

UN NUEVO MODELO PARA AGREGACIÓN DE PREFERENCIAS MULTICRITERIO BASADO EN LÓGICA DIFUSA

*Eduardo R. Fernández¹, *Jorge A. Navarro, *Julio C. Picos², **Rafael A. Espín

*Universidad Autónoma de Sinaloa, Culiacán, Sinaloa, México

**Universidad Autónoma de Coahuila, Torreón, Coahuila, México

ABSTRACT

There are cases in which the model used by the multicriteria decision making method ELECTRE III calculates values of outranking credibility which do not adhere to the common sense of a real decision maker. This work proposes a new model for the construction of fuzzy outranking relations. The model is derived as a compound predicate that integrates statements expressed in natural language and with the use of fuzzy logic calculates the degree of truth of the outranking relation aSb , to provide results more consistent with human reasoning.

KEYWORDS: Multiple criteria analysis; Fuzzy outranking relations; Fuzzy logic.

RESUMEN

Hay ciertos casos en que el modelo utilizado por el método de decisión multicriterio ELECTRE III calcula valores de credibilidad del predicado de no inferioridad que no se apegan al sentido común de un decisor real. En este trabajo se propone un nuevo modelo para la construcción de las relaciones de no inferioridad difusas. Este modelo se deriva como un predicado compuesto que integra enunciados que se expresan en lenguaje natural y con el uso de la lógica difusa se calcula el grado de credibilidad de la relación de no inferioridad aSb , con la finalidad de que los resultados que entregue el modelo sean más consistentes con el razonamiento humano.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los métodos más utilizados y estudiados para la ayuda a la toma de decisiones es la familia de métodos ELECTRE (por ejemplo [1], [20] y [21]). Estos métodos permiten ofrecer una recomendación que ayude en la toma de decisiones a la entidad considerada como “decision maker” (DM), dependiendo de la problemática que se esté analizando (selección, clasificación u ordenamiento) [26].

El uso de esta familia de métodos es relevante bajo el siguiente contexto [15]:

- El DM quiere incluir en el modelo al menos tres criterios.
- La información puede ser ambigua, vaga o contradictoria.

Al menos una de las siguientes situaciones se tiene que cumplir:

- Las acciones se evalúan (por al menos un criterio) en escalas ordinales.
- Existe una fuerte heterogeneidad en la naturaleza de los criterios.
- Compensación entre criterios no se acepta generalmente.
 - Para al menos un criterio lo siguiente es verdadero: pequeñas diferencias en las evaluaciones no son significantes en términos de preferencia, mientras que la acumulación de muchas pequeñas diferencias se vuelven significantes.

De manera general, estos métodos cuentan con dos etapas [26]: construcción y explotación. La etapa de construcción se encarga de comparar pares de las posibles acciones o alternativas que se estén estudiando, atendiendo a un conjunto de criterios considerados importantes y que deben ser tomados en cuenta para tomar una decisión. En esta etapa se construyen las relaciones de no inferioridad de manera comprensiva entre cada par de alternativas posibles. En la etapa de explotación, la cual utiliza la información obtenida en la primera etapa, se obtiene una recomendación según la problemática que se esté tratando de resolver.

¹ eddyf@uas.edu.mx

² jc.picos13@info.uas.edu.mx

En la etapa de construcción de ELECTRE III se construyen relaciones de no-inferioridad difusas $aS_{\sigma}b$; se asigna un valor de credibilidad $\sigma \in [0,1]$ a la afirmación “la alternativa a es al menos tan buena como la alternativa b ” (aSb). En un experimento que consistió en un cuestionario realizado a un conjunto de estudiantes universitarios que hicieron el papel del DM, se observó que en ciertas situaciones el modelo que utiliza ELECTRE III para construir estas relaciones de no-inferioridad calcula valores de credibilidad que no se apegan al sentido común. Esto es debido principalmente a dos factores:

- 1) El método para agregar la información que especifica el modelo ELECTRE III no necesariamente modela la manera en que un decisor real compara las alternativas [28] y
- 2) Que el modelo no toma en cuenta cuando existe intensidad significativa a favor de la preferencia, ni tampoco cuando existe intensidad significativa en contra de ella producto de coaliciones de criterios, ninguno de los cuales alcanza el umbral de veto. También la comparación de la fuerza de las coaliciones a favor y en contra de la relación de no-inferioridad juega un rol significativo.

En [22], Mosseau y Dias proponen una modificación a este modelo, pero el objetivo es simplificar los cálculos del modelo existente solamente. En [27], Roy y Slowinski proponen un nuevo modelo donde se toman en cuenta dos nuevos efectos que se presentan: preferencias reforzadas y contra-veto. En esta nueva propuesta ya se toma en cuenta la intensidad a favor de la preferencia pero tiene la característica de añadir más parámetros al modelo. Además, no justifica de una manera lógica el método utilizado y sigue sin tomar en cuenta cuando existe intensidad significativa en contra de la preferencia producto de coaliciones.

En este trabajo se propone un nuevo modelo para la etapa de construcción de las relaciones de no inferioridad difusas. Este modelo se deriva como un predicado compuesto que integra enunciados que se expresan en lenguaje natural. Se hace uso de la lógica difusa para representar a estos predicados y para calcular el grado de credibilidad $\sigma(aSb)$ que se asocia al predicado de no-inferioridad para cada par de alternativas.

En la sección 2 se describen las definiciones y conceptos básicos. En la sección 3 se presenta el nuevo modelo, en la sección 4 se presentan los resultados preliminares y por último, en la sección 5 se presentan las conclusiones y el trabajo pendiente por realizar.

2. DEFINICIONES Y CONCEPTOS BÁSICOS

Con el fin de entender el modelo propuesto, es necesario especificar lo siguiente:

Alternativas: En un proceso de decisión multicriterio, las alternativas corresponden a las posibles acciones u opciones que se tienen en consideración. Se define de la siguiente manera [26]:

Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ el conjunto finito de decisión con posibles acciones o alternativas, donde $|A|=m, m \in \mathbb{N}$.

Familia coherente de criterios: Los criterios de evaluación deben estar diseñados para capturar la naturaleza multidimensional del desempeño de las alternativas. Al elegir una familia de criterios para evaluar al conjunto de alternativas, ésta debe ser legible, exhaustiva y no redundante. Se define de la siguiente manera [26]:

Sea $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ una familia consistente de criterios, donde $g_j(a)$ es la evaluación en el j -ésimo criterio de la alternativa a , donde $a \in A, g_j(a) \in \mathfrak{R}^+$ y $|G|=n, n \in \mathbb{N}$.

Pesos: Determinan la importancia relativa que tiene cada criterio de evaluación respecto al decisor. Se definen de la siguiente manera [26]:

Sea $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ el conjunto de pesos, donde $w_j \in [0,1]$ denota la importancia del j -ésimo criterio g_j , donde $g_j \in G$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$.

Es importante aclarar que esta información se asume como existente y servirá como información de entrada del nuevo modelo.

2.1 Situaciones de preferencia básicas

A continuación se describen las situaciones que se pueden presentar al comparar dos posibles acciones [25]:

- **Indiferencia (I):** Corresponde a la existencia de razones claras y positivas que justifican la equivalencia entre dos acciones. Se representa con la relación binaria I de la manera siguiente:

$$aIb = bIa: a \text{ y } b \text{ son indiferentes.}$$

- **Preferencia estricta (P):** Corresponde a la existencia de razones claras y positivas que justifican preferencia significativa a favor de una (identificada) de las dos acciones. Se representa con la relación binaria P de la manera siguiente:

aPb : a es estrictamente preferida sobre b ,
 bPa : b es estrictamente preferida sobre a .

- **Preferencia débil (Q):** Corresponde a la existencia de razones claras y positivas que invalidan la preferencia estricta sobre una (identificada) de las dos acciones pero que son insuficientes para deducir ya sea preferencia estricta sobre la otra acción o indiferencia entre las dos acciones, por lo tanto no permitiendo que cualquiera de las dos situaciones se distinga como apropiada. Se representa con la relación binaria Q de la manera siguiente:

aQb : a es débilmente preferida sobre b , se presenta cuando existe duda entre aIb y aPb (estando seguro que no se presenta bPa),
 bQa : b es débilmente preferida sobre a , se presenta cuando existe duda entre aIb y bPa (estando seguro que no se presenta aPb).

- **Incomparabilidad (R):** Corresponde a la ausencia de razones claras y positivas que justifiquen cualquiera de las tres relaciones anteriores. Se representa con la relación binaria R de la manera siguiente:

$aRb = bRa$: a y b son incomparables, se presenta cuando no se justifica la existencia de aPb , aIb , aQb , bPa ni bQa .

2.2 Relación de no - inferioridad

La relación (aSb) que se lee: “la opción a es al menos tan buena como la opción b desde el punto de vista del DM” la llamaremos *relación de no-inferioridad*. Se representa como $\sigma(aSb) \in [0,1]$ al grado de credibilidad asociado a la relación (aSb).

Hablando en términos de situaciones de preferencia se define la relación de no-inferioridad aSb como:

$$aSb \Leftrightarrow aPb \vee aQb \vee aIb \quad (1)$$

Esto significa que se considera que se cumple que “ a es al menos tan buena como b ” si y solo si se presenta una situación de preferencia estricta o una preferencia débil o una indiferencia de a con respecto a b .

3. EL NUEVO MODELO

En lógica difusa [17], un valor de verdad es un valor que indica en qué medida una declaración es verdad. Es cualquier número real en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Por ejemplo, el valor cero se considera como totalmente falso y el valor uno como totalmente cierto.

