

DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UN ALGORITMO TRAZADOR DE RAYOS PARA CELDAS UNIFORMES EN UN DOMINIO CIRCULAR PARA TOMOGRAFÍA SÍSMICA 2D

Armando Luis Imhof^{1*} y Carlos Adolfo Calvo^{**2}

*Instituto Geofísico Sismológico Volponi.

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Universidad Nacional de San Juan - UNSJ

**Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de San Juan - UNSJ

ABSTRACT

To be able to resolve tomographic inversion problems in travel time, it is necessary the construction of distance matrices containing information of survey array geometry, the discretized domain shape and the distance traveled by rays in each area elements that compose it. Domain considered are generally rectangular for ease of geometric resolution. In this work is circular due to the need to carry out investigation in columns of this shape.

Distance matrices are used to solve the linear system, which leads to the determination of velocity values in each element of the domain. Taking in mind discretization, there are several possibilities for the construction of arrays of pixels: may those be defined in one quadrant and obtaining the rest by symmetry; build arrays using any size pixels independent of the quadrant, and finally construct distance matrices with square pixels. Each option will provide access to new research possibilities.

In this work an original procedure was developed for the construction of matrices with elements of the last type.

The procedure was validated with simulated data using the damped least squares solution (DLSS) method, which demonstrated the efficiency of the algorithm.

KEYWORDS: Ray Tracer; Inversion; Distance Matrices; Seismic Tomography; Circular Domain; Square Pixels

MSC: 65D17

RESUMEN

Para resolver problemas de inversión tomográfica en tiempo de viaje por métodos matriciales, es preciso construir matrices de distancias que contienen la información de la geometría del dispositivo, de la forma del dominio discretizado y la distancia que recorren los rayos en este en cada uno de sus elementos de área componentes. Los dominios considerados por lo general son rectangulares por la facilidad de resolución geométrica. En el caso de este trabajo es circular por la necesidad de tomografiar columnas.

Las matrices de distancias se emplean para resolver el sistema lineal, que lleva a la determinación de los valores de velocidad en cada uno de los elementos del dominio. Teniendo en cuenta la discretización, existen varias posibilidades en cuanto a la construcción de las matrices de píxeles, pudiéndose definir los mismos en un cuadrante con valores arbitrarios y, por simetría, obtener los restantes en los demás. Otra opción es independizarse del cuadrante y generar cualquier disposición y tamaño individual de los mismos; y por último construir matrices con píxeles cuadrados. Cada una de las opciones permitirá acceder a nuevas posibilidades de investigación.

En este trabajo se desarrolló un procedimiento original para la construcción de matrices con elementos del último tipo.

El procedimiento se validó con datos simulados utilizando el método de mínimos cuadrados amortiguados (DLSS), lo que demostró la eficiencia del algoritmo.

1. INTRODUCCIÓN

En medios homogéneos e isotrópicos, se considera que la generación de ondas sísmicas por medios tales como golpes de martillo, explosiones ó cristales piezoeléctricos (emisores) y registrados en sismógrafos de varios canales (receptores), forman frentes de ondas esféricos cuyos gradientes son rectas, por lo que se puede utilizar la teoría de rayos rectos (*straight-ray theory*) y considerar que las emisiones ocurren de esta forma, siempre que la longitud de onda de la señal sea mucho mayor que el tamaño de las partículas que componen el medio investigado [1]. El tiempo de viaje de los primeros arribos de estos rayos resulta una característica factible de determinar, y la alteración de este tiempo es un indicador de la presencia de anomalías. El planteo general de la tomografía es modelar (determinar forma y ubicación) dicha anomalía. Algunos de los planteos generales de solución discretizan el dominio en pequeñas celdas rectangulares (píxeles) planteando las ecuaciones de tiempo

¹ aimhof@unsj.edu.ar

² ccalvo@unsj.edu.ar

de viaje recorridos por los rayos, siendo las incógnitas la velocidad en cada píxel. Se llega a un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{M} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{t}$, donde \mathbf{t} es el vector de tiempos medidos experimentalmente, \mathbf{M} la matriz de distancias y \mathbf{s} el vector de lentitudes (inversa de las velocidades).

