CARACTERIZACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS VALORES P DE LAS PRUEBAS PARAMÉTRICAS EN POBLACIONES NORMALES

Pedro A. Monterrey[1]
Departamento de Matemáticas, Universidad del Rosario, Bogotá, Colombia.

ABSTRACT
Hypothesis test are widely used in data analysis but, in general, the random nature of p value is not consider in such applications. Power function and p-value probability distribution are strongly related, this relationship should be a component in both hypothesis testing conclusions and sample size calculation. However, this is not the case, possibly due of to two factors: first many people ignore the random nature of p-value and second there is a lack of information in the subject. Some papers introduced some characteristics of p-value distribution as mean value and median, but such values were not obtained for every parametric test in normal populations. This paper contains a full characterization of p-values probability distribution for both one and two sided hypothesis test for parameters in one or two normal populations. P-value probability distribution and their percentiles are presented, emphasizing in median value. Additionally the paper introduces approximate criteria for calculating both distribution function and percentiles, and highlight the relationship between power function and p-value.

KEY WORDS: Hypothesis Test. Normal Populations. P-value. Probability distribution. Percentiles.

MSC: 62F03

RESUMEN
Las Pruebas de Hipótesis son ampliamente utilizadas en la práctica pero, en general, dentro de esas aplicaciones no se considera el carácter aleatorio del valor p con el que se realizan las inferencias. Existe una estrecha relación entre la función de potencia y la distribución de probabilidad de los valores p, relación que debería ser parte de su interpretación y de la determinación del tamaño de la muestra para los análisis con estas técnicas; sin embargo esto no ocurre así y pudiera deberse a la falta de conocimiento de muchos acerca del carácter aleatorio del valor p, unido a que no existe toda la información para que esto sea realizado. En algunos artículos se han establecido características de la distribución de los valores p como son su valor medio y la mediana, pero estos valores no han sido determinados en el caso de todas las pruebas de hipótesis para los parámetros de las poblaciones normales. En este trabajo se presenta una caracterización completa de la distribución de probabilidad del valor p para las pruebas bilaterales y unilaterales en el caso de los parámetros de una y dos poblaciones normales, se establece la distribución de probabilidad del valor p, así como sus percentiles, haciéndose especial énfasis en la mediana. Adicionalmente se identifican criterios aproximados para la construcción tanto de la distribución como de los percentiles y se establece la relación entre la función de potencia y la función de distribución de probabilidad del valor p.

1. INTRODUCCIÓN

Las Pruebas de Hipótesis o de Significación son un procedimiento del Análisis de Datos muy utilizados en las aplicaciones de la Estadística. El procedimiento usual para su aplicación consiste en obtener un valor p, definido como la probabilidad del valor observado y valores más extremos que él en la dirección de rechazar H_0 y compararlo con un nivel de significación o valor α, que generalmente se fija como 0,05. De esta forma se toma la decisión correspondiente. Esta manera de proceder, muy popular y promovida tanto por los libros de texto como por los cursos de la disciplina, encierra en sí errores de tipo metodológico y probabilístico: Metodológicamente el procedimiento es erróneo porque se basa en la comparación de dos valores incompatibles, el valor p, que según las Pruebas de Significación de Fisher es una medida de evidencia contra H_0 y el valor α, que según la Teoría de las Pruebas de Hipótesis de Neyman y Pearson representa una tasa de error. Probabilísticamente el procedimiento es

[1] pedro.monterrey@urosario.edu.co

erróneo porque desconoce la naturaleza aleatoria de valor p. Esta situación ha sido analizada profundamente en múltiples artículos, como por ejemplo Hubbard y Bayarri [2003] o Monterrey [2012] pero, desafortunadamente, no es del conocimiento de muchos que utilizan las Pruebas de Hipótesis.
Es muy probable que este desconocimiento, tanto de la función metodológica del valor p como de su naturaleza aleatoria, sea una de las causas de errores e inconsistencias, en la aplicación de las pruebas, que han conducido a las críticas y prohibiciones que, como señala Monterrey [2012], sufren y han sufrido las Pruebas de Hipótesis o de Significación y que se han traducido en que algunas publicaciones desestimulen su uso, tal y como se aprecia, por ejemplo, en las Normas de Vancouver que son publicadas por el International Comitee of Medical Journal Editors [2014] y rigen metodológicamente las publicaciones biomédicas. A pesar de esta situación, los valores p y las pruebas de significación tienen una relevancia metodológica en la investigación científica, esto se fundamenta en que, como señaló Schervich [1996], son una forma de brindar más información sobre los datos que la que arroja un simple proceso de aceptar/rechazar una hipótesis. En ese sentido se han hecho propuestas para perfeccionar el uso de los valores p en el análisis de los datos. Brudette y Geham [1970], según refiere Royal [1986], identificaron rangos de valores p útiles para interpretar la evidencia que ellos representan, posteriormente Sterne y Smith [2001] presentaron unas modificaciones a esos rangos con lo que establecieron el criterio más actual para realizar esta interpretación.
Un problema fundamental en la aplicación e interpretación de los valores p es el no considerar en muchas aplicaciones su carácter aleatorio. Como señalaron Sackrowitz y Samuel-Cahn [1999] “los valores p son reportados extensivamente en situaciones prácticas, pero su naturaleza aleatoria es a menudo descuidada”. Una primera aproximación al estudio de la distribución de los valores p fue realizada por Dempster y Schatzoff [1965] quienes identificaron la relevancia del valor esperado de p como una medida para caracterizar una Prueba de Significación. En el caso en que H_0 sea cierta la distribución de p es estocásticamente mayor que la distribución uniforme en el intervalo [0,1], cuando la alternativa es cierta Lambert y Hall [1982] demostraron que el valor p, asintóticamente, se distribuye aproximadamente log-normal bajo un conjunto de condiciones bastante generales. Hung, O´Neil, Bauer y Köhne [1997] mostraron la relevancia del tamaño de muestra y de los valores de umbral utilizados para su determinación en el comportamiento de la distribución del valor p, resaltando la importancia de esta distribución para el diseño, análisis e interpretación de los resultados de los ensayos clínicos. Sackrowitz y Samuel-Cahn [1999] desarrollaron un procedimiento simple para calcular el valor esperado del valor p bajo la hipótesis alternativa; resaltando la importancia metodológica de este valor. Al ser la distribución del valor p asimétrica este valor esperado es poco relevante para caracterizar su comportamiento, por ese motivo Battacharya y Habtzghi [2002] desarrollaron otro procedimiento simple para calcular la mediana en los casos analizados por Sackrowitz y Samuel-Cahn [1999]. Lamentablemente, en ambos artículos, el procedimiento desarrollado no permitió identificar la mediana en todos los casos de las pruebas paramétricas en poblaciones normales.
El objetivo del presente trabajo es identificar explícitamente las distribuciones de probabilidad de los valores p en el caso de las pruebas paramétricas en poblaciones normales, tanto para las pruebas bilaterales como para las unilaterales. Asimismo se pretende determinar los percentiles de esas distribuciones y en particular las medianas, con lo que se podrá caracterizar el comportamiento de los valores p y cuantificar su asimetría. Se establecerá la relación entre la distribución de probabilidad de los valores p y la función de potencia de la prueba correspondiente con lo que se dará una nueva mirada a los criterios de determinación del tamaño de la muestra ahora en términos del comportamiento del valor p.