La idea principal del modelo propuesto es simular la manera lógica en la que un decisor real compara dos alternativas respecto a los criterios de decisión y le asigna un valor de verdad a aSb . Derivado de la manera intuitiva en la que un decisor real hace esta comparación, de forma general se perciben los siguientes pasos para evaluar $\sigma(aSb)$:

- 1.- *Criterios a favor de a:* Identificar los criterios que están a favor de a con respecto a b . Dentro de estos criterios identificar, si los hay, cuáles presentan una intensidad considerable.
- 2.- *Criterios en contra de a:* Identificar los criterios que están a favor de b . Dentro de estos criterios identificar, si los hay, cuáles presentan una intensidad considerable.
- 3.- *Criterios indiferentes entre a y b:* Identificar los criterios en los cuáles se consideran indiferentes las alternativas a y b .
- 4.- *Verificar condiciones de veto.* En caso de que existan criterios con capacidad de veto identificar si alguno lo presenta. Si no es el caso, verificar que la cantidad de criterios en contra de a con intensidad considerable es significativa, de tal manera que se perciba un efecto de veto por la coalición de criterios en contra de a .
- 5.- Para que un decisor acepte la veracidad de aSb se debe cumplir que no se presente ningún efecto de veto y cualquiera de los siguientes tres casos:
 - *Preferencia estricta:* La cantidad de criterios a favor de a debe ser significativa. Además, debe existir a favor una diferencia (asimetría) clara de la cantidad de criterios a favor de a sobre la cantidad de criterios en contra de a . En caso de que la diferencia no se perciba tan clara, verificar que la cantidad de criterios a favor de a con intensidad considerable sea significativa y mayor que la cantidad de criterios en contra de a con intensidad considerable. Por último se debe verificar que la cantidad de criterios en contra de a no provoque incomparabilidad.

- *Preferencia débil*: Existe una diferencia (asimetría) débil entre la cantidad de criterios a favor de a sobre la cantidad de criterios en su contra; además la cantidad de criterios en que a y b se consideran indiferentes es significativa. Por último se debe verificar que la cantidad de criterios en contra de a no provoque incomparabilidad.

- *Indiferencia*: Se debe cumplir que la cantidad de criterios en que a y b se consideran indiferentes es significativa. Además, debe existir un equilibrio entre las cantidades de criterios a favor y en contra de a .

Para modelar las relaciones de preferencia (expresadas en lenguaje natural), se propone el uso de la lógica difusa con el fin de obtener una representación formal.

3.1 Coaliciones de criterios

Para realizar los pasos 1-3 anteriormente mencionados, se definen, para cada par de alternativas $a \in A$ y $b \in A$ las siguientes coaliciones de criterios:

- $C_{FAVOR}(a,b)$: conjunto de criterios sobre los cuáles $g_j(a)-g_j(b) \geq p_j$, donde $p_j \in \mathfrak{R}^+$ es el *umbral de preferencia estricta*.
- $C_{INDIF}(a,b)$: conjunto de criterios sobre los cuáles $|g_j(a)-g_j(b)| \leq q_j$, donde $q_j \in \mathfrak{R}^+$ es el *umbral de indiferencia* y $q_j < p_j$.
- $C_{CONTRA}(a,b)$: conjunto de criterios sobre los cuáles $g_j(a)-g_j(b) \leq -p_j$.
- $C_{FAVOR_INT}(a,b)$: conjunto de criterios sobre los cuáles $g_j(a)-g_j(b) \geq r_j$, donde $r_j \in \mathfrak{R}^+$ es el *umbral de preferencia intensa*, $s_j \in \mathfrak{R}^+$ es el *umbral de preferencia pre-intensa*, $p_j < s_j < r_j$ y $C_{FAVOR_INT}(a,b) \subseteq C_{FAVOR}(a,b)$.
- $C_{CONTRA_INT}(a,b)$: conjunto de criterios sobre los cuáles $g_j(a)-g_j(b) \leq -r_j$, donde $-r_j < -s_j < -p_j$ y $C_{CONTRA_INT}(a,b) \subseteq C_{CONTRA}(a,b)$.
- $C_{VETO}(a,b)$: conjunto de criterios que tienen capacidad de veto y sobre los cuáles $g_j(a)-g_j(b) \leq -v_j$, donde $v_j \in \mathfrak{R}^+$ es el *umbral de veto* y $-v_j < -r_j < -s_j$.

3.2 Pertenencia de criterios en las coaliciones.

Para modelar la pertenencia de los criterios en las coaliciones definidas en la sección 3.1, se tiene que para *cada par* de acciones $a \in A$ y $b \in A$ se definen conjuntos difusos con las siguientes funciones de membresía trapezoidales:

a) **Conjunto difuso de $C_{FAVOR}(a,b)$:**

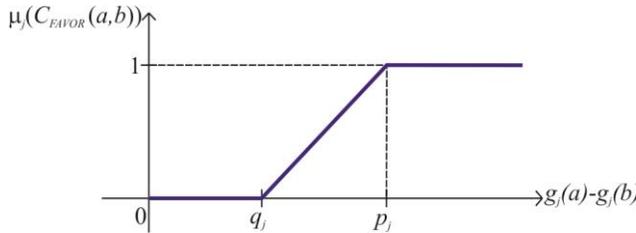


Figura 1 - Función de membresía $\mu_j(C_{FAVOR}(a,b))$

b) **Conjunto difuso de $C_{INDIF}(a,b)$:**

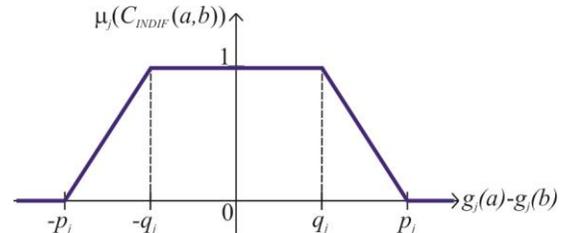


Figura 2 - Función de membresía $\mu_j(C_{INDIF}(a,b))$

c) **Conjunto difuso de $C_{CONTRA}(a,b)$:**

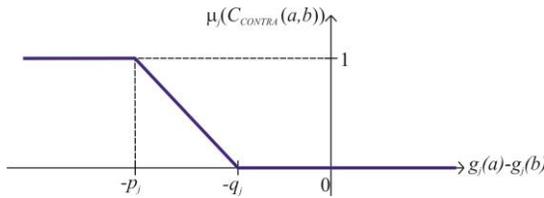


Figura 3 - Función de membresía $\mu_j(C_{CONTRA}(a,b))$

d) **Conjunto difuso de $C_{FAVOR_INT}(a,b)$:**

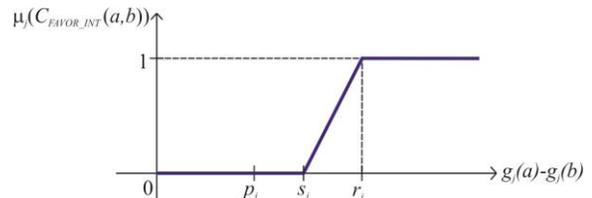


Figura 4 - Función de membresía $\mu_j(C_{FAVOR_INT}(a,b))$

e) **Conjunto difuso de $C_{CONTRA_INT}(a,b)$:**

f) **Conjunto difuso de $C_{VETO}(a,b)$:**

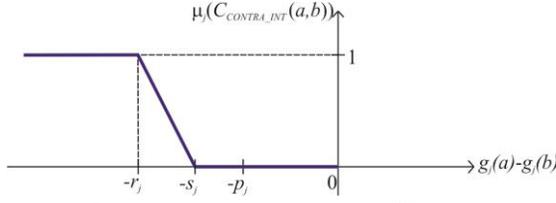


Figura 5 - Función de membresía $\mu_j(C_{CONTRA_INT}(a,b))$

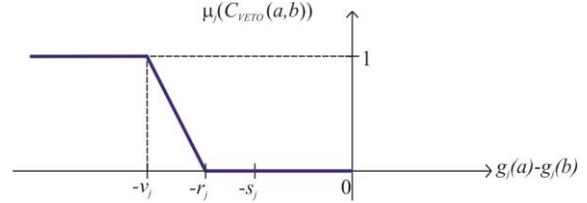


Figura 6 Función de membresía $\mu_j(C_{VETO}(a,b))$

En la Figura 7 se muestran las funciones de membresía de todos los conjuntos difusos definidos anteriormente:

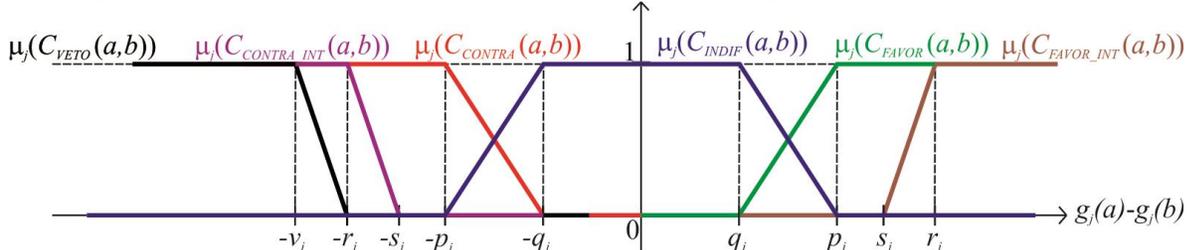


Figura 7 - Funciones de membresía de los conjuntos difusos definidos sobre $C_{VETO}(a,b)$, $C_{CONTRA_INT}(a,b)$, $C_{CONTRA}(a,b)$, $C_{INDIF}(a,b)$, $C_{FAVOR}(a,b)$ y $C_{FAVOR_INT}(a,b)$