El objetivo de este trabajo es construir un algoritmo para generar matrices de distancia utilizando distribuciones de pixeles cuadrados del mismo tamaño para dominios circulares.

2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

La Figura 1 representa una sección circular de una columna cilíndrica. Para poder tomografiar esta sección a fin de localizar fisuras u otras anomalías, la misma se discretiza con líneas verticales y horizontales que forman celdas (pixeles) cuadrados, excepto en el borde. Sobre el mismo se colocan los emisores (e_i) y los receptores (r_j) en forma libre, cuyos rayos intersecarán los elementos de la grilla formando trazos en las celdas interceptadas que constituyen los elementos de la *matriz de distancia* $\mathbf{M} = \{d_{kc}\}$. A cada fila de la matriz le corresponde un rayo k . Y a cada columna le corresponde una celda c . En su camino el rayo k al atravesar la celda c recorre una distancia d_{kc} constituyendo este un elemento de la matriz \mathbf{M} . Para aquellas celdas en que el rayo no las toca $d_{kc} = 0$.

Los datos del problema son los parámetros de la grilla (coordenadas x e y) y la ubicación de los emisores y receptores.

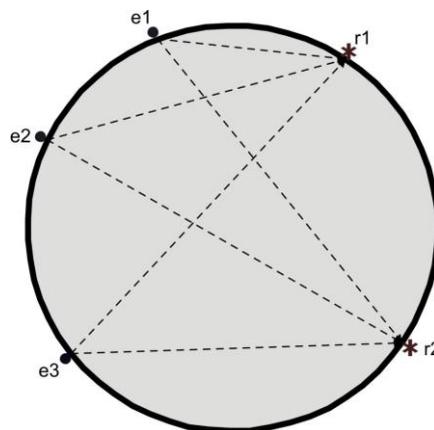


Figura 1. Dominio circular con 3 emisores ($e1$, $e2$ y $e3$), 2 receptores ($r1$ y $r2$) y 6 rayos rectos.

3. GENERACIÓN DE LA MATRIZ DE DISTANCIAS M

3.1 Construcción de la grilla N

Para la construcción de la grilla los datos son el radio del dominio R y el número N de elementos en una dirección, que permite construir el paso $h = R/N$. Se toma el centro del círculo como origen de coordenadas (x,y). Se introducen 2 vectores: el vector de abscisas $\mathbf{x}_g = [-R, x_1, x_2, x_3, \dots, R]$ y el vector de ordenadas $\mathbf{y}_g = [-R, y_1, y_2, y_3, \dots, R]$, ambos con $2N+1$ divisiones. (Figura 2).

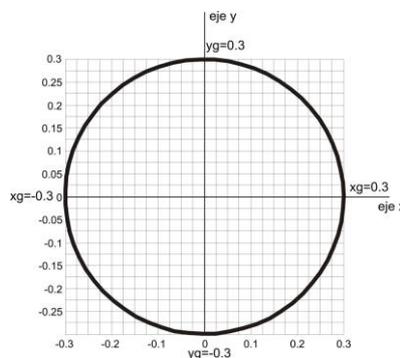


Figura 2. Grilla cuadrada con dominio circular inscrito en ella. Se utilizó $R=0.3\text{m}$; $N=12$; $h=R/N=0.025$; $\mathbf{x}_g = [-0.3 \ -0.275 \ -0.25 \ -0.225 \ -0.2 \ -0.175 \ -0.15 \ -0.125 \ -0.1 \ -0.075 \ -0.05 \ -0.025 \ 0 \ 0.025 \ 0.05 \ 0.075 \ 0.1 \ 0.125 \ 0.15 \ 0.175 \ 0.2 \ 0.225 \ 0.25 \ 0.275 \ 0.3]\text{m}$; $\mathbf{y}_g = \mathbf{x}_g$. En línea continua delimitada la grilla completa con 484 pixeles del total de $24 \times 24 = 576$.

La grilla se construye con líneas horizontales de ordenadas y_g y líneas verticales de abscisas x_g . Resultando celdas cuadradas de lados h que forman una grilla simétrica respecto de los ejes coordenados.

