [1] y SoPlex como el correspondiente LP-solver [25].Todos los experimentos fueron ejecutados en una PC Intel Core i5-2300 y 4GB RAM bajo el sistema operativo Ubuntu 11,10.
El análisis se realizó para ocho provincias del Ecuador: Azuay, Bolívar, Carchi, Cañar, Chimborazo, Manabí, Pichincha y Guayas. De acuerdo a lo estipulado en la ley, las provincias de Manabí y Pichincha deben ser divididas en 2 distritos, mientras que la provincia del Guayas será dividida en 3 distritos. Por motivos experimentales se plantea la creación de una circunscripción por cada asambleísta a ser elegido en el resto de provincias. En la Tabla 1, algunos datos sobre las regiones es analizadas son mostrados: cantidad de parroquias, cantidad de unidades básicas (recintos), número de asambleístas a elegirse y el número de distritos.
El personal del Consejo Nacional Electoral proporcionó información de la cantidad de electores y tendencias políticas por cada recinto electoral. Para la obtención de las tendencias políticas se realizó el análisis con los resultados obtenidos en las elecciones generales del año 2009, en la que se consiguió el porcentaje de votos obtenidos por cada organización política. En el caso de alianzas se dividió la votación en partes iguales para cada partido político, teniendo así la participación de 97 partidos políticos en total. Para el análisis se excluyeron los datos de votos blancos y nulos que indican que el elector no tiene apego a ninguna tendencia política.
En la formación de las circunscripciones electorales, por cuestiones geográficas y logísticas del Consejo Nacional Electoral, se considera importante el factor de la no división de las parroquias. Así, se tomó en cuenta dos tipos de instancias como son: parroquias y recintos como unidades básicas para la formación de circunscripciones electorales. Además, debido a la alta volatilidad electoral en el Ecuador y para evitar manipulaciones políticas, el criterio de equidad en la intención de voto ha sido considerado como alternativo. Por tanto, los modelos MCCE y MRCCE fueron resueltos considerando 2 versiones adicionales: una que considera la inclusión de la restricción de tendencias políticas (con tendencias) y la segunda eliminando la restricción del criterio político (sin tendencias).
Se tomará ±5% como parámetro de paridad para definir el límite inferior y el límite superior dela cantidad de electores que se encuentran en cada circunscripción. Además, el personal del CNE considera como aceptable la existencia de al menos 3 tendencias políticas en cada circunscripción. Así, para la realización de nuestros experimentos computacionales bajo la presencia de tendencias políticas se ha considerado como válida $\gamma = 0{,}4$.

El modelo MCCE con los datos de las provincias con pocas unidades básicas fue resuelto hasta la optimalidad en pocos segundos, mientras que para las provincias de Azuay, Manabí, Pichincha y Guayas, el tiempo de cálculo se incrementó notablemente. SCIP resolvió todas las instancias hasta la optimalidad en un tiempo promedio de 1353.54 segundos.

Provincia	**Parroquias**	**#Recintos**	**#Asambleístas**	**# Circunscripciones**
Bolívar	29	67	3	3
Carchi	35	54	3	3
Cañar	36	96	3	3
Chimborazo	61	124	4	4
Guayas	73	270	17	3
Pichincha	82	232	12	2
Azuay	89	182	5	5
Manabí	91	174	8	2

Tabla 1: Datos por provincia

Para las principales instancias, en la Tabla 2 se muestran los resultados obtenidos con los métodos de solución expuestos en la sección anterior. En primer lugar, el tiempo tomado por SCIP al obtener la solución óptima del modelo MCCE aparece en la primera columna. Además, resultados asociados al modelo MRCCE considerando los distintos algoritmos de generación de centros (la calidad de las soluciones encontradas en porcentaje, tiempos de cálculo en segundos) son presentados. Además, resultados relacionados a instancias considerando datos sobre tendencias políticas aparecen en la Tabla 3.
Finalmente, en las Figuras 1-2 se muestran las descomposiciones territoriales de algunas provincias del Ecuador. Los puntos dentro de cada provincia representan las parroquias, y las que se encuentran pintadas del mismo color representan las unidades básicas dentro de cada circunscripción.