3.3 Índices de fuerza de las coaliciones

El objetivo de estos índices es el de representar la fuerza de cada una de las coaliciones definidas en la sección 3.1. Esta fuerza representa la cantidad de criterios que pertenecen a cada coalición y está ligada directamente con los pesos definidos en la sección 2. Así, el determinar si existe alguna preferencia o indiferencia entre las alternativas dependerá de los valores de estos índices así como del resultado de compararlos de una manera lógica similar a la que un DM real lo haría. De acuerdo a esto, e inspirado en los conceptos manejados por Ostanello en [23], tenemos que para cada par de acciones $a \in A$ y $b \in A$ se definen los siguientes índices:

a) Índice de preferencia a favor $J^+(a,b)$:

$$J^+(a,b) = \sum_{j=1}^n \mu_j(C_{FAVOR}(a,b)) \cdot w_j \quad (2)$$

b) Índice de indiferencia $J^=(a,b)$:

$$J^=(a,b) = \sum_{j=1}^n \mu_j(C_{INDIF}(a,b)) \cdot w_j \quad (3)$$

c) Índice de preferencia en contra $J^-(a,b)$:

$$J^-(a,b) = \sum_{j=1}^n \mu_j(C_{CONTRA}(a,b)) \cdot w_j \quad (4)$$

d) Índice de preferencia intensa a favor $J^{+INT}(a,b)$:

$$J^{+INT}(a,b) = \sum_{j=1}^n \mu_j(C_{FAVOR_INT}(a,b)) \cdot w_j \quad (5)$$

e) Índice de preferencia intensa en contra $J^{-INT}(a,b)$:

$$J^{-INT}(a,b) = \sum_{j=1}^n \mu_j(C_{CONTRA_INT}(a,b)) \cdot w_j \quad (6)$$

f) Índice de veto $J_{VETO}(a,b)$:

$$J_{VETO}(a,b) = \neg \left(\left(\mu_1(C_{VETO}(a,b)) \right) \vee \left(\mu_2(C_{VETO}(a,b)) \right) \vee \dots \vee \left(\mu_n(C_{VETO}(a,b)) \right) \right) \quad (7)$$

3.4 Argumentos para considerar la existencia de las relaciones de preferencia

El análisis para determinar los argumentos necesarios para la existencia de las relaciones de preferencia básicas se hace en varios niveles de abstracción: de las condiciones más generales a las condiciones más específicas que involucran a los índices de fuerza de las coaliciones definidos en la sección 3.3. Estas condiciones se definen atendiendo a la manera intuitiva en la que un DM real percibe estas relaciones de preferencia.

A continuación se proponen los niveles antes mencionados:

a) Nivel 1

Es el nivel más general. En este nivel se definen los argumentos que determinan la existencia de la relación de preferencia. Los argumentos para este nivel son:

Existe una relación de preferencia si se cumple que:

- 1.- Existen condiciones a favor de la relación de preferencia y
- 2.- No existen condiciones en contra de la relación de preferencia.

b) Nivel 2

Es el nivel intermedio. En este nivel se definen los argumentos que determinan las condiciones a favor de la existencia de la relación de preferencia así como los argumentos que determinan las condiciones en contra de la existencia de la relación de preferencia. Los argumentos para este nivel son:

Existen condiciones a favor de la relación de preferencia si se cumple que:

- 1.- La fuerza de la coalición de criterios de interés para la relación de preferencia debe ser significativa (por ejemplo, si la relación de preferencia que se está analizando es la de indiferencia, la coalición de criterios indiferentes debe ser significativa).
- 2.- Se debe presentar un tipo de diferencia (asimetría) entre las fuerzas de las coaliciones a favor y en contra de la relación de preferencia.

No existen condiciones en contra de la relación de preferencia si se cumple que:

- 1.- No existen condiciones que provoquen algún tipo de veto.

c) Nivel 3

Es el nivel inferior. En este nivel se definen los argumentos necesarios para que se cumplan cada uno de los argumentos del nivel 2 utilizando los valores de los índices de fuerza de las coaliciones definidos en la sección 3.3.

A continuación se presentan los argumentos para determinar la existencia de las relaciones de preferencia básicas. Estos argumentos son una propuesta propia y se determinaron mediante el análisis intuitivo de la manera en la que un decisor evalúa si existe o no una relación de preferencia, apoyado además de la aplicación de la ingeniería del conocimiento a un experto en el tema.

3.4.1 Argumentos para la existencia de una relación de preferencia estricta

En la Figura 8 se resumen los 3 niveles de argumentación para determinar la existencia de una preferencia estricta aPb .

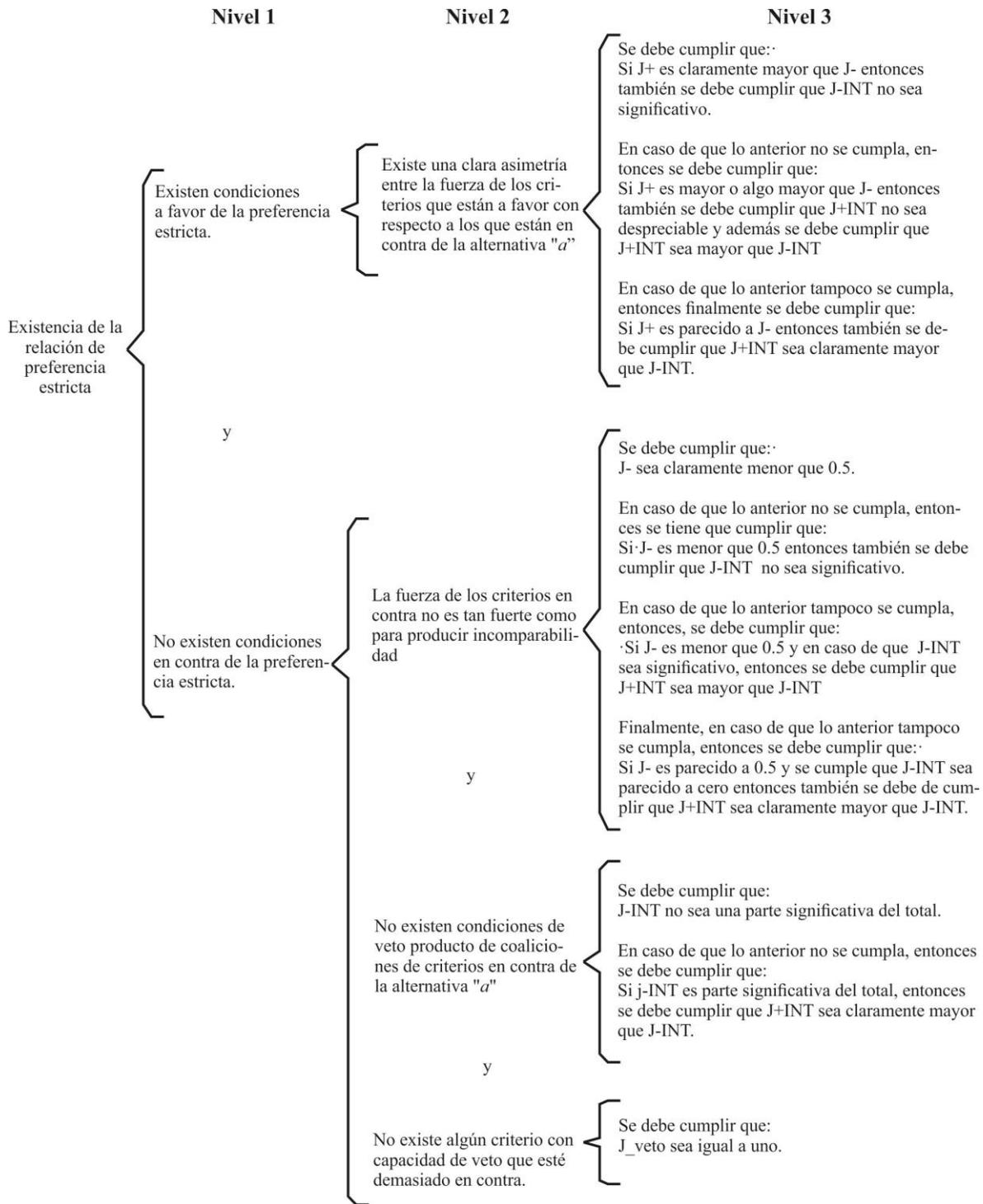


Figura 8 - Argumentos propuestos por el autor para determinar la existencia de una preferencia estricta aPb

3.4.2 Argumentos para la existencia de una relación de indiferencia

En la Figura 9 se resumen los 3 niveles de argumentación para determinar la existencia de una relación de indiferencia aIb.