2. DESCRIPCIÓN DE PROCEDIMIENTOS Y RESULTADOS

2.1 Valor p. Definición y propiedades fundamentales

Para dos poblaciones independientes $X \sim n(\mu_x;\sigma_x^2)$ e $Y \sim n(\mu_y; \sigma_y^2)$ el parámetro θ representará a aquellos que usualmente se analizan en los problemas de pruebas de hipótesis paramétricas asociadas a la distribución normal, es decir, θ representará, según el caso, a μ_x, σ_x^2, μ_x- μ_y , σ_x^2/ σ_y^2. En lo que sigue $X_1,\ldots,X_n$ representará una muestra aleatoria de la población X y $Y_1,\ldots,Y_m$ una muestra aleatoria de la población Y; T representará el estadígrafo utilizado para construir las regiones críticas, de una o dos colas, para contrastar las hipótesis H_{0i}: $\theta\in\Theta_i$ contra H_{Ai}: $\theta\in\Theta_i^c$, i=1,2,3, siendo $\Theta_1=\{\theta_0\}$, $\Theta_2= [\theta_0,+\infty[$ y $\Theta_3=]-\infty, \theta_0]$ con θ_0 un número real. La distribución de T se encuentra condicionada por θ, lo que se representará mediante T/θ. La función de distribución en este caso se denotará mediante F_θ.
Siguiendo la definición de Fisher, según la cual el valor p representa “la probabilidad de los valores del estadígrafo de la prueba que son más extremos que el observado en la dirección de la hipótesis nula”. El valor p se define, para las hipótesis consideradas, como la realización de las variables aleatorias Π_1=2 min ($F_{\theta_0}(T)$, 1-$F_{\theta_0}(T)$,

$\Pi_2= \sup_{\theta\geq\theta_0} F_\theta(T)$, $\Pi_3= \sup_{\theta\leq\theta_0}(1-F_\theta(T))$; donde Π_i, i=1, 2, 3, representa el valor p de la prueba para el par de hipótesis (H_{0i} , H_{Ai}). En los casos que se analizan $F_\theta(T)$, vista como función de θ, es una función decreciente por lo cual $\Pi_2= F_{\theta_0}(T)$; $\Pi_3= 1-F_{\theta_0}(T)$. Si $F_{\Pi_{i/\theta}}$ denota la distribución de la variable aleatoria Π_i dado un valor θ, para cada i=1, 2, 3, estas distribuciones quedan definidas por:

$$F_{\Pi_{1/\theta}}(x) = 1-F_\theta\left(F^{-1}_{\theta_0}(1-x/2)\right)+F_\theta\left(F^{-1}_{\theta_0}(x/2)\right) \tag{1}$$
$$F_{\Pi_{2/\theta}}(x) = F_\theta\left(F^{-1}_{\theta_0}(x)\right) \tag{2}$$
$$F_{\Pi_{3/\theta}}(x) = 1 - F_\theta\left(F^{-1}_{\theta_0}(1-x)\right) \tag{3}$$

Para $0 \leq x \leq 1$ y θ un número real cualquiera.

En el caso de la distribución de Π_1/θ la expresión (1) se obtiene observando que

$$F_{\Pi_{1/\theta}}(x) = 1-P_\theta(\left\{F_{\theta_0}(T)\geq\frac{x}{2}\right\}\cup\left\{1-F_{\theta_0}(T)\geq\frac{x}{2}\right\}) = 1-P_\theta(\{F^{-1}_{\theta_0}(\tfrac{x}{2}) \leq T \leq F^{-1}_{\theta_0}(\tfrac{x}{2})\})$$

La demostración de (2) se sigue de $F_{\Pi_{2/\theta}}(x) = P_\theta(\{F_{\theta_0}(T)\leq x\})= P_\theta(\{T \leq F^{-1}_{\theta_0}(x)\})$. El caso (3) se obtiene de una forma semejante.

Haciendo $\theta = \theta_0$, en (1), (2) y (3) se observa que para $0 \leq x \leq 1$ $F_{\Pi_{i/\theta_0}}(x) = x$ por lo que, para cada i, Π_i/θ_0 tiene distribución uniforme en el intervalo [0,1]. Cuando H_{0i} es cierta Π_i/θ es estocásticamente mayor que la distribución U[0,1] cuando H_{Ai} es verdadera Π_i/θ es estocásticamente menor. La demostración de esta propiedad se basa en que $F_\theta(x)$, vista como función de θ para x fija, es decreciente; así por ejemplo en el caso de la distribución de Π_3/θ basta observar que para $\theta_1<\theta_0<\theta_2$ se cumple $F_{\theta_2}(F^{-1}_{\theta_0}(1-x) \leq 1-x \leq F_{\theta_1}(F^{-1}_{\theta_0}(1-x)$ de donde se obtiene que $F_{\Pi_{3/\theta_1}}(x) \leq x \leq F_{\Pi_{3/\theta_2}}(x)$. Para x fija en el intervalo [0,1] $F_\theta(x)$ es continua como función de θ, por ello $\lim_{\theta\to\theta_0} F_{\Pi_{i/\theta}}(x) = x$, es decir, cuando el parámetro se aproxima a θ_0, las distribuciones de los valores p se aproximan a la distribución U[0,1], denotándose mediante U[0,1] la distribución uniforme en el intervalo [0,1].