5. OBSERVACIONES FINALES

En este trabajo, una aplicación real motivada por la Ley Electoral del Ecuador es reportada. Se propone particionar geográficamente varias regiones del país en un número fijo de distritos electorales satisfaciendo criterios como: compacidad, equilibrio poblacional entre los territorios, contigüidad y conectividad. En particular, un modelo de programación lineal que permita resolver este problema ha sido reportado. El modelo es NP-completo por lo que un método de solución es dos fases es expuesto. El método inicia seleccionado un número fijo de unidades básicas como centros o semillas para los distritos y se asigna los nodos restantes a su centro más cercano mediante un modelo de asignación derivado del modelo inicial. Todos los requerimientos para el desarrollo dela heurística son procesos básicos y fáciles de implementar.

Instancia		MCCE t(seg)	MRCCE					
			k-medias		Cooper		Algoritmo 1	
			gap(%)	t(seg)	gap(%)	t(seg)	gap(%)	t(seg)
Azuay	Recintos	3331.34	30.98	0.56	31.09	0.95	94.88	0.21
	Parroquias	116.77	8.82	0.25	7.14	0.18	19.82	0.19
Bolívar	Recintos	53,06	9.16	0.02	9.16	0.03	18.97	0.01
	Parroquias	0.58	3.23	0.00	3.23	0.00	12.29	0.01
Guayas	Recintos	3864.9	43.38	0.08	19.44	0.15	106.07	0.15
	Parroquias	11.02	3.62	0.03	3.77	0.07	26.87	0.04
Manabí	Recintos	85.45	9.14	0.00	9.14	0.02	5.55	0.01
	Parroquias	9.18	4.91	0.00	4.91	0.01	4.91	0.01
Pichincha	Recintos	126.64	32.91	0.03	25.66	0.00	95.64	0.06
	Parroquias	5.17	2.87	0.02	3.54	0.02	18.2	0.01

Tabla 2: Comparación del modelo MCCE y el método heurístico con diferentes criterios para la determinación de los centros. Instancias sin tendencias políticas son reportadas. Tanto la brecha de optimalidad como el tiempo de ejecución son reportadas.

Basados en datos reales, instancias con 270 nodos producen problemas enteros con cerca de 81.000 variables binarias y 73.000 restricciones. Los resultados obtenidos con el modelo de programación entera y los resultados obtenidos con el método heurístico fueron comparados. Se observa un buen comportamiento del algoritmo al proporcionar soluciones cercanas al óptimo generando significativas reducciones en el tiempo de cálculo.

Instancia		Gap (%)	Tiempo de corrida	
			MCCE(seg)	MRCCE(seg)
Azuay	Recintos	2.84	2118.87	0.73
	Parroquias	16.39	28854.40	0.56
Bolívar	Recintos	7.82	59.27	0.03
	Parroquias	8.68	25.92	0.17
Guayas	Recintos	18.57	10040.80	0.13
	Parroquias	11.52	165.41	1.14
Manabí	Recintos	10.47	702.45	0.03
	Parroquias	15.63	47.9	0.02
Pichincha	Recintos	9.99	733.46	0.07
	Parroquias	5.93	41.55	0.01

Tabla 3: Resultados del modelo MCCE y el método heurístico usando k-medias donde se incluyen tendencias políticas.

Finalmente, debido a la complejidad del problema muchas instancias no fueron resueltas hasta la optimalidad, derivando de este modo futuros temas de investigación sobre el estudio de métodos exactos para el problema de particionamiento de grafos

Figura 1: Mapa de distritalización electorales de algunas provincias del Ecuador. Parroquias como unidades básicas y ausencias de tendencias políticas son representadas.