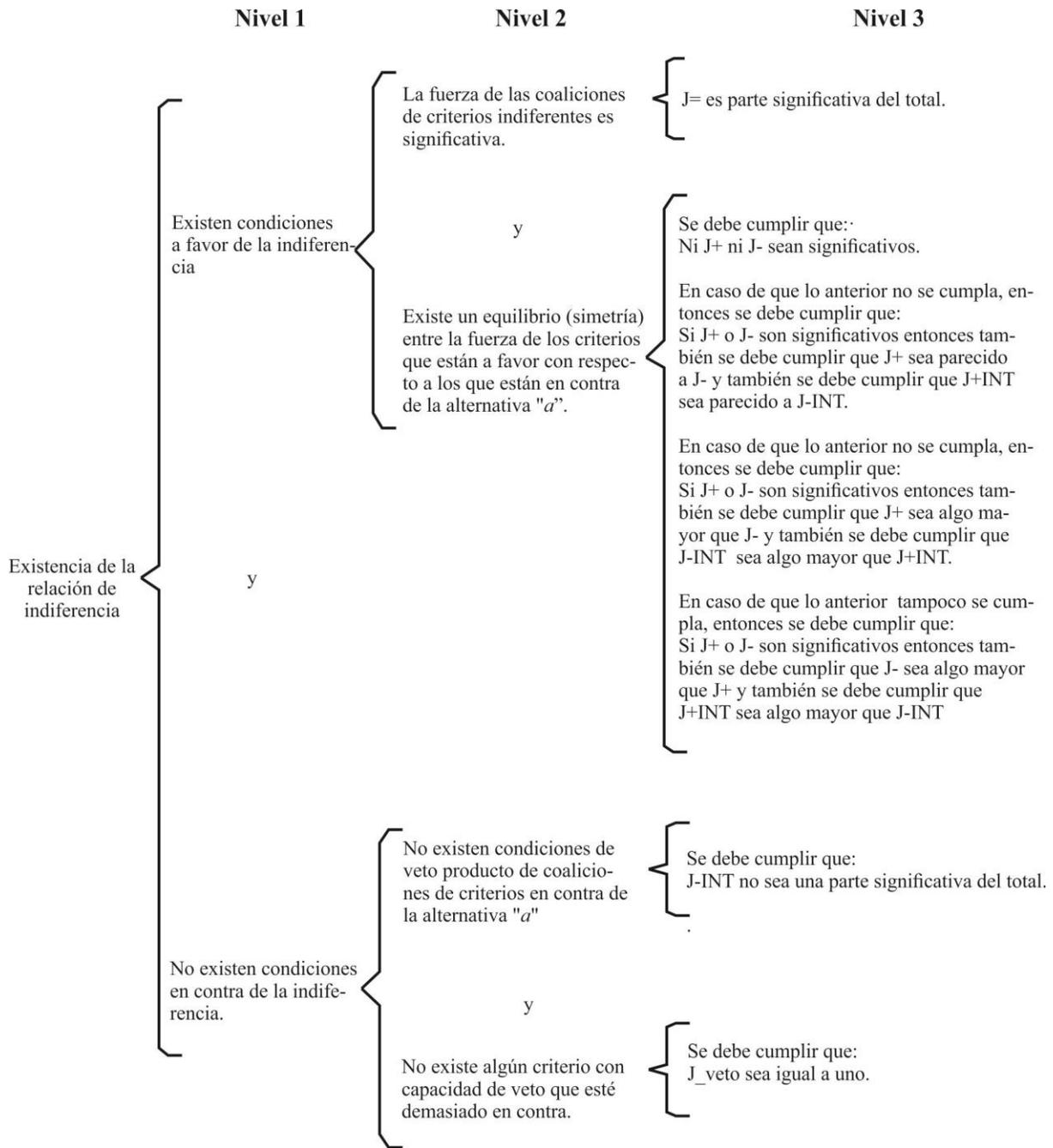


Figura 9 - Argumentos propuestos por el autor para determinar la existencia de una relación de indiferencia aIb

3.4.3 Argumentos para la existencia de una relación de preferencia débil

De acuerdo a la definición de la relación de preferencia débil de la sección 2.1 en la cual se establece que una relación de indiferencia aQb se presenta cuando existe duda entre aIb y aPb , estando seguro que no se presenta bPa , se puede determinar la existencia de la relación de preferencia débil de acuerdo a los siguientes argumentos:

Se presenta una relación de preferencia débil si se cumple que:

- 1.- Los valores de verdad asociados a aPb y aIb son mayores que cero y de magnitud comparable (duda entre aPb y aIb) y
- 2.- El valor de verdad asociado a bPa es cercano a cero, o en cualquier caso, claramente menor que el de aPb .

3.4.4 Argumentos para la existencia de una relación de incomparabilidad

De acuerdo a la definición de la relación de incomparabilidad de la sección 2.1 en la cual se establece que una relación de incomparabilidad aRb se presenta cuando no se justifica la existencia de aPb , aIb ni aQb , se puede determinar la existencia de la relación de incomparabilidad de acuerdo a los siguientes argumentos:

Se presenta una relación de incomparabilidad aRb si se cumple que:

1.- Los valores de verdad asociados a aPb , aIb , aQb , bPa y bQa son cercanos a cero.

3.5 Modelado de las comparaciones entre índices

En la sección 3.4 se observa que en el nivel 3 se utilizan predicados que están compuestos de diversas comparaciones entre los índices definidos en la sección 3.3. Entre estas comparaciones tenemos:

- x es claramente menor que y
- x es menor que y
- x es parecido a y
- x es algo mayor que y
- x es mayor que y
- x es claramente mayor que y
- x es parte significativa de la unidad
- x es parte despreciable de la unidad

Donde $x, y \in [0,1]$ representan a los índices de fuerza de las coaliciones.

Para modelar estas comparaciones se proponen los siguientes parámetros:

- α : umbral que determina que x, y son parecidos, donde $0 < \alpha \leq 0.05$
- β : umbral que determina cuando x es mayor que y , donde $\alpha < \beta \leq 0.10$
- γ : umbral que determina cuando x empieza a ser claramente mayor que y , donde $\beta < \gamma \leq 0.2$
- δ : umbral que determina cuando x es claramente mayor que y , donde $\gamma < \delta \leq 0.5$
- ε : umbral que determina cuando x empieza a ser parte significativa del total, donde $0 < \varepsilon \leq 0.25$
- ζ : umbral que determina cuando x es parte significativa del total, donde $\varepsilon < \zeta \leq 0.50$

A continuación se proponen una serie de funciones que caracterizan a estas comparaciones. Después de un análisis de distintas funciones, se optó por utilizar las funciones sigmoideas, ya que no se produce saturación de la función ante valores de entrada que dan como resultado de la función valores cercanos a uno, ni excesiva atenuación de la función ante valores de entrada que dan como resultado de la función valores cercanos a cero [29]. A partir de los parámetros propuestos anteriormente se definen las comparaciones entre en los índices de fuerza con las funciones sigmoideas siguientes:

a) $\mu_{\ll}(x, y; \gamma, \delta): [-1,1] \rightarrow [0,1]$, x es claramente menor que y

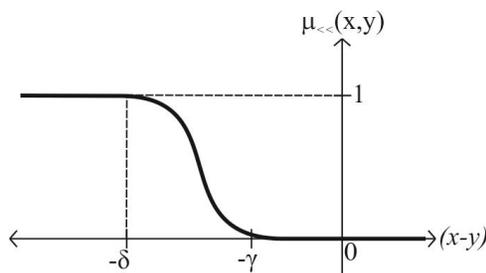


Figura 1 - Función $\mu_{\ll}(x,y; \gamma, \delta)$

b) $\mu_{<}(x, y; \alpha, \beta): [-1,1] \rightarrow [0,1]$, x es menor que y

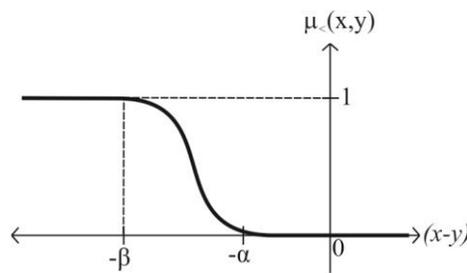


Figura 2 - Función $\mu_{<}(x,y; \alpha, \beta)$

c) $\mu_{\sim}(x, y; \alpha, \beta): [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, x es parecido a y

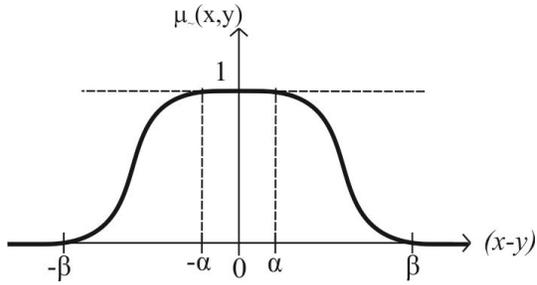


Figura 3 - Función $\mu_{\sim}(x, y; \alpha, \beta)$

d) $\mu_{\sim}(x, y; \alpha, \beta): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, x es algo mayor que y

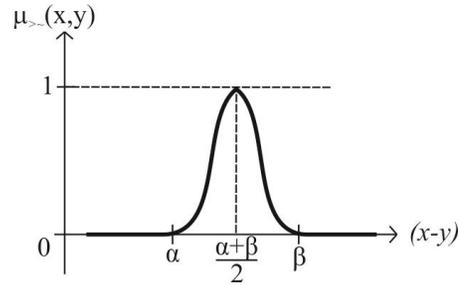


Figura 4 - Función $\mu_{\sim}(x, y; \alpha, \beta)$

e) $\mu_{>}(x, y; \gamma, \delta): [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, x es mayor que y

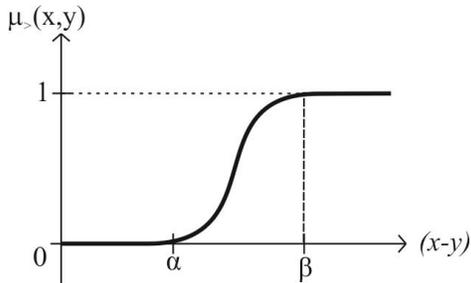


Figura 5 - Función $\mu_{>}(x, y; \alpha, \beta)$

f) $\mu_{>>}(x, y; \gamma, \delta): [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, x es claramente mayor que y

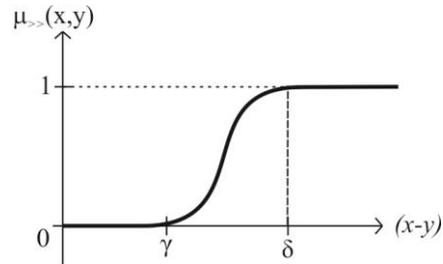


Figura 6 - Función $\mu_{>>}(x, y; \gamma, \delta)$

g) $\mu_{NEGL}(x; \alpha, \epsilon): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, x es parte despreciable de la unidad

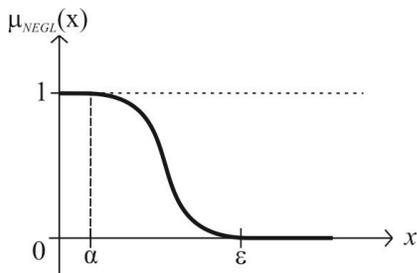


Figura 7 - Función $\mu_{NEGL}(x; \alpha, \epsilon)$

h) $\mu_{SIGNIF}(x; \epsilon, \zeta): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, x es parte significativa de la unidad

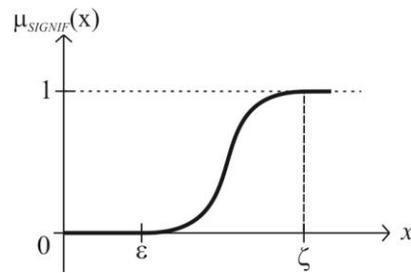


Figura 8 - Función $\mu_{SIGNIF}(x; \epsilon, \zeta)$

En la Figura 98 y en la Figura 19 se resumen las funciones de comparación anteriormente descritas.