3.2 Numeración de la grilla

Sólo se numeran las celdas interiores o sobre el borde del dominio circular, por fila desde arriba hacia abajo y desde izquierda a derecha ($c=1,2,3,\dots,nc$). (Figura 3).

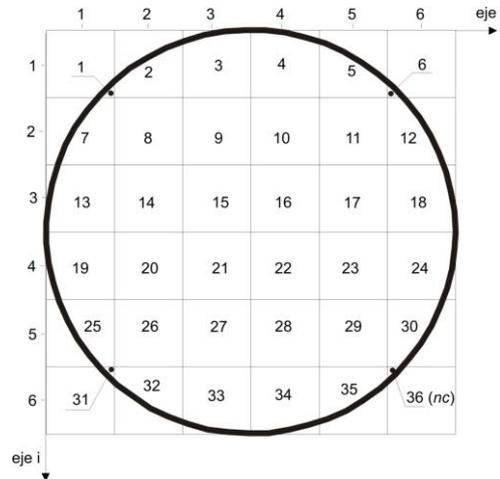


Figura 3. Grillado $N=3$ con celdas numeradas de 1 a 36. Los pares (i,j) ubican las celdas con 2 coordenadas.

Es importante determinar el número de la celda c en función de la ubicación para relacionarla con las trayectorias de los rayos (y poder luego reconstruir el tomograma). Para ello se introduce los ejes (i,j) que ubican filas y columnas de la grilla. El origen de este sistema está en la esquina superior izquierda siguiendo la notación habitual de los índices de las matrices en matlab.

3.3 Relación entre los sistemas $c=f(i,j)$ y número de celdas

Esta relación se establece a través de la construcción (en el algoritmo trazador), de una matriz **Indice** de $2N$ filas y 2 columnas; en ella el número de cada fila corresponde al número de la celda c siendo sus elementos $[i,j]$. Para construir **Indice** se divide el dominio en 2 semicírculos.

Para el superior ($i \leq N$) y para cada fila i se hallan los índices extremos jp y jf correspondientes a la primera y última celda de la grilla.

La fila i determina la línea horizontal de ordenada $Y_i = R - i \cdot h$ y ésta corta a la circunferencia en los puntos de abscisas extremas A y B de valores $X_i = \pm \sqrt{R^2 - Y_i^2}$. Resulta entonces: jp el máximo número de abscisas de x_g que no supera el valor $x_A = -\sqrt{R^2 - Y_i^2}$; jf se calcula por simetría del eje y ($jp+jf=2N+1$).

En notación de MatLab:

$$jp = \max(\text{find}(x_g \leq -X_i)); jf = 2 * N + 1 - jp \quad (1)$$

Donde la función `find(...)` da los índices del vector x_g que cumplan la condición dada dentro del paréntesis.

En cada fila el número de celdas es $jf - jp + 1 = 2(N + 1 - jp(i))$, sumando para las N filas del semicírculo y duplicando para el inferior se obtiene el número total de celdas de la grilla circular:

$$nc = \sum_{i=1}^N 4(N + 1 - jp(i)) \quad (2)$$

3.4 Construcción de la matriz de índices

El siguiente algoritmo en código MatLab permite la construcción de la matriz de índices:

```
c=0; Indice=zeros(nc/2,2)
for i=1:N, for j=jp:2N+1-jp
c = c+1; Indice(c,:)= [i j];
```


$$\begin{aligned}
X &= [x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, x_{p+1}] \\
Y &= aX + b \\
Y &= [y_1, y_2, y_3, \dots, y_p, y_{p+1}]
\end{aligned}
\tag{5}$$

Siendo p el número de celdas atravesadas por el rayo k .