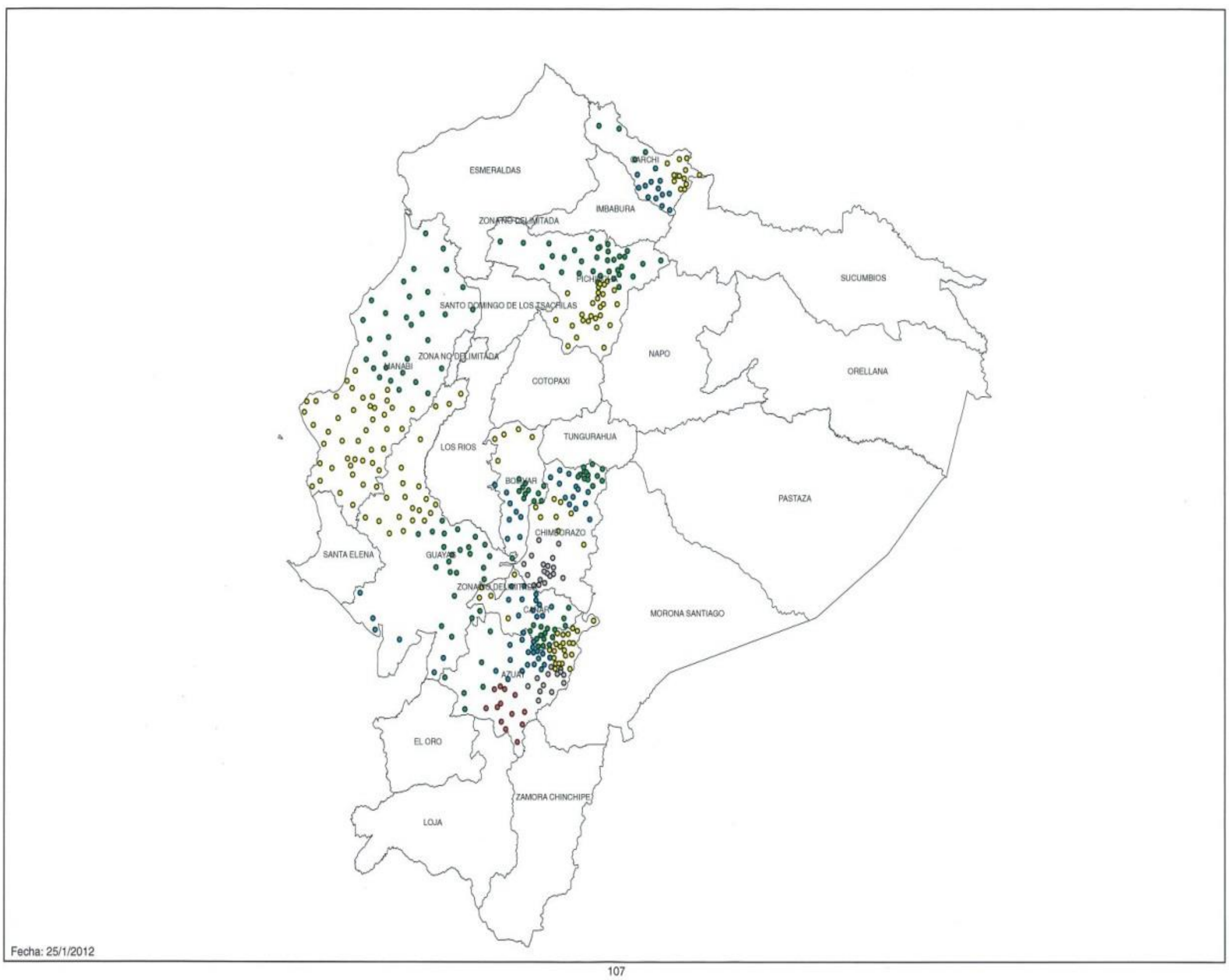