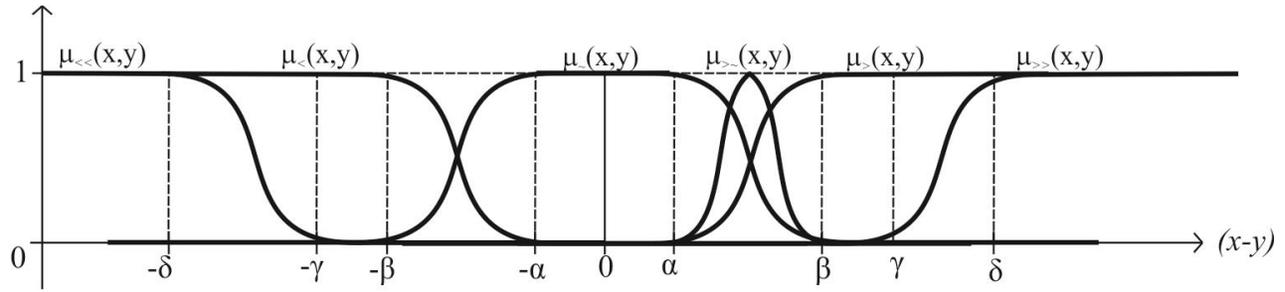


Figura 9 - Funciones de membresía $\mu_{\ll}(x,y)$, $\mu_{<}(x,y)$, $\mu_{<}(x,y)$, $\mu_{>}(x,y)$, $\mu_{>}(x,y)$ y $\mu_{\gg}(x,y)$

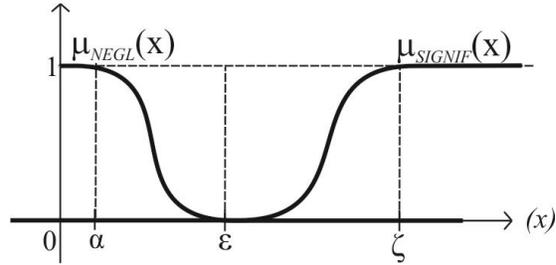


Figura 19 - Funciones de membresía $\mu_{\text{NEGL}}(x)$ y $\mu_{\text{SIGNIF}}(x)$

3.6 Cálculo de $\sigma(aSb)$

De acuerdo a la ecuación (1), el índice de credibilidad de la relación de no-inferioridad se calcula por la expresión:

$$\sigma(aSb) = \mu_P(a,b) \vee \mu_Q(a,b) \vee \mu_I(a,b) \quad (8)$$

Donde $\mu_P(a,b)$ expresa el grado de verdad de que se presente una preferencia estricta de a sobre b , $\mu_Q(a,b)$ expresa el grado de verdad de que se presente una preferencia débil de a sobre b y $\mu_I(a,b)$ expresa el grado de verdad de que se presente una indiferencia entre a y b .

Atendiendo a los índices de fuerza definidos en la sección 3.3, a los argumentos definidos en la sección 3.4 y a las funciones de comparación definidas en la sección 3.5 se tiene que:

Nivel 1:

$$\mu_P(a,b) = \mu_{P1}(a,b) \wedge \mu_{P2}(a,b) \quad (9)$$

$$\mu_I(a,b) = \mu_{I1}(a,b) \wedge \mu_{I2}(a,b) \quad (10)$$

$$\mu_Q(a,b) = [\mu_{<}(\mu_P(a,b), 0.5) \wedge \mu_{<}(\mu_I(a,b), 0.5)] \wedge \neg \mu_P(b,a) \quad (11)$$

Nivel 2:

$$\mu_{P1}(a,b) = \mu_{P11}(a,b) \quad (12)$$

$$\mu_{P2}(a,b) = \mu_{P21}(a,b) \wedge \mu_{P22}(a,b) \wedge \mu_{P23}(a,b) \quad (13)$$

$$\mu_{I1}(a,b) = \mu_{I11}(a,b) \wedge \mu_{I12}(a,b) \quad (14)$$

$$\mu_{I2}(a,b) = \mu_{I21}(a,b) \wedge \mu_{I22}(a,b) \quad (15)$$

Nivel 3:

$$\mu_{P11}(a,b) = [\mu_{\gg}(J^+, J^-) \wedge \neg \mu_{\text{SIGNIF}}(J^-)] \vee \quad (16)$$

$$[\mu_{>}(J^+, J^-) \wedge \mu_{>}(J^+_{\text{INT}}, J^-_{\text{INT}}) \wedge \neg \mu_{\text{SIGNIF}}(J^+_{\text{INT}})] \vee$$

$$[\mu_{<}(J^+, J^-) \wedge \mu_{\gg}(J^+_{\text{INT}}, J^-_{\text{INT}})]$$

$$\mu_{P21}(a,b) = [\mu_{\ll}(J^-, 0.5)] \vee$$

$$[\mu_{<}(J^-, 0.5) \wedge \neg \mu_{\text{SIGNIF}}(J^-_{\text{INT}})] \vee$$

$$[\mu_{\prec}(J, 0.5) \wedge \mu_{\text{SIGNIF}}(J_{\text{INT}}) \wedge \mu_{>}(J_{\text{INT}}^+, J_{\text{INT}})] \vee \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & [\mu_{\prec}(J, 0.5) \wedge \mu_{\sim}(J_{\text{INT}}, 0) \wedge \mu_{>>}(J_{\text{INT}}^+, J_{\text{INT}})] \\ \mu_{\text{P22}}(a,b) = & \neg \mu_{\text{SIGNIF}}(J_{\text{INT}}) \vee [\mu_{\text{SIGNIF}}(J_{\text{INT}}) \wedge \mu_{>>}(J_{\text{INT}}^+, J_{\text{INT}})] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\mu_{\text{P23}}(a,b) = J_{\text{VETO}} \quad (19)$$

$$\mu_{\text{I11}}(a,b) = \mu_{\text{SIGNIF}}(J^{\sim}) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\text{I12}}(a,b) = & \{ \neg \mu_{\text{SIGNIF}}(J^+) \wedge \neg \mu_{\text{SIGNIF}}(J^{\sim}) \} \vee \\ & \{ [\mu_{\text{SIGNIF}}(J^+) \vee \mu_{\text{SIGNIF}}(J^{\sim})] \wedge \\ & \{ [\mu_{\prec}(J^+, J) \wedge \mu_{\prec}(J_{\text{INT}}^+, J_{\text{INT}})] \vee [\mu_{>\sim}(J^+, J) \wedge \mu_{>\sim}(J_{\text{INT}}^+, J_{\text{INT}})] \vee \\ & [\mu_{>\sim}(J, J^+) \wedge \mu_{>\sim}(J_{\text{INT}}^+, J_{\text{INT}})] \} \} \\ \mu_{\text{I21}}(a,b) = & \neg \mu_{\text{SIGNIF}}(J_{\text{INT}}) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mu_{\text{I21}}(a,b) = \neg \mu_{\text{SIGNIF}}(J_{\text{INT}}) \quad (22)$$

$$\mu_{\text{I22}}(a,b) = J_{\text{VETO}} \quad (23)$$

3.7 Determinación del conjunto de operadores lógicos difusos

En la sección 3.6 se utilizan los operadores lógicos difusos de conjunción (\wedge), disyunción (\vee) y negación (\neg) en cada nivel.

Existen una infinidad de funciones de agregación que se pueden utilizar como operadores lógicos difusos [4]. Estos se agrupan en varias familias [10], tales como las medias, las normas y conormas triangulares, integrales de Choquet y Sugeno, sumas pesadas ordenadas (OWA operators), funciones mixtas entre las que destacan las uninormas, y muchas otras.

Se tienen las siguientes preguntas:

¿Cómo escoger la función de agregación más apropiada para aplicarse en un modelo específico?

¿Es una función de agregación suficiente, o se deben utilizar diferentes operadores de agregación en diferentes partes del modelo?

De acuerdo con [10], la función de agregación a escoger debe ser consistente con dos aspectos:

1.- La semántica del proceso de agregación. Esto quiere decir, que si se desea modelar una conjunción, funciones de agregación disyuntivas como, por ejemplo, las conormas triangulares, no son recomendables. La semántica también se refiere a las reglas que deba cumplir la función [17], como simetría, elemento neutro, elemento absorbente, asociatividad, conmutatividad, idempotencia, compensación, etc. y por último también se refiere a la interpretación que tengan los valores de entrada. La respuesta a estas cuestiones debe resultar en un número de propiedades matemáticas deseables y buscar qué familia de funciones de agregación las cumplen ya sea en su totalidad o la mayoría de ellas.

2.- Escoger el miembro apropiado de la familia de funciones. Este miembro debe producir salidas adecuadas para ciertas entradas dadas. Se debe esperar que el diseñador del modelo deba tener una idea de los valores de salida apropiados para ciertos valores prototipo de entrada. Eso lleva a la conclusión de que se debe realizar un ajuste de la función a ciertos valores. El diseñador del modelo puede preguntar a expertos en el tema para que den su opinión sobre los valores que deben tener las salidas para ciertos valores de entrada seleccionados. Esto puede llevarse a cabo presentando a los expertos ciertos casos de interés, ya sea como vectores de entrada, preguntas en forma de cuestionario, etc.

En caso de que exista más de un experto, los valores de salidas que den se pueden agregar usando el promedio, la moda, etc. o se pueden reunir entre ellos y llegar a un consenso.