Los puntos $P_1, P_2, \dots, P_p, P_{p+1}$ determinan las distancias d_{kc} y puntos $P_{mc}(x_{mc}, y_{mc})$ interiores en cada celda, que permiten conocer (i, j) y posteriormente el número c de ésta.

$$\begin{aligned}
d_{kc} &= \sqrt{(x_{c+1} - x_c)^2 + (y_{c+1} - y_c)^2} \\
x_{mc} &= \left(\frac{x_{c+1} + x_c}{2} \right) \\
y_{mc} &= \left(\frac{y_{c+1} + y_c}{2} \right) \\
i &= \max(\text{find}(X_g < x_{mc})) \\
j &= \max(\text{find}(Y_g < y_{mc}))
\end{aligned}$$

Donde la función de MatLab $\text{find}()$ calcula los índices del vector X_g (o Y_g) que cumplan la condición entre paréntesis. Luego, mediante el empleo de la matriz de **Índices** se determina c

3.6. Formación de la Matriz de distancia

La matriz $\mathbf{M} = \{d_{k,c}\}$ tiene tantas filas ($n.m$) como número de rayos y tantas columnas como número de pixeles (nc).

Al sumar por filas:

$$\sum_{c=1}^{c=nc} d_{k,c} = D_k = d_{i,j} ; k = (i - 1)m + j$$

Se determina la distancia D_k que recorre el rayo k entre el emisor i y el receptor j a través de todas las celdas, siendo $d_{k,c} = 0$ para aquellas en que el rayo no las toca.

El proceso de construcción de la matriz \mathbf{M} se realiza por filas (o sea fijando el rayo k). Se calcula la pendiente a y la ordenada b ; se realiza la intersección (X, Y) con la grilla, se hallan los valores d_k , los puntos interiores $P_{mc}(x_{mc}, y_{mc})$ a la celda interceptada y con éstos se determinan los valores c con los cuales se redesigna $d_{k,c}$. Se completa con $d_{k,c} = 0$ para aquellas en que el rayo no las toca. Luego se repite para los demás rayos.

4. VALIDACIÓN DEL ALGORITMO

4.1 Modelo para Inversión por Tomografía.

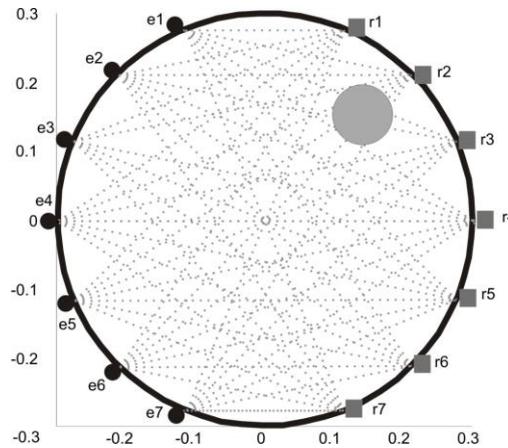


Figura 5. Geometría del modelo. Tambor cilíndrico de radio $R=0.3m$.; e_i : emisores; r_j : receptores. $x_{anom} = 0.15m$.; $y_{anom} = 0.15m$.; $r_{anom} = 0.05m$.; $V_{base}=1400m/s$; $V_{anom} = 3500m/s$

Se diseñó un experimento equivalente a uno real, construyendo una planilla de tiempos de primeros arribos a partir de la geometría descrita (Figura 5), ubicando sensores distribuidos a lo largo del contorno circular de un tanque lleno con agua ($V_{base}=1400m/s$) en cuyo interior se encontraba una anomalía cilíndrica de concreto ($V_{anom}=3500m/s$) según la descripción. La disposición de los sensores es considera normal al eje del tanque y ubicados en su sector medio. Además se representan los rayos que parten de cada emisor y arriban a los receptores.

Con los datos definidos del dominio base se procedió a la construcción de la matriz de distancias con el algoritmo trazador generado y de acuerdo a una grilla de 1884 pixeles cuadrados, según se aprecia en la Figura 6.

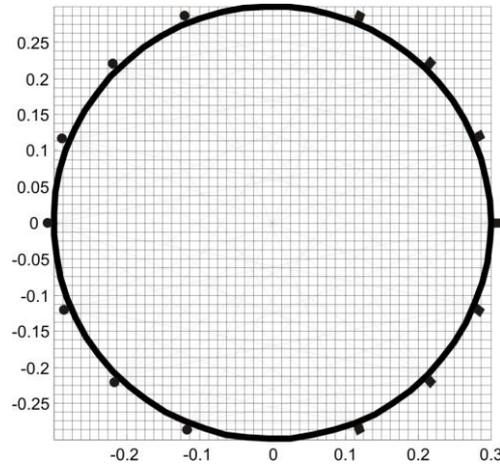


Figura 6. Distribución de la grilla de 1884 pixeles cuadrados (sobre una grilla base cuadrada origen de 48x48=2304 pixeles).