Los valores p tienen una distribución asimétrica; esta asimetría puede cuantificarse utilizando el coeficiente de asimetría de Galton, que se denotará mediante $A_i(\theta)$ i=1, 2, 3. Este coeficiente de asimetría se define a partir de los percentiles de la distribución, los que adicionalmente permitirán caracterizar el comportamiento de la distribución. Por este motivo es muy relevante disponer de expresiones explícitas para los percentiles del valor p. Si $\tilde{\Pi}_{i,\theta}(\gamma)$ denota el percentil de orden γ de la distribución de Π_i/θ; estos percentiles, en cada uno de los casos a considerar, quedarían determinados como la solución de las ecuaciones:

$$1 - \gamma = F_\theta\left(F^{-1}_{\theta_0}(1-\frac{\tilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2})\right)-F_\theta\left(F^{-1}_{\theta_0}(\frac{\tilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2})\right) \tag{4}$$
$$\gamma = F_\theta\left(F^{-1}_{\theta_0}(\tilde{\Pi}_{2,\theta}(\gamma))\right) \tag{5}$$
$$1 - \gamma = F_\theta\left(F^{-1}_{\theta_0}(1-\tilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma))\right) \tag{6}$$

La ecuación (4), tal y como ocurre en la construcción de la función de potencia no tiene, en general, solución exacta. En los casos (5) y (6) los percentiles quedan determinados explícitamente como; $\tilde{\Pi}_{2,\theta}(\gamma)= F_{\theta_0}(F^{-1}_\theta(\gamma))$ y $\tilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma)= 1 - F_{\theta_0}(F^{-1}_\theta(1-\gamma))$, cumpliéndose que si H_{0i} es cierta $A_i(\theta) \geq 0$ y si H_{Ai} es la hipótesis verdadera $A_i(\theta) < 0$, con lo que queda caracterizado el patrón de asimetría de la distribución de los valores p.

La función de potencia y el valor p se encuentran relacionados. Si $\beta^i_\alpha(\theta)$ es la función de potencia de una α-prueba para contrastar las hipótesis (H_{0i}, H_{Ai}), i=1, 2, 3, se cumple que:

$$\beta^1_\alpha(\theta) = F_{\Pi_{1/\theta}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{7}$$
$$\beta^i_\alpha(\theta) = F_{\Pi_{i/\theta}}(\alpha) \tag{8}$$

Cuando i=2,3

Para demostrar (7), basta observar que $\beta^1_\alpha(\theta) = P_\theta(\{T< \tau_{\alpha/2}\} \cup \{T> \tau_{1-\frac{\alpha}{2}}\})$ en el caso (H_{01}, H_{A1}), siendo τ_a, para 0<a<1, el percentil de orden a de T/θ_0; por ello $\beta^1_\alpha(\theta) = P_\theta(\{T< F^{-1}_{\theta_0}(\frac{\alpha}{2})\})+ P_\theta(\{T> F^{-1}_{\theta_0}(1-\frac{\alpha}{2})\})$ con lo que queda demostrado (7). Las relaciones indicadas en (8) se demuestran por un procedimiento semejante.

Las relaciones (7) y (8) permiten realizar la determinación del tamaño de muestra a partir del comportamiento esperado del valor p. La combinación de la potencia, el comportamiento del valor p y su mediana, como valor típico, permitirán hacer un planteamiento más completo del problema de la determinación del tamaño de la muestra e incorporar en el análisis el valor p. Valor con el que se hacen las inferencias pero que no es considerado explícitamente en la determinación del tamaño de la muestra.

2.2 Aplicación a las pruebas paramétricas en poblaciones normales

En lo que sigue se utilizarán las notaciones introducidas en 2.1 para cada una de las dos poblaciones a analizar. Indicándose, explícitamente en cada caso, la expresión particular del parámetro y el estadístico de la prueba. Sobre esa base se obtendrá, para cada una de las pruebas paramétricas en poblaciones normales, la forma específica de los resultados presentados en 2.1

2.2.1. Pruebas para la media con varianza conocida. Una y dos poblaciones

Los casos para una y dos poblaciones admiten una solución unificada a partir del planteamiento general presentado en el epígrafe 2.1:

Una población. En este caso $\theta = \mu_x$ y $T= \frac{\bar{X}-\theta_0}{\sigma_x}\sqrt{n}$. Denotando $\bar{X}$ la media de la muestra aleatoria de la población X.

Dos poblaciones. En este caso $\theta = \mu_x - \mu_y$ y $T= \frac{\bar{X}-\bar{Y}-\theta_0}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}}$. Denotando $\bar{X}$ y $\bar{Y}$, respectivamente, las medias de las muestras aleatorias de las poblaciones X e Y y $\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}}= \frac{\sigma^2_x}{n}+\frac{\sigma^2_y}{m}$.

En ambas situaciones el estadígrafo T cumple que $T/\theta \sim n(\Delta\,;1)$ siendo $\Delta= \frac{\theta-\theta_0}{\sigma_x}\sqrt{n}$ para una población y $\Delta = \frac{\theta-\theta_0}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}}$ en el caso de dos poblaciones. Denotando n(,) la distribución normal con los parámetros correspondientes y ~ el que la variable aleatoria sigue la distribución indicada.

Al cumplirse que $F_\theta(x)= \Phi(x-\Delta)$, F_θ es decreciente y continua como función de θ; por lo que los valores p quedan definidos como realizaciones de las variables aleatorias $\Pi_1 = 2\,\Phi(-|T|)$, $\Pi_2 = \Phi(T)$, $\Pi_3 = 1-\Phi(T)$). Sustituyendo en (1), (2) y (3) se obtienen las expresiones específicas para sus distribuciones:

$$F_{\Pi_{1/\theta}}(x)=1-\Phi\left(Z_{1-\frac{x}{2}}-\Delta\right)+\Phi\left(Z_{\frac{x}{2}}-\Delta\right) \quad (9)$$
$$F_{\Pi_{2/\theta}}(x)= \Phi(Z_x-\Delta) \quad (10)$$
$$F_{\Pi_{3/\theta}}(x)= 1-\Phi(Z_{1-x}-\Delta) \quad (11)$$

Siendo Z_a el percentil de orden a de la distribución n(0;1) y Φ la correspondiente función de distribución.

Para la determinación de los percentiles en el caso bilateral (H_{01}, H_{A1}) la ecuación (4) se convierte en:

$$2-\gamma = \Phi\left(Z_{1-\frac{\tilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2}}+\Delta\right)+\Phi\left(Z_{1-\frac{\tilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2}}-\Delta\right) \quad (12)$$

Esta ecuación debe resolverse por métodos aproximados. Una forma, sin utilizar métodos numéricos, es emplear la aproximación logística de la distribución normal de Bowling et al. [2009]. A partir de su aplicación (12) se transforma en:

$$2-\gamma \approx \left(1+e^{-1.702\left(Z_{1-\frac{\tilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2}}+\Delta\right)}\right)^{-1}+\left(1+e^{-1.702\left(Z_{1-\frac{\tilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2}}-\Delta\right)}\right)^{-1} \quad (13)$$

De donde se obtiene que, para $0<\gamma<1$

$$\tilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma) \approx 2\left(1-\Phi\left(\frac{\ln(\kappa(\gamma,\Delta))}{1.702}\right)\right) \quad (14)$$

con $\kappa(\gamma,\Delta) = \frac{\gamma-1}{2(2-\gamma)}\xi(\Delta)+\frac{1}{2(2-\gamma)}\sqrt{(1-\gamma)^2\xi^2(\Delta)+4\gamma(2-\gamma)}$ y $\xi(\Delta)=e^{1.702\Delta}+e^{-1.702\Delta}$.