También, si la semántica lo permite, se pueden recolectar datos de un experimento, en forma de cuestionario, preguntando a un conjunto común de personas o expertos para que expresen su opinión sobre los valores de las salidas sobre ciertas entradas, pero sin que se asocien estos valores con algún contexto o alguna regla de agregación. Por ejemplo, un experimento interesante reportado en [30] y [31], consistió en preguntar a un grupo de personas acerca de los valores de pertenencia que le darían a diferentes objetos en los conjuntos difusos “metálico” y “contenedor” y después en el conjunto combinado “contenedor metálico”. El objetivo era determinar un modelo que describiera la intersección entre esos dos conjuntos difusos. A las personas se les hicieron las preguntas en 3 días separados, con el fin de que no construyeran de manera intuitiva algún modelo de agregación.

Por último también se puede recolectar información de manera automática, como por ejemplo presentando al usuario de una computadora cierta información y registrando sus acciones o decisiones.

En el caso más típico, los datos vienen en k pares (x,y) , donde $k \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]^n$ es el vector de entrada e $y \in [0,1]$ es la salida deseada. Sin embargo puede haber diferentes variaciones del conjunto de datos: a) algunos componentes del vector de entrada x_k pueden faltar, b) los vectores x_k pueden tener diferente dimensión por construcción y c) las salidas y_k pueden estar especificadas como un rango de valores.

Existen por supuesto otras cuestiones que se deben tomar en cuenta cuando se escoja un operador de agregación, tal como la simplicidad, eficiencia numérica, facilidad de interpretación, etc. No existen reglas generales, y queda al criterio del desarrollador del modelo la selección del operador de agregación.

Para el caso del modelo propuesto, se tomaron en cuenta la semántica y la opinión de expertos ante ciertos casos específicos y se procedió a la aproximación de los datos, con la ayuda del software gratuito “aotool”, desarrollado por Beliakov [10] específicamente para la selección de operadores de agregación de acuerdo a la aproximación de datos de entrada y salida.

3.7.1 Aspectos a considerar para la selección de los operadores de agregación en el modelo propuesto

La idea principal consiste en encontrar un operador de agregación que modele a la conjunción $(x \wedge y)$. Este operador debe cumplir con la propiedad de dualidad [10]. El operador de negación se fijará como la negación fuerte $\neg(x) = 1 - x$ para que la disyunción (\vee) se obtenga como el dual del operador de conjunción [17]: $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y) = 1 - [(1-x) \wedge (1-y)]$.

Al hacer una reflexión sobre los argumentos definidos en la sección 3.4, se llegó a la conclusión de que era necesario considerar un operador de agregación diferente para cada nivel ya que en cada uno el DM puede tomar una actitud distinta debido al contexto.

Se hace notar que para cada nivel el operador de agregación para la conjunción debe cumplir lo siguiente:

Nivel 1:

- Valores bajos de las entradas debe dar como resultado valores muy bajos en la salida.
- Valores altos en las entradas debe dar como resultado valores altos en la salida.
- Valores bajos y altos en las entradas no se deben compensar en el valor de salida.

Niveles 2 y 3:

- Valores bajos de las entradas debe dar como resultado valores bajos en la salida.
- Valores altos en las entradas debe dar como resultado valores altos en la salida.
- Para valores bajos e intermedios y/o altos en las entradas se permite cierto grado de compensación en el valor de salida.

Para obtener datos que permitan aproximar una función de agregación que modele la conjunción en cada nivel, se realizó un experimento a un experto para que diera valores de salida ante ciertos valores de entrada. Se le hicieron preguntas para cada nivel. Las preguntas tienen combinaciones de valores bajos, intermedios y altos en las entradas. En las siguientes tablas se muestran los resultados obtenidos:

A	B	A Y B
0.10	0.10	0.00
0.20	0.40	0.10
0.40	0.50	0.25
0.40	0.70	0.35
0.70	0.90	0.70
0.30	0.80	0.35
0.50	0.90	0.55
0.10	0.70	0.10
0.10	0.90	0.10
0.90	1.00	0.95

Tabla 1 - Resultados nivel 1

A	B	C	A Y B Y C
0.10	0.10		0.00
0.20	0.60		0.35
0.70	0.90		0.80
0.90	1.00		0.90
0.10	0.90		0.10
0.20	0.40	0.50	0.10
0.20	0.50	0.90	0.15
0.30	0.70	0.80	0.20
0.10	0.20	1.00	0.05
0.10	0.90	1.00	0.10

Tabla 2 - Resultados nivel 2

A	B	C	A Y B Y C
0.10	0.90		0.10
1.00	0.00		0.05
0.00	0.00		0.00
0.10	0.20		0.05
0.10	0.80	1.00	0.30
0.20	0.60		0.50
0.40	0.00		0.00
0.50	1.00		0.50
1.00	0.90		0.90
0.00	0.90		0.00
0.70	0.90		0.70
0.10	0.80		0.10
0.10	0.20	1.00	0.25
0.30	0.70	0.80	0.30
0.20	0.50	0.90	0.20

Tabla 3 - Resultados nivel 3

3.7.2 Aproximación de los datos para la obtención de los operadores de agregación

La aproximación de los datos se realizó con una herramienta de software gratuita desarrollada por Beliakov [10] llamada “AGGREGATION OPERATOR APROXIMATION ver 2.0”. Los detalles de los métodos implementados en este software se pueden encontrar en [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] y [9]. El objetivo de este software es la de asistir a investigadores en la identificación de operadores de agregación apropiados a partir de datos empíricos. Este software realiza tres tareas básicas:

- Carga y manipulación simple de los datos empíricos.
- Ajustar un modelo de agregación escogido a estos datos.
- Calcular valores de agregación utilizando un operador de agregación escogido.

El software se corrió en una computadora con las siguientes características:

- Sistema Operativo: Windows 8.1 64 bits
- Procesador: Intel i7-4710HQ quadcore @ 2.5Ghz
- Memoria RAM: 16GB DDR3L
- Tarjeta de video: Nvidia GForce GTX 970m

a) Aproximación de los datos para el nivel 1:

En la Tabla y en la Figura 10 se muestran los detalles del operador de agregación que mejor ajuste tuvo de los disponibles en el software. Se hace notar que el coeficiente de correlación de los datos es mayor de 0.99 para las familias paramétricas de Frank, Hamacher, Schweizer & Sklar, Dombi y Yager [10], lo cual indica que es una muy buena aproximación de los datos [10]. Cualquiera de esos operadores es apropiado para modelar el operador de agregación del nivel 1. Por simplicidad de cálculo, se utilizará el operador de agregación de la familia paramétrica de Hamacher.

X	A	B	EXPERIMENTAL	Hamacher	Producto
1	0.10	0.10	0.00	0.025	0.010
2	0.40	0.50	0.25	0.285	0.200
3	0.90	1.00	0.95	0.900	0.900
4	0.20	0.40	0.10	0.136	0.080
5	0.70	0.90	0.70	0.660	0.630
6	0.40	0.70	0.35	0.348	0.280
7	0.50	0.90	0.55	0.480	0.450
8	0.30	0.80	0.35	0.280	0.240
9	0.10	0.70	0.10	0.092	0.070
10	0.10	0.90	0.10	0.098	0.090

Tabla 4 - Comparación de datos experimentales con los obtenidos para el nivel 1

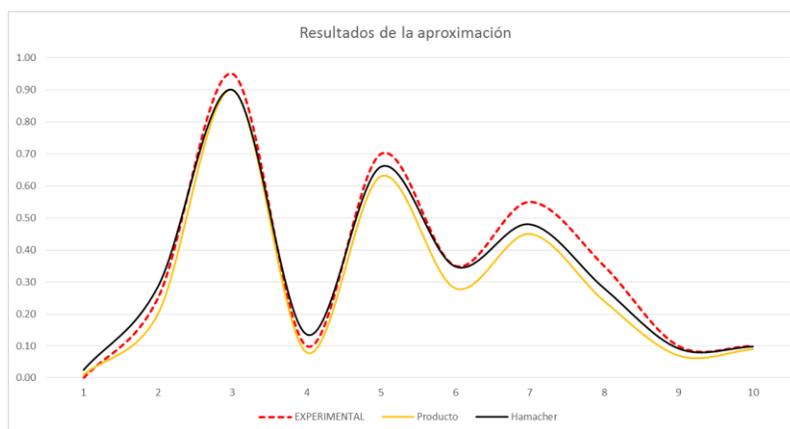


Figura 10 - Gráfica que muestra los resultados de la tabla 5 para el nivel 1

b) Aproximación de los datos para el nivel 2:

En la Tabla y en la Figura 11 se muestran los detalles del operador de agregación que mejor ajuste tuvo de los disponibles en el software. Se puede notar que el coeficiente de correlación de los datos es mayor de 0.967 para las familias paramétricas de medias cuasi lineales [10], lo cual indica que es una muy buena aproximación de los datos [10].