4.2 Inversión. Método Mínimos Cuadrados Amortiguados (DLSS)

4.2.1. Fundamentación del Método

Los métodos de tomografía sísmica que utilizan como hipótesis restrictiva la utilización de rayos rectos que implican la determinación de valores de lentitud/velocidad en dominios discretizados en forma de pixeles, conllevan la resolución de sistemas lineales que la mayoría de las veces serán sub-determinados [2] ya que cada pixel es una incógnita a resolver, según la forma:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{t} \quad (6)$$

Donde, como se expresó, $\mathbf{M}_{n,m,nc}$ es la matriz de distancias, $\mathbf{x}_{n,m,l}$ el vector de lentitudes/velocidades y $\mathbf{t}_{n,m}$ el vector de tiempos de llegada de los eventos sísmicos.

El problema es el siguiente: para lograr un sistema lineal al menos equi-determinado (ni qué decir sobre-determinado) que posibilite la aplicación del método de mínimos cuadrados y a la vez obtener imágenes lo más resolutivas posibles (lo que implica reducir el tamaño de los pixeles), será imprescindible incrementar el número de sensores (e_i, r_j) de tal forma de conseguir igual número de filas (rayos sísmicos; $n \times m$) que columnas (número de pixeles, incógnitas) de \mathbf{M} . Esto desde luego es inviable desde el punto de vista práctico, tanto por el costo de instrumental, como por el volumen de trabajo necesario [3].

El método de inversión DLSS es una poderosa herramienta para diagnosticar problemas de inversión y estimar la información disponible. La expresión es: [4]; [5].

$$\mathbf{x}^{(estimado)} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \eta^2 \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{t}^{(medido)} \quad (7)$$

El método DLSS combina la minimización del residuo $\mathbf{e} = \mathbf{t}^{(medido)} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^{(estimado)}$ usando la norma 2 (método de Mínimos Cuadrados, LSS) para sistemas sobre-determinados, con la minimización de la longitud del vector solución $\mathbf{x}^{<est>}$, como se hace en el método Solución por Mínima Longitud (MLS) [6] para sistemas subdeterminados. Es por ende un método mixto-determinado.

La matriz pseudoinversa generalizada de Penrose [7] será:

$$\mathbf{M}^{-g} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \eta^2 \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{M}^T \quad (8)$$

por lo que la ecuación general quedará:

$$\mathbf{x}^{(estimado)} = \mathbf{M}^{-g} \cdot \mathbf{t} \quad (9)$$

La matriz pseudoinversa no es la inversa formal de la matriz \mathbf{M} , ya que por empezar la inversa se obtiene de matrices cuadradas y \mathbf{M} no lo es por lo general excepto en caso de sistemas igual determinados, con número de rayos (ecuaciones) idéntico al de pixeles (incógnitas). Por ello los productos $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-g}$ y $\mathbf{M}^{-g} \cdot \mathbf{M}$ no serán necesariamente iguales a \mathbf{I} . Según Santamarina [8] la ecuación (8) permite calcular las matrices de resolución de datos \mathbf{D} y del modelo \mathbf{G} ; cuyas expresiones son:

$$\mathbf{D} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-g} = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \eta^2 \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{M}^T \quad (10)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-g} \cdot \mathbf{M} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \eta^2 \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M} \quad (11)$$

Si $\eta=0$; $\mathbf{D} = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \cdot \mathbf{M}^T$ y $\mathbf{G} = \mathbf{I}$, lo cual significa que una amortiguación cercana a cero transforma el método en mínimos cuadrados el cual resuelve muy bien la resolución del modelo y no tanto en los datos. A medida que se incrementa η se tendrá un intermedio entre las matrices de resoluciones \mathbf{D} y \mathbf{G} . Se le quita algo de resolución al modelo para desplazarla de lado de los datos. En definitiva el amortiguamiento atenúa los ruidos de alta frecuencia en la solución. Se deberá proceder a la inversión utilizando varios coeficientes y ver los resultados de tal forma de obtener imágenes lo más coherentes posibles.