Para los casos (5) y (6), las expresiones (10) y (11) permiten concluir que:

$\tilde{\Pi}_{2,\theta}(\gamma)= \Phi(Z_{\gamma}+\Delta)$ (15)

$\tilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma)= 1 - \Phi(Z_{1-\gamma}+\Delta)$ (16)

De (14), (15), (16) se obtiene que las medianas de las distribuciones son $\tilde{\Pi}_{1,\theta}(0.5) \approx 2\, \Phi(\frac{\ln(\kappa_0(0.5,\Delta))}{1.702})$, $\tilde{\Pi}_{2,\theta}(0.5)= \Phi(\Delta)$, $\tilde{\Pi}_{3,\theta}(0.5)= \Phi(-\Delta)$. Observándose que, en todos los casos, la mediana queda determinada por el valor Δ.

2.2.2. Pruebas para la media con varianza desconocida

Al igual que en 2.2.1 los casos para una y dos poblaciones también admiten una solución unificada.

Una población. En este caso $\theta = \mu_x$, $T= \frac{\bar{X}- \theta_0}{S_x}\sqrt{n}$.

Dos poblaciones con varianzas iguales ($\sigma_x^2= \sigma_y^2= \sigma^2$). En este caso $\theta = \mu_x - \mu_y$, $T= \frac{\bar{X}- \bar{Y}- \theta_0}{S_p}$.

Dos poblaciones con varianzas diferentes ($\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$). En este caso $\theta = \mu_x - \mu_y$, $T=(\bar{X}- \bar{Y}- \theta_0)(\frac{S_x^2}{n} + \frac{S_y^2}{m})^{-1/2}$

Denotando, respectivamente, $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ las medias de las muestras aleatorias de las poblaciones X e Y, S_x^2 y S_y^2 las correspondientes varianzas muestrales y $S_p^2= \frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}$ el estimador combinado de σ^2

En los tres casos el estadígrafo T cumple $T/\theta \sim t_\nu^\Delta$; denotando t_ν^Δ la distribución t no central con ν grados de libertad y parámetro de no centralidad Δ. Para una población $\nu= n-1$ y $\Delta= \frac{\theta- \theta_0}{\sigma_x}\sqrt{n}$; en el caso de dos poblaciones con varianzas iguales $\nu= n + m -2$ y $\Delta = \frac{\theta- \theta_0}{\sigma}\sqrt{\frac{nm}{n+m}}$ y cuando las varianzas son diferentes $\nu = \frac{(\frac{\sigma_x^2}{n}+ \frac{\sigma_m^2}{m})^2}{\frac{1}{n-1}(\frac{\sigma_x^2}{n})^2 + \frac{1}{m-1}(\frac{\sigma_y^2}{m})^2}$ y $\Delta = \frac{\theta - \theta_0}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}}$ siendo $\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}^2$ definida como en 2.2.1

Al ser $F_\theta(x)= T_\nu^\Delta(x)$, con T_ν^Δ la función de distribución acumulativa de la distribución t_ν^Δ, $F_\theta(x)$ es decreciente y continua como función de θ; por lo que, según lo planteado en 2.1, los valores p son realizaciones de las variables aleatorias $\Pi_1 = 2\, T_\nu^0(-|T|)$, $\Pi_2 = T_\nu^0(T)$, $\Pi_3 = 1 - T_\nu^0(T)$.). Sus distribuciones, identificadas en (1), (2) y (3), quedan definidas en este caso, para $0 \le x \le 1$ por:

$F_{\Pi_{1/\theta}}(x)=1 - T_\nu^\Delta\,(t_\nu^0(1-x/2))+ T_\nu^\Delta\,(t_\nu^0(x/2))$ (17)

$F_{\Pi_{2/\theta}}(x)= T_\nu^\Delta\,(t_\nu^0(x))$ (18)

$F_{\Pi_{3/\theta}}(x)= 1 - T_\nu^\Delta\,(t_\nu^0(1-x))$ (19)

Denotando $t_\nu^\Delta(a)$ el percentil de orden a de la distribución t_ν^Δ.

Según la aproximación de la distribución t no central a la central desarrollada por Chmura y Paik [1979], se cumple que:

$$T_\nu^\Delta\,(a) \approx T_\nu^0 \left(a(1+\frac{\Delta^2}{\nu})^{2} - \Delta(1+\frac{a^2}{\nu})^{1/2}\right) \qquad (20)$$

La aproximación (20) permite escribir las funciones de distribución de los valores p en términos de la distribución central. Cumpliéndose que:

$F_{\Pi_{1,\theta}}(x) \approx 1- T_\nu^0(t_\nu^0\left(1-\frac{x}{2}\right)(\kappa_1\nu,\Delta)- \kappa_2(\nu,\Delta,1-\frac{x}{2}) +T_\nu^0(t_\nu^0\left(\frac{x}{2}\right)(\kappa_1\nu,\Delta)- \kappa_2(\nu,\Delta,\frac{x}{2}))$ (21)

$F_{\Pi_{2,\theta}}(x) \approx T_\nu^0(t_\nu^0(x)\kappa_1(\nu,\Delta)- \kappa_2(\nu,\Delta,x))$ (22)

$F_{\Pi_{3,\theta}}(x) \approx 1 - T_\nu^0(t_\nu^0(1-x)\kappa_1(\nu,\Delta)-\kappa_2(\nu,\Delta,1-x))$ (23)

Siendo $0 \le x \le 1$ y denotando $\kappa_1(\nu,\Delta)= (1+\frac{\Delta^2}{\nu})^{1/2}$ y $\kappa_2(\nu,\Delta,a)=\Delta\,(1+\frac{t_\nu^2(a)}{\nu})^{1/2}$.

De las ecuaciones (4), (5) y (6), según la formulación (17), (18) y (19), se obtienen los percentiles de las distribuciones. Estos son, en el caso de las hipótesis unilaterales, para $0<\gamma<1$:

$\tilde{\Pi}_{2,\theta}(\gamma)= T_\nu^0(t_\nu^\Delta(\gamma))$ (24)

$\widetilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma) = 1\text{-}T_\nu^0(t_\nu^\Delta(1\text{-}\gamma))$ (25)

Y en el caso de las hipótesis bilaterales los percentiles quedan determinados como la solución de la ecuación:

$$1 - \gamma = T_\nu^\Delta(t_\nu^0(1- \frac{\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2})) - T_\nu^\Delta(t_\nu^0(\frac{\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2})) \quad (26)$$

En sustitución de (24) y (25), la aproximación (20) permite determinar los percentiles utilizando solamente la distribución t central. A partir de (23) los percentiles $\widetilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma)$ serían la solución de la ecuación:

$$t_\nu^0(1\text{-}\gamma)= T_\nu^0(t_\nu^0\left(1\text{-}\widetilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma)\right)\kappa_1(\nu,\Delta)\text{-}\kappa_2(\nu,\Delta,1\text{-}\widetilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma))) \quad (27)$$