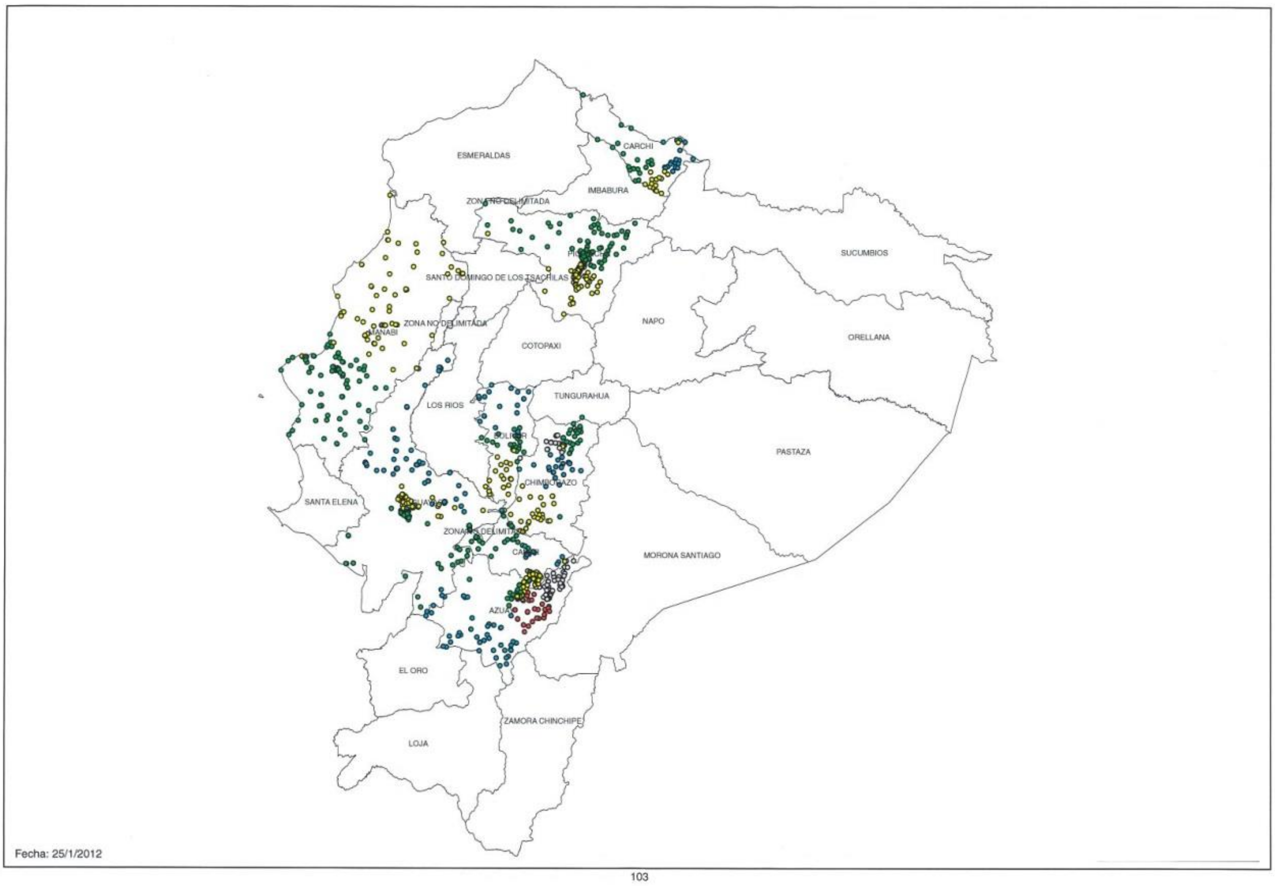