4.2.2. Información Adicional

Usualmente en sistemas subdeterminados el método DLSS suele converger en forma rápida; excepto cuando la subdeterminación es muy grande, como es el caso presente; por lo que es necesario añadir alguna información adicional a fin de favorecer aquella. Usualmente se estima una velocidad para el medio base. Modificando la ec.(9), la misma asume la forma:

$$\mathbf{x}^{(est)} = \mathbf{x0} + \mathbf{M}^{-g} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x0}) \quad (10)$$

Donde $\mathbf{x0}_{nc,1}$ es el vector de estimación inicial de lentitud/velocidad.

4.2.3. Inversión y Elección del factor η óptimo. Discusión.

Una vez obtenida con el procedimiento descrito la matriz \mathbf{M} ; se procedió con los datos de tiempo \mathbf{t} y vector de velocidad inicial $\mathbf{x0}$ a realizar la inversión con el empleo de la ec.(10) a fin de calcular el vector de velocidades. Cada valor tiene asignado un pixel con una determinada ubicación en el dominio. Para evaluar el amortiguamiento se representó el valor máximo de cada vector velocidad en función del respectivo coeficiente η empleado para resolverlo (Figura 7).

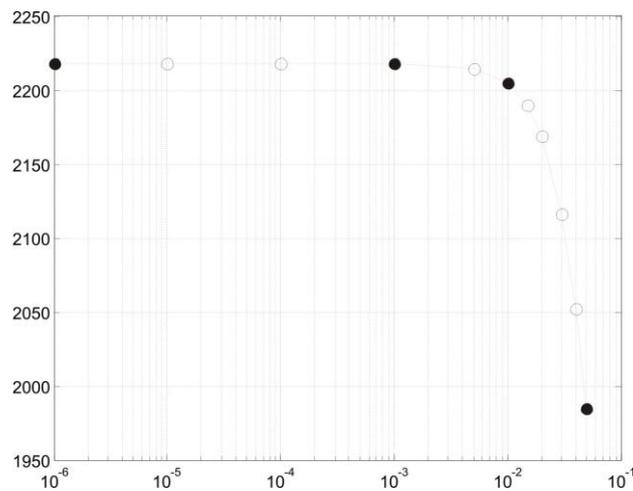


Figura 7. Valores máximos del vector velocidades de la inversión para diferentes valores de η . Los puntos llenos indican los valores de η cuya inversión se representan gráficamente en las Figuras 8-11.

La Figura 7 permite observar que un η muy grande (mayor de 0.01) reduce abruptamente el valor de la velocidad máxima de $\mathbf{x}^{<est>}$. Esto significa que el filtrado tenderá a homogeneizar los valores cerca de los del medio base que, como se sabe es de 1400m/s. Es decir se torna indetectable la anomalía. Por otro lado reduciendo lo más posible η , se aprecia que el máximo valor de velocidad será de 2217m/s, menor de los 3500m/s del caso real. Además en todos los casos se define con gran precisión la ubicación de la anomalía circular. Por último si el η tiende a cero, se llega al caso de mínimos cuadrados y el resultado no converge.