De (27) y después de algunas transformaciones algebraicas, se obtiene la ecuación:

$$(t_\nu^0(1\text{-}\widetilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma))^2\text{-}2t_\nu^0(1\text{-}\gamma)\left(1+\frac{\Delta^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}t_\nu^0(1\text{-}\widetilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma))+\left(t_\nu^0(1\text{-}\gamma)\right)^2 - \Delta^2 = 0 \quad (28)$$

Cuya solución es

$$\widetilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma)\approx 1\text{-} T_\nu^0(\kappa_3(1\text{-}\gamma,\nu,\Delta)) \quad (29)$$

con $\kappa_3(a,\nu,\Delta) = t_\nu^0(a)\left(1+\frac{\Delta^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}+\Delta\sqrt{1+\frac{\left(t_\nu^0(a)\right)^2}{\nu}}$. Por un razonamiento análogo se obtiene que:

$$\widetilde{\Pi}_{2,\theta}(\gamma)\approx T_\nu^0(\kappa_3(\gamma,\nu,\Delta)) \quad (30)$$

Para las hipótesis bilaterales la expresión (26), por las propiedades de la distribución t no central, es equivalente a:

$$2 - \gamma = T_\nu^\Delta(t_\nu^0(1- \frac{\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2})) - T_\nu^{-\Delta}(t_\nu^0(1\text{-}\frac{\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2})) \quad (31)$$

Utilizando la aproximación de la distribución F no central a la distribución normal desarrollada por Severo y Zelen [1960] y la aproximación de la distribución t no central a distribución normal de Johnson y Welch [1940], se obtiene que $\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)$ es solución de la ecuación:

$$2\text{-}\gamma \approx 1+2\ \Phi(\frac{\lambda(1\text{-}a_1)\text{-}(1\text{-}a_2)}{(a_2+a_1\lambda^2)^{1/2}}) \quad (32)$$

Con $\lambda=\left[(t_\nu^0(1\text{-}\ \frac{\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2}))^2/(1+\Delta^2)\right]^{1/3}$, $a_1 = 2/(9\nu)$, $a_2 = (2(1+2\Delta^2))/9(1+\Delta^2)^2)$. De (32) queda determinado el percentil como:

$$\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)\approx 2(1\text{-}\ T_\nu^0(\kappa_4(\gamma,\nu,\Delta))) \quad (33)$$

Denotando:

$$\kappa_4(\gamma,\nu,\Delta)= (\tau^3(\gamma,\Delta)\left(1+\Delta^2\right))^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau(\gamma,\Delta)= (2a_1\text{-}1)^{-1}\ (\left[\left(1\text{-}a_2^2\right)\left((1\text{-}a_1)^2+(2a_1\text{-}1)\right)\text{-}\ a_2\ Z^2_{(1-\gamma)/2}\,(2\ a_1\text{-}\ 1)\right]^{1/2} - (1\text{-}a_1)(1\text{-}a_2)).$$

Al igual que en 2.2.1, la mediana de la distribución de los valores p queda determinada por el valor de Δ en cada una de las tres situaciones consideradas.

Aplicando la aproximación de Johnson y Welch [1940] es posible representar las funciones de distribución y los percentiles de las distribuciones de los valores p en términos de la distribución normal estándar. La aplicación directa de esa aproximación a (17), (18), (19), (29), (30) y (33) permite establecer que, para $0\leq x\leq 1$ y $0<\gamma<1$:

$$F_{\Pi_{1/\theta}}(x) \approx 1 - \Phi(\ (1+\frac{(t_\nu^0(1\text{-}x/2))^2}{2\nu})^{-1/2}\ (t_\nu^0(1\text{-}x/2)\text{-}\ \Delta\ ))+ \Phi(\ (1+\frac{(t_\nu^0(x/2))^2}{2\nu})^{-1/2}\ (t_\nu^0(x/2)\text{-}\ \Delta\ )) \quad (34)$$

$$F_{\Pi_{2/\theta}}(x) \approx \Phi(\ (1+\frac{(t_\nu^0(x))^2}{2\nu})^{-1/2}\ (t_\nu^0(x)\text{-}\ \Delta\ )) \quad (35)$$

$$F_{\Pi_{3/\theta}}(x) \approx 1 - \Phi(\ (1+\frac{(t_\nu^0(1\text{-}x))^2}{2\nu})^{-1/2}\ (t_\nu^0(1\text{-}x)\text{-}\ \Delta\ )) \quad (36)$$

$$\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma) \approx 2(1\text{-}\Phi((1+\frac{(\kappa_4(\gamma,\nu,\Delta))^2}{2\nu})^{-1/2}\ \kappa_4(\gamma,\nu,\Delta))) \quad (37)$$

$$\widetilde{\Pi}_{2,\theta}(\gamma) \approx \Phi((1+\frac{(\kappa_3(\gamma,\nu,\Delta))^2}{2\nu})^{-1/2}\ \kappa_3(\gamma,\nu,\Delta)) \quad (38)$$

$$\widetilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma) \approx 1 - \Phi((1+\frac{(\kappa_3(1\text{-}\gamma,\nu,\Delta))^2}{2\nu})^{-1/2}\ \kappa_3(1\text{-}\gamma,\nu,\Delta)) \quad (39)$$

Donde los percentiles $t_\nu^0(\alpha)$ pueden sustituirse también por sus aproximaciones $t_\nu^0(\alpha)\approx Z_\alpha\,(1\text{-}\ Z_\alpha^2/(2\nu))^{1/2}$.

2.2.3 Pruebas para la varianza de una población

En este caso $\theta = \sigma_x^2$ y $T=\frac{(n-1)S_x^2}{\theta_0}$; siendo, de nuevo, S_x^2 la varianza de la muestra en la población X. El estadígrafo T cumple que $T/\theta \sim \tilde{\theta}\, \chi^2_{n-1}$, con $\tilde{\theta}= \frac{\theta}{\theta_0}$, denotando χ^2_{n-1} la distribución ji-cuadrado con n-1 grados de libertad. Si X_{n-1} denota la función de distribución de la distribución χ^2_{n-1} entonces $F_\theta(x) = X_{n-1}(\frac{x}{\theta})$ por lo que $F_\theta(x)$ es decreciente y continua como función de θ y los valores p, según se vio en 2.1, son realizaciones de las variables aleatorias $\Pi_1=2 \min (X_{n-1}(T), 1-X_{n-1}(T))$, $\Pi_2=X_{n-1}(T)$ y $\Pi_3= 1-X_{n-1}(T))$. Sus funciones de distribución, a partir de (1), (2) y (3), quedan definidas por:

$$F_{\Pi_{1/\theta}}(x)= 1 - X_{n-1}\left(\tilde{\theta}^{-1}\chi^2_{n-1}(1-\tfrac{x}{2})\right)+ X_{n-1}\left(\tilde{\theta}^{-1}\chi^2_{n-1}(\tfrac{x}{2})\right) \quad (40)$$

$$F_{\Pi_{2/\theta}}(x)= X_{n-1}\left(\tilde{\theta}^{-1}\chi^2_{n-1}(x)\right) \quad (41)$$

$$F_{\Pi_{3/\theta}}(x)= 1 - X_{n-1}\left(\tilde{\theta}^{-1}\chi^2_{n-1}(1-x)\right) \quad (42)$$