X	A	B	EXPERIMENTAL	Media generalizada (p = -10.00)	PRODUCTO
1	0.10	0.10	0.00	0.100	0.010
2	0.90	1.00	0.90	0.936	0.900
3	0.70	0.90	0.80	0.745	0.630
4	0.20	0.40	0.10	0.223	0.040
5	0.20	0.60	0.35	0.214	0.120
6	0.30	0.70	0.20	0.335	0.168
7	0.20	0.50	0.15	0.223	0.090
8	0.10	0.90	0.10	0.107	0.090
9	0.10	0.20	0.05	0.112	0.020
10	0.10	0.90	0.10	0.112	0.090

Tabla 5 - Comparación de datos experimentales con los obtenidos para el nivel 2

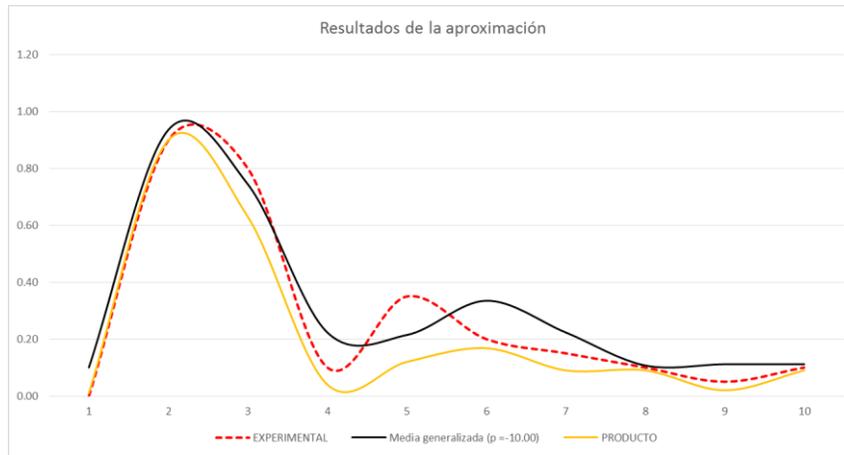


Figura 11 - Gráfica que muestra los resultados de la tabla 6 para el nivel 2

c) Aproximación de los datos para el nivel 3:

En la Tabla y en la Figura 12 se muestran los detalles del operador de agregación que mejor ajuste tuvo de los disponibles en el software. Se puede notar que el coeficiente de correlación de los datos es mayor de 0.928 para las familias paramétricas de medias cuasi lineales [10], lo cual indica que es una muy buena aproximación de los datos [10].

X	A	B	C	EXPERIMENTAL	Media generalizada (p=-10.00)	PRODUCTO
1	0.00	0.00		0.00	0.000	0.000
2	1.00	0.90		0.90	0.936	0.900
3	0.10	0.20		0.05	0.107	0.020
4	0.70	0.90		0.70	0.745	0.630
5	0.20	0.60		0.30	0.214	0.120
6	0.50	1.00		0.50	0.536	0.500
7	0.30	0.70	0.80	0.30	0.335	0.168
8	0.20	0.50	0.90	0.20	0.223	0.090
9	0.10	0.80		0.10	0.107	0.080
10	0.10	0.90		0.10	0.107	0.090
11	0.10	0.80	1.00	0.30	0.112	0.080
12	0.10	0.20	1.00	0.25	0.112	0.020

Tabla 6- Comparación de datos experimentales con los obtenidos para el nivel 3

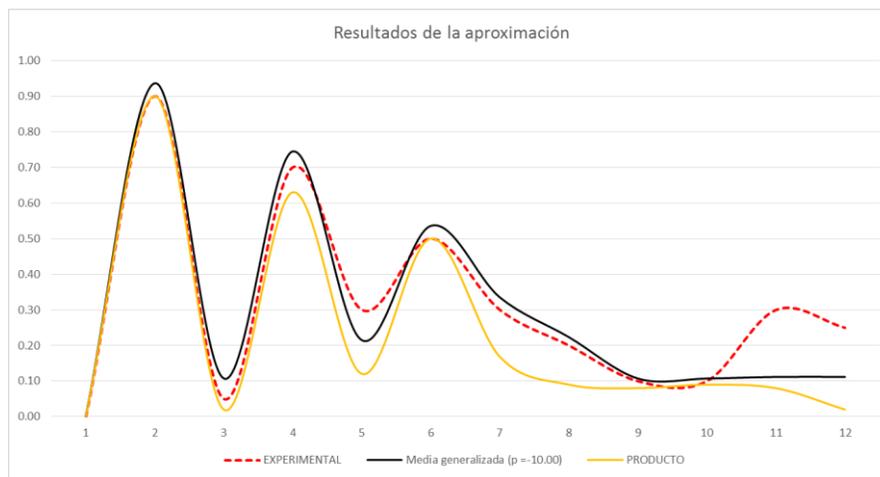


Figura 12 - Gráfica que muestra los resultados de la tabla 7 para el nivel 3

3.7.3 Operadores lógicos difusos apropiados para el modelo propuesto

En la tabla 7 se resumen los operadores lógicos difusos apropiados para cada nivel obtenidos de la experimentación de la sección 3.7.1.

El operador de conjunción para el nivel 1 cumple con los requisitos definidos en la sección 3.7.3, haciéndose notar que este operador no permite ningún tipo de compensación en el valor de salida [10]. De acuerdo con la figura 26 el valor del parámetro $\gamma = 0.1578$ de la familia paramétrica de operadores de agregación de Hamacher es el que mejor ajuste tiene a los datos de entrada del experimento.

El operador de conjunción para los niveles 2 y 3 también cumple con los requisitos definidos en la sección anterior. Este operador, de la familia paramétrica de medias cuasi lineales generalizadas [10], con un parámetro $p = -10.000$ que es el que mejor se ajusta a los datos de entrada de acuerdo a las figuras 30 y 34, tiene la característica de que el valor del parámetro p determina el grado de compensación que se desee. Esta familia de operadores tiene como límites al operador MIN cuando el parámetro p tiende a $-\infty$, al operador MAX cuando p tiende a $+\infty$ y al operador de media geométrica cuando el parámetro p tiende a 0.

Nivel	Conjunción	Disyunción	Negación
Nivel 1	$\frac{xy}{\gamma + (1 - \gamma)(x + y - xy)}$ Donde: $\gamma = 0.1578$	$\frac{x + y - xy - (1 - \gamma)xy}{1 - (1 - \gamma)xy}$ Donde: $\gamma = 0.1578$	$1 - x$

Nivel 2	$\frac{1}{n} \sum (x_n^p)^{1/p}$ Donde: $p = -10.001$	$1 - \frac{1}{n} \sum (1 - x_n^p)^{1/p}$ Donde: $p = -10.001$	$1 - x$
Nivel 3	$\frac{1}{n} \sum (x_n^p)^{1/p}$ Donde: $p = -10.000$	$1 - \frac{1}{n} \sum (1 - x_n^p)^{1/p}$ Donde: $p = -10.000$	$1 - x$

Tabla 7 - Operadores lógicos difusos para cada nivel resultantes del experimento de la sección 3.7.3

3.7.4 Notas sobre los conjuntos de operadores seleccionados

El análisis realizado en las secciones 3.7.2, 3.7.3 y 3.7.4 sirvió para determinar la familia de operadores de agregación adecuados para cada uno de los niveles de argumentación.

La elección de una de las funciones de esas familias se reduce en escoger un valor para los parámetros (γ para la familia de operadores de Hamacher y p para la familia de operadores de medias cuasi lineales generalizadas) en cada nivel de argumentación.

Ante esta situación se distinguen los siguientes escenarios:

- 1.- Utilizar los parámetros obtenidos en la sección 3.7.4 del experimento a expertos (ver tabla 8). Estos valores se pueden considerar como válidos ya que al aplicarlos los operadores de agregación cumplen con los requisitos de la sección 3.7.2 y se obtienen valores esperados de salida ante diferentes entradas prototipo.
- 2.- Diseñar un experimento sobre toma de decisiones (que no tenga que ver con el contexto del experimento de la sección 3.7.3, como por ejemplo preguntarles que escojan entre dos empleados atendiendo a cierta evaluación en criterios relevantes en el contexto) a un conjunto regular de personas, por ejemplo, estudiantes de universidad. De los resultados, obtener el parámetro γ para el operador de Hamacher para el nivel 1. Ha de notarse que los datos de salida del nivel 3 son los datos de entrada del nivel 2 y los datos de salida del nivel 2 son los datos de entrada del nivel 1. Debido a esto, se puede calcular el parámetro p para los niveles 2 y 3 de los datos obtenidos del experimento que se realice.

Los valores de los parámetros γ y p obtenidos de este experimento caracterizarían de alguna manera a un conjunto general de personas y se pueden considerar como valores de referencia al aplicar el modelo de manera general.

- 3.- Diseñar un procedimiento de análisis de desagregación de preferencias (PDA, por sus siglas en inglés) para la obtención de los parámetros γ y p [13], [14]. Este procedimiento debe inferir de manera indirecta los valores de los parámetros del modelo a partir de juicios proporcionados por el agente decisor, obtenidos a partir de una batería de ejemplos de decisión. Este procedimiento se tendría que aplicar al decisor al menos una vez al utilizar el modelo propuesto. Los parámetros obtenidos γ y p de este procedimiento caracterizarían de cierta manera solo al decisor en cuestión.

Cualquier escenario es válido. La elección de alguno va a depender del decisor y/o el analista.

4 RESULTADOS PRELIMINARES

4.1 Ejemplo 1:

En el siguiente ejemplo se muestra el resultado que se obtuvo al preguntarle a un decisor real que respondiera que tan cierto era que el automóvil B fuera al menos tan bueno como el automóvil A atendiendo a las evaluaciones que tenía cada uno de ellos en ciertos criterios. Se le explicó que todos los criterios tienen la misma importancia y ninguno tiene capacidad de veto.

En la Tabla se muestra la matriz de evaluación de cada automóvil.