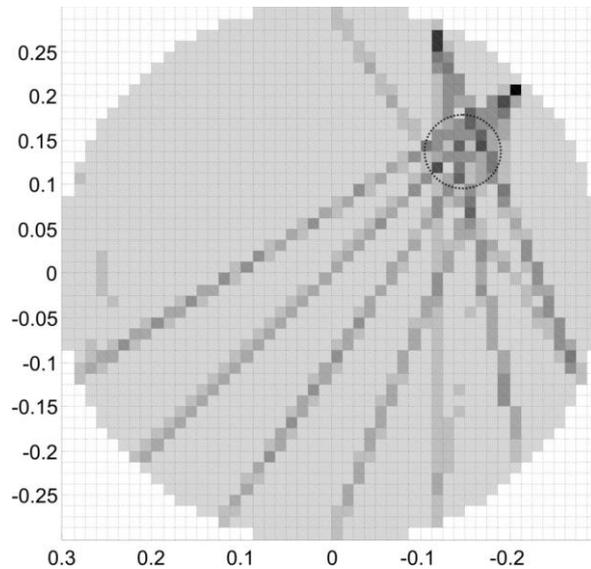


FIGURA 8. Resultados Inversión. DLSS. Dominio circular pixelado con ubicación de la anomalía. El elemento de mayor contraste se ubica en $x_a=y_a=0.15m$. tal como la situación real. $\eta=10^{-6}$; $V_{anom}=2217.7m/s$; $V_{base}=1400m/s$; $r_a\sim 0.05m$.

Las Figuras 8 a 11 presentan los resultados de la inversión para diferentes valores de η .

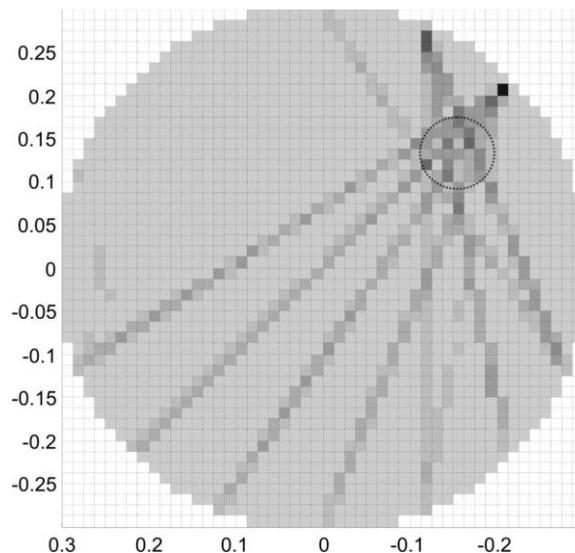


Figura 9. Resultados Inversión. DLSS. Dominio circular pixelado con ubicación de la anomalía. El elemento de mayor contraste se ubica en $x_a=y_a=0.15m$. tal como la situación real. $\eta=10^{-3}$; $V_{anom}=2217.6m/s$; $V_{base}=1400m/s$; $r_a\sim 0.05m$.

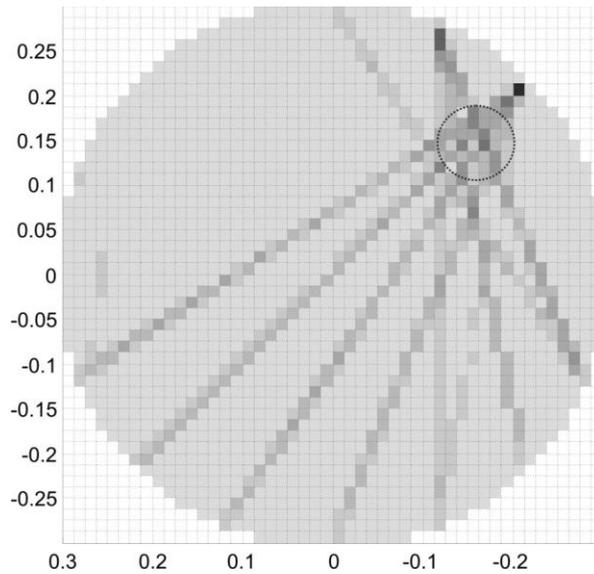


Figura 10. Resultados Inversión. DLSS. Dominio circular pixelado con ubicación de la anomalía. El elemento de mayor contraste se ubica en $x_a=y_a=0.15m$. tal como la situación real. $\eta=10^{-2}$; $V_{anom}=2205m/s$; $V_{base}=1400m/s$; $r_a\sim 0.05m$.