Con $0\leq x\leq 1$ y denotando $\chi^2_{n-1}(a)$ el percentil de orden a de la distribución χ^2_{n-1}.
A partir de la aproximación de la distribución ji-cuadrado a la distribución normal de Wilson e Hilferty [1931] es posible aproximar las funciones de distribución utilizando la distribución normal. Los percentiles de ambas distribuciones están relacionados por $\chi^2_{n-1}(a) \approx (n-1)(\tilde{\mu}+ \tilde{\sigma}\, Z_a)^3$, siendo $\tilde{\mu} = 1 - \frac{2}{9(n-1)}$ y $\tilde{\sigma}^2= \frac{2}{9(n-1)}$ por lo que las expresiones (40), (41) y (42) se transforman en:

$$F_{\Pi_{1/\theta}}(x)\approx 1- \Phi\left(\frac{\tilde{\theta}^{-\frac{1}{3}}(n-1)^{\frac{1}{3}}(\tilde{\mu}+ \tilde{\sigma}\, Z_{1-\frac{x}{2}}) - \tilde{\mu}\sqrt[3]{n-1}}{\tilde{\sigma}\sqrt[3]{n-1}}\right)+ \Phi\left(\frac{\tilde{\theta}^{-\frac{1}{3}}(n-1)^{\frac{1}{3}}(\tilde{\mu}+ \tilde{\sigma}\, Z_{\frac{x}{2}}) - \tilde{\mu}\sqrt[3]{n-1}}{\tilde{\sigma}\sqrt[3]{n-1}}\right) \quad (43)$$

$$F_{\Pi_{2/\theta}}(x)\approx \Phi\left(\frac{\tilde{\theta}^{-\frac{1}{3}}(n-1)^{\frac{1}{3}}(\tilde{\mu}+ \tilde{\sigma}\, Z_{x}) - \tilde{\mu}\sqrt[3]{n-1}}{\tilde{\sigma}\sqrt[3]{n-1}}\right) \quad (44)$$

$$F_{\Pi_{3/\theta}}(x)\approx 1 - \Phi\left(\frac{\tilde{\theta}^{-\frac{1}{3}}(n-1)^{\frac{1}{3}}(\tilde{\mu}+ \tilde{\sigma}\, Z_{1-x}) - \tilde{\mu}\sqrt[3]{n-1}}{\tilde{\sigma}\sqrt[3]{n-1}}\right) \quad (45)$$

En los casos de hipótesis unilaterales los percentiles de la distribución, definidos en (5) y (6), a partir de (41) y (42), para $0<\gamma<1$, quedan determinados por:

$$\tilde{\Pi}_{2,\theta}(\gamma)= X_{n-1}(\tilde{\theta}\, \chi^2_{n-1}(\gamma)) \quad (46)$$

$$\tilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma)= 1- X_{n-1}(\tilde{\theta}\, \chi^2_{n-1}(1-\gamma)) \quad (47)$$

Siendo entonces las medianas de las distribuciones $\tilde{\Pi}_{2,\theta}(0.5) \approx X_{n-1}((n-1)\tilde{\theta}\,(1-\frac{2}{9n-1})^3)$ y $\tilde{\Pi}_{2,\theta}(0.5) \approx 1- X_{n-1}((n-1)\tilde{\theta}\,(1-\frac{2}{9n-1})^3)$.
Por la aproximación normal de Wilson e Hilferty [1931] los percentiles de la distribución del valor p en las pruebas unilaterales, definidos en (46) y (47), se aproximan por:

$$\tilde{\Pi}_{2,\theta}(\gamma) \approx \Phi\left(\frac{\tilde{\theta}^{\frac{1}{3}}(n-1)^{\frac{1}{3}}(\tilde{\mu}+ \tilde{\sigma}\, Z_{\gamma}) - \tilde{\mu}\sqrt[3]{n-1}}{\tilde{\sigma}\sqrt[3]{n-1}}\right) \quad (48)$$

$$\tilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma) \approx 1 - \Phi\left(\frac{\tilde{\theta}^{\frac{1}{3}}(n-1)^{\frac{1}{3}}(\tilde{\mu}+ \tilde{\sigma}\, Z_{1-\gamma}) - \tilde{\mu}\sqrt[3]{n-1}}{\tilde{\sigma}\sqrt[3]{n-1}}\right) \quad (49)$$

Para las hipótesis bilaterales el percentil $\tilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)$ queda determinado, a partir de (4) y (40), como la solución de:

$$1-\gamma = X_{n-1}\left(\tilde{\theta}^{-1}\chi^2_{n-1}(1-\tfrac{\tilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2})\right)- X_{n-1}\left(\tilde{\theta}^{-1}\chi^2_{n-1}(\tfrac{\tilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2})\right) \quad (50)$$

Utilizando de nuevo la aproximación de Wilson e Hilferty [1931] la ecuación (50) es equivalente a:

$$2-\gamma \approx \Phi(\tilde{\theta}^{-1/3}Z_{1-\frac{\tilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2}}+ \tfrac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}(\tilde{\theta}^{-\frac{1}{3}}-1))+ \Phi(\tilde{\theta}^{-1/3}Z_{1-\frac{\tilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2}}- \tfrac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}(\tilde{\theta}^{-\frac{1}{3}}-1)) \quad (51)$$

Aplicando en (51) la aproximación logística de la distribución normal de Bowling et al. [2009] y procediendo como en (12) se obtiene que para $0<\gamma<1$:

$\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)=2(1-\Phi(-\frac{\ln(\kappa_5(\tilde{\theta},n,\gamma))}{1.702\tilde{\theta}}))$ (52)

con $\kappa_5(\tilde{\theta},n,\gamma)=\frac{\gamma-1}{2(2-\gamma)}\xi_1(\tilde{\theta},n)+\frac{1}{2(2-\gamma)}\sqrt{(1-\gamma)^2\xi_1^2(\tilde{\theta},n)+4\gamma(2-\gamma)}$ y $\xi_1(\tilde{\theta},n)=e^{1.702\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}(\tilde{\theta}^{-1/3}-1)}+e^{-1.702\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}(\tilde{\theta}^{-1/3}-1)}$.