Figura 2: Mapa de distritalización electorales de algunas provincias del Ecuador. Recintos electorales e inclusión de tendencias políticas son consideradas.



RECEIVED NOVEMBER 2012
REVISED SEPTEMBER 2013

REFERENCIAS

[1] Achterberg, T. (2007): Constraint integer programming. Ph.D. Thesis, TU Berlin.

[2] Blum, C., Roli, A. (2003): Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison. 35. ACM Computing Surveys. pp. 268-308

[3] Bozkaya, B., Erkut, E., y Laporte, G.(2003): A tabu search heuristic and adaptive memory procedure for political districting. European Journal of Operational Research 144, 12-26.

[4] Bradley, P.S., Mangasarian, O.L. (1998): Feature selection via concave minimization and support vector machines. In J. Shavlik, ed., Machine Learning Proceedings of the Fifteenth International Conference (ICML 98), San Francisco, California, 82-90.

[5] Chou, C.,Li, S.(2006): Taming the Gerrymander Statistical physics approach to Political Districting Problem. Physica A, 369, 799-808.

[6] Papadimitriou,C., Steiglitz, K.(1983):Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity, Prentice - Hall, New Jersey.

[7] Cooper, L.(1963): Location-allocation problems, Operational Research 11, 331-343.

[8] Deckro, R. F. (1979): Multiple objective districting: a general heuristic approach using multiple criteria. Operational Research Quarterly, 28, 953-961.

[9] Forgy, E.W. (1965): Cluster analysis of multivariate data: efficiency versus interpretability of classifications. In: Biometric Society Meeting, Riverside, California. Abstract in Biometrics, vol. 21, p. 768.

[10] George,J.A., Lamar,B.W., y Wallace,C.A.(1993): Determining New Zealand electoral dBlum, C.; Roli, A. (2003). Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison. 35. ACM Computing Surveys. pp. 268-308 istricts using a network-based model. Proceedings of the Operational Research Society of New Zealand 29, 276-283.

[11] Glover, F., Kochenberger, G.A. (2003):. Handbook of metaheuristics. 57. Springer, International Series in Operations Research & Management Science. ISBN 978-1- 4020-7263-5
[12] Grilli di Cortona,P., Manzi,C., Pennisi,A., Ricca, F., y Simeone,B.(1999): Evaluation and optimization of electoral systems. SIAM Monographs in Discrete Mathematics, SIAM, Philadelphia.
[13] Hansen, P., Jaumard, B. (1997): Cluster Analysis and Mathematical Programming. Mathematical Programming 79, 191-215.
[14] Hess, S., Weaver,J., Siegfeldt,H., Whelan,J., y Zitlau,P.(1965): Nonpartisan political redistricting by computer. Operations Research, 13:998-1008.
[15] Kaiser, H. (1966): An objective method for establishing legislative districts. Midwest Journal of Political Science ;X:200-213
[16] Kalcsics J., Nikel S.,ySchröder M. (2005): Towards a united territorial design approach: applications, algorithms and GIS integration. TOP: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research, 13, pp. 1 - 56.
[17] Kariv, O., Hakimi, L. (1979): An algorithmic approach to network location problems. II: the p-medians. SIAM Journal of Applied Mathematics, 37 (3), 539-560.
[18] MacQueen, J.B. (1967): Some methods for classification and analysis of multivariate observations. In Proceedings of the 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, vol. 1, pp. 281 – 297.
[19] Mehrotra, A., Johnson,E.L. y Nemhauser G. L. (1998): An optimization based heuristic for political districting. Management Science, 44, 1100-1114.
[20] Nagel, S. (1965): Simplified bipartisan computer redistricting. Stanford Law Review, 17 863-899.
[21] Eric D. Taillard.(2003): Heuristic Methods for Large Centroid Clustering Problems. Journal of Heuristics, 9: 51-73.
[22] Talbi, E-G. (2009). Metaheuristics: from design to implementation. Wiley. ISBN 0-470- 27858-7.
[23] Tavares-Pereira, F., Rui Figueira, J., Mousseau V., y Roy, B. (2007): The public transportation network pricing system of the Paris region. Ann Oper Res 154: 69-92.
[24] Zhenping Li, Rui-Sheng Wang,y Yong Wang. (2007): A Quadratic Programming Model for Political Districting Problem. Lecture Notes in Operations Research 7. Optimization and Systems Biology, 427-435, (ISTP) 2007.
[25] Wunderling, R. (1996): Paralleler und objektorientierter Simplex Algorithmus. Ph.D. Thesis, TechnischeUniversität Berlin. Available at: http://www.zib.de/Publications/abstracts/TR-96-09/.