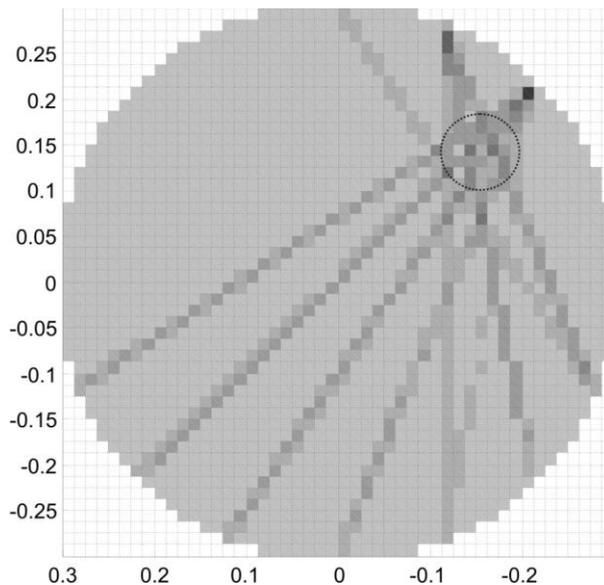


Figura 11. Resultados Inversión. DLSS. Dominio circular pixelado con ubicación de la anomalía. El elemento de mayor contraste se ubica en $x_a=y_a=0.15m$. tal como la situación real. $\eta=5\times 10^{-2}$; $V_{anom}=1985m/s$; $V_{base}=1400m/s$; $r_a\sim 0.05m$.

5. CONCLUSIONES

Modelar sísmicamente por métodos matriciales dominios diferentes al rectangular resulta complejo por tener que distribuir pixeles rectangulares en dominios curvos. Pero en muchos casos se necesitan este tipo de algoritmos a fin de resolver situaciones reales. Haber logrado resolver el problema de inversión planteado significa que la matriz de distancias \mathbf{M} construida con el programa trazador funciona perfectamente.

Por otra parte el hecho de haber logrado construir matrices de distancias con discretizaciones cuadradas de tamaño arbitrario, posibilita poder generar cualquier densidad de elementos en la discretización del dominio, y acceder a imágenes de buena resolución, con el uso de pocos sensores para resolver el problema.

A partir de aquí será posible diseñar experimentos reales para detectar a muy bajo costo (debido a la escasa cantidad de sensores necesarios para obtener una buena resolución de las imágenes) inclusiones en medios

aproximadamente homogéneos, por ejemplo oquedades en columnas cilíndricas de hormigón; o bien el volumen de agua transportada por una cañería, etc.

Reconocimientos: El presente trabajo de investigación forma parte de los proyectos “Micro-tomografía sísmica y Determinación de Módulos Dinámicos con ondas P y S en Medios Elásticos con Arreglos Genéricos” y “Desarrollos de Métodos Numéricos para Detección de Fallas en Medios Homogéneos y Heterogéneos con Técnicas Tomográficas”, subvencionados por la Secretaría de Ciencia y Técnica (CICITCA) de la Universidad Nacional de San Juan, República Argentina.

RECEIVED OCTOBER 2013
REVISED DECEMBER 2013

REFERENCIAS

- [1] IMHOF, A. L. (2008): **Caracterización Arenas y Gravas con Ondas Elásticas: Tomografía Sísmica en Cross-Hole**. Tesis Doctoral. Universidad Nacional de Cuyo. Mendoza. República Argentina. ISBN 978-987-05-4302-2.
- [2] MENKE, W. (1989): **Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory**. Academic Press Inc., New York.
- [3] PENROSE, R. A. (1955): A Generalized Inverse for Matrices. **Proceedings of Cambridge Phil. Society**, 51, 406-413.
- [4] PRADA, J. ; D. FRATTA. and J.C.SANTAMARINA (2000): Tomographic Detection of Anomalies with Limited Data Sets – Velocity and Attenuation. **Geotechnical Testing Journal** 23, 472-486
- [5] SANTAMARINA, J.C.; K.A. KLEIN and M.A. FAM (2002): **Soils and Waves**. Wiley & Sons, N. York.
- [6] SANTAMARINA J. C. and D. FRATTA (2005): **Discrete Signals and Inverse Problems. An Introduction for Engineers and Scientists**. Wiley, Chichester.
- [7] TARANTOLA, A. (1987): **Inverse Problem Theory**, Elsevier, Amsterdam.
- [8] TARANTOLA, A. (2005): **Inverse Problem Theory and Model Parameter Estimation, Society for Industrial and Applied Mathematics**. SIAM. Philadelphia.