Cumpliéndose de nuevo que las medianas quedan determinadas por el tamaño de muestra y la relación entre los valores del parámetro y el valor de referencia de la hipótesis nula.

2.2.4 Pruebas para la varianza de dos poblaciones

En este caso $\theta=\sigma_x^2/\sigma_y^2$ y $T=\frac{1}{\theta_0}\frac{(n-1)S_x^2}{(m-1)S_y^2}$, donde S_x^2 y S_y^2 denotan, respectivamente, las varianzas muestrales de las poblaciones X e Y. El estadígrafo T cumple que $T/\theta \sim \tilde{\theta}\, F_{n-1,\,m-1}$ donde $\tilde{\theta}=\theta/\theta_0$ y $F_{n-1,\,m-1}$ denota la distribución F con (n-1, m-1) grados de libertad. Si $\Psi_{n-1,\,m-1}$ representa la función de distribución acumulativa de la distribución $F_{n-1,\,m-1}$ entonces $F_\theta(x)=\Psi_{n-1,m-1}(x/\tilde{\theta})$. Al ser $F_\theta(x)$, decreciente y continua como función de θ los valores p son realizaciones de las variables aleatorias $\Pi_1=2\min(\Psi_{n-1,m-1}(T),\ 1-\Psi_{n-1,m-1}(T))$, $\Pi_2=\Psi_{n-1,m-1}(T)$ y $\Pi_3=1-\Psi_{n-1,m-1}(T)$. Sus funciones de distribución, siguiendo (1), (2), (3) quedan definidas, para $0\le x\le 1$ por:

$F_{\Pi_{1/\theta}}(x)=1-\Psi_{n-1,m-1}\left(\tilde{\theta}^{-1}F_{n-1,\,m-1}(1-\frac{x}{2})\right))+\Psi_{n-1,m-1}\left(\tilde{\theta}^{-1}F_{n-1,\,m-1}(\frac{x}{2})\right))$ (53)

$F_{\Pi_{2/\theta}}(x)=\Psi_{n-1,m-1}\left(\tilde{\theta}^{-1}F_{n-1,\,m-1}(x)\right)$ (54)

$F_{\Pi_{3/\theta}}(x)=1-\Psi_{n-1,m-1}\left(\tilde{\theta}^{-1}F_{n-1,\,m-1}(1-x)\right)$ (55)

Denotando $F_{n-1,\,m-1}(a)$ el percentil de orden a de la distribución $F_{n-1,\,m-1}$. A partir de la aproximación de la distribución F a la normal de Severo y Zelen [1960] las expresiones anteriores se transforman en:

$F_{\Pi_{1/\theta}}(x)\approx 1-\Phi(\kappa_6(\tilde{\theta},1-x/2,n,m))+\Phi(\kappa_6(\tilde{\theta},x/2,n,m))$ (56)

$F_{\Pi_{2/\theta}}(x)\approx \Phi(\kappa_6(\tilde{\theta},x,n,m))$ (57)

$F_{\Pi_{3/\theta}}(x)\approx 1-\Phi(\kappa_6(\tilde{\theta},1-x,n,m))$ (58)

Donde $\kappa_6(x,a,n,m)=\left(\frac{2}{9(n-1)}+\frac{2}{9(m-1)}\left(x^{-1}F_{n-1,\,m-1}(a)\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\left(x^{-1}F_{n-1,\,m-1}(a)\right)^{\frac{1}{3}}(1-\frac{2}{9(m-1)})-(1-\frac{2}{9(n-1)})\right)$.

Para $0<\gamma<1$ los percentiles de la distribución de probabilidad de los valores p, presentados en (5) y (6) para el caso de las hipótesis unilaterales, quedan determinados, siguiendo (54) y (55), como:

$\widetilde{\Pi}_{2,\theta}(\gamma)=\Psi_{n-1,m-1}(\tilde{\theta}F_{n-1,\,m-1}(\gamma))$ (59)

$\widetilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma)=1-\Psi_{n-1,m-1}(\tilde{\theta}F_{n-1,\,m-1}(1-\gamma))$ (60)

La aproximación de Severo y Zelen [1960] permite aproximar los percentiles (59) y (60) utilizando la distribución normal. Éstos quedan determinados por:

$\widetilde{\Pi}_{2,\theta}(\gamma)\approx\Phi(\kappa_6(\tilde{\theta}^{-1},\gamma,n,m))$ (61)

$\widetilde{\Pi}_{3,\theta}(\gamma)\approx\Phi(\kappa_6(\tilde{\theta}^{-1},1-\gamma,n,m))$ (62)

La expresión $\kappa_6(.)$ depende de $F_{n-1,\,m-1}(a)$. La aproximación de Zevero y Zelen [1960] adicionalmente permite representar los percentiles de la distribución F utilizando los percentiles de la distribución normal, quedando entonces (61) y (62) expresadas en términos de valores de la distribución normal: Para Z_α percentil de orden α de la distribución normal la aproximación establece que $Z_\alpha\approx\kappa_6(1,a,n,m)$ de donde se obtiene, después de algunas transformaciones algebraicas, que:

$$F_{n-1,\,m-1}(a)\approx\begin{cases}\kappa_7(n,m,a)^{-1}\left(\kappa_8(n,m)+\kappa_9(n,m,a)\right) & \text{si } a\le 0{,}50\\ \kappa_7(n,m,a)^{-1}\left(\kappa_8(n,m)-\kappa_9(n,m,a)\right) & \text{si } a\ge 0{,}50\end{cases} \quad (63)$$

Siendo $\kappa_9(n,m,a)=\sqrt{-\kappa_8(n,m)-\kappa_7(n,m,a)\left(Z_a^2\frac{2}{9(n-1)}-\left(1-\frac{2}{9(n-1)}\right)^2\right)}$, $\kappa_8(n,m)=(\frac{2}{9(n-1)}-1)(1-\frac{2}{9(m-1)})$ y $\kappa_7(n,m,a)=\frac{2Z_a^2}{9(m-1)}-(1-\frac{2}{9(m-1)})^2$.

En el caso bilateral los percentiles de la distribución del valor p son la solución de la ecuación:

$1-\gamma=\Psi_{n-1,m-1}\left(\tilde{\theta}^{-1}F_{n-1,\,m-1}(1-\frac{\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2})\right)-\Psi_{n-1,m-1}\left(\tilde{\theta}^{-1}F_{n-1,\,m-1}(\frac{\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2})\right)$ (64)

Para muestras grandes si $\widetilde{\mu_1} = \frac{m-2}{m-2}$ y $\widetilde{\sigma_1}^2 = \frac{2(m-1)^2(n+m)}{(n-1)\,(m-3)^2(m-5)}$ la ecuación (64) equivale a:

$$1-\gamma \approx \Phi\left(\frac{\tilde{\theta}^{-1}F_{n-1,\,m-1}\left(1-\frac{\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2}\right)-\widetilde{\mu_1}}{\widetilde{\sigma_1}}\right) - \Phi\left(\frac{\tilde{\theta}^{-1}F_{n-1,\,m-1}\left(\frac{\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2}\right)-\widetilde{\mu_1}}{\widetilde{\sigma_1}}\right) \tag{65}$$

Bajo la misma aproximación $F_{n-1,\,m-1}(a) \approx \widetilde{\sigma_1}\, Z_a + \widetilde{\mu_1}$ y entonces (65) se transforma en:

$$1-\gamma \approx \Phi\left(\tilde{\theta}^{-1} Z_{1-\frac{\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2}} + \frac{\widetilde{\mu_1}(\tilde{\theta}^{-1}-1)}{\widetilde{\sigma_1}}\right) - \Phi\left(\tilde{\theta}^{-1} Z_{\frac{\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma)}{2}} + \frac{\widetilde{\mu_1}(\tilde{\theta}^{-1}-1)}{\widetilde{\sigma_1}}\right) \tag{66}$$

Utilizando la aproximación logística de la distribución normal de Bowling et al. [2009] y procediendo de nuevo como en (12) se obtiene que para $0<\gamma<1$:

$$\widetilde{\Pi}_{1,\theta}(\gamma) = 2\left(1-\Phi\left(-\tilde{\theta}\,\frac{\ln(\kappa_{12}(\tilde{\theta},n,\gamma))}{1.702\tilde{\theta}}\right)\right) \tag{67}$$

Con $\kappa_{10}(\tilde{\theta},n,\gamma) = \frac{\gamma-1}{2(2-\gamma)}\,\xi_2(\tilde{\theta},n) + \frac{1}{2(2-\gamma)}\sqrt{(1-\gamma)^2\xi_2^2(\tilde{\theta},n)+4\gamma(2-\gamma)}$ y $\xi_2(\tilde{\theta},n) = e^{1.702\frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\theta}^{-1}-1)} + e^{-1.702\frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\theta}^{-1}-1)}$.

Cumpliéndose de nuevo que las medianas quedan determinadas por el tamaño de muestra y la relación entre los valores del parámetro y el valor de referencia de la hipótesis nula.

3. CONCLUSIONES

En el caso de las Pruebas Paramétricas en Poblaciones Normales:

(1) Por la asimetría de la distribución, la mediana de los valores p es la mejor forma de representar el valor central de su distribución.

(2) Los percentiles y en particular el coeficiente de asimetría permiten caracterizar el efecto del tamaño de muestra y del valor del parámetro sobre el comportamiento de las Pruebas de Significación.

(3) Los percentiles y sobre todo la mediana de la distribución pueden constituirse en un elemento más en el proceso de determinación del tamaño de muestra. Cálculo que, por la relación entre la función de potencia y la función de distribución del valor p, puede plantearse de forma equivalente a la usual en términos de la mediana del valor p.

(4) En todos los casos el valor de la mediana de la distribución del valor p queda determinado por el tamaño de muestra y la relación entre los valores del parámetro y el valor de referencia de la hipótesis nula, por lo que es posible caracterizar cada α-prueba con una potencia dada utilizando la mediana del valor p.

(5) El comportamiento de la distribución del valor p bajo la hipótesis alternativa permite caracterizar su fortaleza para aceptar valores en la alternativa, sobre todo en el caso en que estos valores representen cambios pequeños o poco relevantes respecto a lo establecido en la hipótesis nula con lo que se puede prevenir la aceptación de efectos espurios.

(6) Las distribuciones obtenidas pueden ser utilizadas para realizar simulaciones del comportamiento del valor p, lo que pudiera ser útil para mostrar el carácter aleatorio del valor p en las clases en que se enseña el tema.

RECEIVED JULY, 2014
REVISED NOVEMBER, 2014

REFERENCIAS

[1] BATTACHARYA B. and HABTZGHI D. (2002): Median of the P value under the alternative hypothesis. **The American Statistician**, 56, 202-206.

[2] BOWLING S. H. KHASAWNEH M., KAEWKUEKOOL S. and RAE CHO B. (2009): A logistic approximation to the cumulative normal distribution. **Journal of Industrial Engineering and Management**, 2, 114-127.

[3] BRUDETTE W. J. and GEHAN. EA. (1970): **Planning and Analysis of Clinical Studies**. Charles C Thomas, Spingfield IL.

[4] CHMURA KRAEMER H., and PAIK M. (1979): A central t approximation to the noncentral t distribution. **Technometric**, 21, 357-360.

[5] DEMPSTER A.P. and SCHATZOFF M. (1965): Expected significance level as a sensitivity index for test statistics**. Journal of the American Statistical Association**., 60, 420-436.

[6] HUBBARD R., and BAYARRI M. (2003): Confusion over measures of evidence versus errors in classical statistical testing. **The American Statistician**, 57, 171-182.

[7] HUNG J, ONEIR R, BAUER P, and KOHNE K. (1997): The behavior of the P-value when the alternative hypothesis is true. **Biometrics**, 53, 11-22.

[8] INTERNATIONAL COMITEE OF MEDICAL JOURNAL EDITORS. (2014) Recommendations for the Conduct, Reporting, Editing, and Publication of Scholarly work in Medical Journals: Manuscript Preparation. Preparing for Submission. Available in **http://www.icmje.org/recommendations/browse/manuscript-preparation/preparing-for-submission.html. Consulted 26/10/2014.**

[9] JOHNSON N. and WELCH B. (1940): Applications of the non-central t distribution. **Biometrika**, 31, 362-89.

[10] LAMBERT D. and HALL W. J. (1982): Asymptotic log-normality of p-values. **The Annals of Statistics**, 10, 44-64.

[11] MONTERREY, P. (2012): $p < 0.05$. ¿Criterio mágico para resolver cualquier problema o leyenda urbana? **Universitas Scientiarum**, 17, 203-215.

[12] ROYAL, R. (1986): The effect of simple size on the meaning of significance test. **The American Statistician**, 40, 313-324.

[13] SACKROWITZ H. and SAMUEL-CAHAN, E. (1999): P values as random variables. Expected p-values. **The American Statistician**, 53, 326-331.

[14] SEVERO N. and ZELEN M. (1960): Normal approximation to the chi-square and non-central F probability functions. **Biometrika**, 3/4, 411-416.

[15] SCHERVISH, M (1996): P-values. What they are and what they are not? **The American Statistician**, 50, 203-206.

[16] STERNE J, and SMITH G (2001): Sifting the evidence –what´s wrong with significance test? **British Medical Journal**, 322, 226-231.

[17] WILSON E. and HILFERTY M. (1931): The distribution of chi-square. **Proceedings National Academy of Sciences**, 17, 684-688.