CRITERIO	Auto A	Auto B
Exteriores	Excelentes	Malos
Costo servicio mayor	\$2,000	\$4,900
Interiores	Excelentes	Malos
Rendimiento Gasolina	15km/l	14.9km/l
Color	Blanco	Blanco
Tamaño de rines	17"	17"
Valor reventa	Regular	Regular
Costo refacciones	Baratas	Baratas
Modelo	2010	2010
Estética	Bonito	Muy Bonito

Tabla 8 - Matriz de evaluación

¿Qué tan cierto es que el automóvil B es al menos tan bueno como el automóvil A?

a) Falso
b) Más falso que cierto
c) Ni cierto ni falso
d) Mas cierto que falso
e) Cierto

Figura 23 - Pregunta al decisor

En la Figura se muestra la pregunta que se le hizo a la persona, que respondió con la opción Falso. Al cuestionarle cual fue su razonamiento, contestó que comparó en cuáles criterios cada opción tenía ventaja y en cuáles eran indiferentes. El resultado de su comparación fue que el automóvil A aventajaba en 3 criterios (exteriores, costos de servicio mayor e interiores), el automóvil B sólo en un criterio (estética), y en 6 criterios estaban empatados (rendimiento de gasolina, color, tamaño de rines, valor de reventa, costo de refacciones y modelo). Para que su percepción de que el auto B es al menos tan bueno como el auto A fuera cierta tendría que cumplirse que los criterios a favor del auto B fueran más que los criterios a favor de A, o en su defecto, que la cantidad de criterios en donde estuvieran empatados fuera significativa y que el resto de criterios estuvieran balanceados unos a favor del auto A y otros a favor del auto B. Como ninguna de las dos condiciones anteriores se cumplen, el decisor determinó como falso la respuesta a la pregunta. Otro aspecto que lo ayudó a determinar esta respuesta fue que percibió que en los criterios en que el auto A era mejor había una notable diferencia en las evaluaciones, es decir, percibió una fuerza considerable en contra del auto B. Si se utiliza el método ELECTRE III para calcular $\sigma(BSA)$ como en [26] para este ejemplo, se obtiene un valor de $\sigma(BSA) = 0.7$, lo cual significa que para este modelo el grado de verdad de que el auto B es al menos tan bueno como el auto A es más cierto que falso, lo cual difiere de la respuesta del decisor real.

A continuación se resolverá el ejemplo 1 con la información mostrada en la Tabla 1 y Tabla 2.

		C01	C02	C03	C04	C05	C06	C07	C08	C09	C10
		EXTERIORES	COSTO SERV_MAY	INTERIORES	REND. GASOLINA	COLOR	RINES	VALOR DE REVENTA	COSTO REFACC	AÑO	ESTÉTICA
ORDEN DE LAS PREF:		↑	↓	↑	↓	↑	↑	↑	↓	↑	↑
CAPACIDAD DE VETO:		NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
PESOS:		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
UMBRALES	q:	(0, 1)	(0, 250)	(0, 1)	(0, 0.5)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)
	p:	(0, 2)	(0, 500)	(0, 2)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)
	s:	(0, 3)	(0, 1500)	(0, 3)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)
	r:	(0, 4)	(0, 2000)	(0, 4)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 4)	(0, 4)	(0, 4)	(0, 4)	(0, 4)
	v:	(0, 5)	(0, 10000)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)
UNIDAD:		-	\$ PESOS	-	KM/L	-	PULG	-	-	AÑO	-
A01	AUTO A	7	\$2,000.00	7	15.00	3	15	4	2	2010	4
A02	AUTO B	3	\$4,900.00	3	14.90	3	15	4	2	2010	6

Tabla 1 - Matriz de evaluación para el ejemplo 1

UMBRALES ÍNDICES		UMBRALES ÍNDICES	
α	0.050	ε	0.05
β	0.100	ζ	0.20
γ	0.150	η	0.30
δ	0.250		

Tabla 2 - Parámetros para las funciones de comparación del ejemplo 1

Atendiendo a la información anterior y de acuerdo a la sección 3.3 se obtienen los siguientes valores para los índices de fuerza:

Índices para ASB:	Índices para BSA:
$J^+(A,B) = 0.3$	$J^+(B,A) = 0.1$
$J^-(A,B) = 0.6$	$J^-(B,A) = 0.6$
$J(A,B) = 0.1$	$J(B,A) = 0.3$
$J_{INT}^+(A,B) = 0.3$	$J_{INT}^+(B,A) = 0.0$
$J_{INT}^-(A,B) = 0.0$	$J_{INT}^-(B,A) = 0.3$

De acuerdo a los valores de los índices mostrados anteriormente, y a las secciones 3.6 y 3.7 se obtienen los valores de las funciones de preferencia estricta, preferencia débil e indiferencia:

Funciones de preferencia para ASB: Funciones de preferencia para BSA:

$\mu_P(A,B) = 1$	$\mu_P(B,A) = 0$
$\mu_Q(A,B) = 0$	$\mu_Q(B,A) = 0$
$\mu_I(A,B) = 0$	$\mu_I(B,A) = 0$

Por último, de acuerdo a las secciones 3.6 y 3.7 se obtienen los valores para los índices de credibilidad de aSb y bSa :

$$\sigma(ASB) = 1$$

$$\sigma(BSA) = 0$$

Para efectos de comparación se calcularon los índices de credibilidad con el método de ELECTRE III [14] y se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\sigma(ASB) = 0.9$$

$$\sigma(BSA) = 0.7$$

Como puede observarse, el modelo propuesto concuerda con el razonamiento del DM real mencionado en la sección 1, en la que establece que el grado de verdad de que el automóvil B es al menos tan bueno como el automóvil A es falso ($\sigma(BSA) = 0$), mientras que el modelo de ELECTRE III no lo hace ($\sigma(BSA) = 0.7$).

4.2 Ejemplo 2:

Obtener la matriz de credibilidad para la matriz de evaluación de la Tabla 3 y los parámetros de la Tabla 4.

		C01	C02	C03	C04	C05	C06	C07	C08	C09	C10
		C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
ORDEN DE LAS PREF:		↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
CAPACIDAD DE VETO:		NO									
PESOS:		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
UMBRALES	q:	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)
	p:	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)
	s:	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)
	r:	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)
	v:	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)
UNIDAD:		M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
A01	A	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	6.00	6.00	6.00	6.00
A02	B	9.00	9.00	9.00	9.00	9.00	9.00	10.00	10.00	10.00	10.00

Tabla 3 - Matriz de evaluación para el ejemplo 2

UMBRALES ÍNDICES		UMBRALES ÍNDICES	
α	0.050	ε	0.05
β	0.100	ζ	0.20
γ	0.150	η	0.30
δ	0.250		

Tabla 4 - Parámetros para las funciones de comparación del ejemplo 2

Atendiendo a la información anterior y de acuerdo a la sección 3.3 se obtienen los siguientes valores para los índices de fuerza:

Índices para ASB:	Índices para BSA:
$J^+(A,B) = 0.6$	$J^+(B,A) = 0.4$
$J^-(A,B) = 0.0$	$J^-(B,A) = 0.0$
$J^-(A,B) = 0.4$	$J^-(B,A) = 0.6$
$J^+_{INT}(A,B) = 0.0$	$J^+_{INT}(B,A) = 0.4$
$J^-_{INT}(A,B) = 0.4$	$J^-_{INT}(B,A) = 0.0$

De acuerdo a las secciones 3.6 y 3.7 se obtienen los valores para los índices de credibilidad de aSb y bSa :

$$\sigma(ASB) = 0$$

$$\sigma(BSA) = 0$$

Para efectos de comparación se calcularon los índices de credibilidad con el método de ELECTRE III [14] y se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\sigma(ASB) = 0.6$$

$$\sigma(BSA) = 0.4$$

En los índices de fuerza para ASB se aprecia que J^+ es mayor que J^- , sin embargo, existe una coalición intensamente en contra significativa ($J^-_{INT}(A,B) = 0.4$) lo cual provoca un efecto de veto aun cuando ningún criterio tenga capacidad de veto por sí solo. Esto conduce a que $\sigma(ASB) = 0$, lo que quiere decir que es falso que A sea al menos tan bueno como B debido a la coalición de criterios intensamente en su contra. Se aprecia también que con el método ELECTRE III se obtiene un valor de $\sigma(ASB) = 0.6$, ya que este modelo no es sensible a las intensidades en contra de la preferencia.

En los índices de fuerza para BSA se aprecia que J^+ es menor que J^- , en una cantidad considerable, lo cual invalida por completo que B sea al menos tan bueno como A, por lo tanto $\sigma(BSA)$ debe ser cero.

5 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

El modelo propuesto calcula valores de $\sigma(aSb)$ más razonables que el modelo ELECTRE III cuando se presentan casos como en la sección de resultados preliminares. Esta propuesta se puede utilizar fácilmente como una alternativa a los métodos de agregación de preferencias de los métodos ELECTRE, pues la información que requiere como datos de entrada es muy similar. Además, tiene la ventaja de ser sensible a las intensidades de las coaliciones a favor o en contra de la preferencia.

El conjunto de operadores lógicos difusos obtenidos en la sección 3.7 han dado resultados satisfactorios. Respecto a las notas de la sección 3.7.4, ha de notarse que las opciones 2 y 3 están en desarrollo actualmente. También se encuentra en desarrollo un experimento basado en entrevistas a estudiantes universitarios cuyo resultado permita obtener valores aproximados de los parámetros de comparación de la sección 3.5 con el fin de que sirvan como referencia para el DM al momento de utilizar el modelo propuesto.

REFERENCIAS

- [1] ALMEIDA, A. T., (2005): Multicriteria modelling of repair contract based on utility and ELECTRE I method with dependability and service quality criteria. **Annals of Operations Research**. 138, 113-126.
- [2] BELIAKOV G. (2000): Numerical Construction of Membership Functions and Aggregation Operators from Empirical Data. **Proceedings of FUSION 2000 Conf., Paris**, . TuC4.
- [3] BELIAKOV G., (2000): Approximation of aggregation operators using splines. **Proceedings of IPMU 2000 Conf., Madrid**, . 680-685.
- [4] BELIAKOV G. and WARREN J., (2001): Appropriate choice of aggregation operators in fuzzy decision suort systems. **IEEE Transactions On Fuzzy Systems**, 9, 773-784.
- [5] BELIAKOV G., (2001): Fuzzy clustering of non-convex patterns using global optimization. **Proceedings of FUZZ-IEEE**, Conf. Melbourne.
- [6] BELIAKOV G., (2002): Monotone approximation of aggregation operators using least squares splines. **Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems**, 10.
- [7] BELIAKOV G., (2002): **Approximation of membership functions and aggregation operators using splines**. In **Technologies for constructing intelligent systems**, Springer, Berlin, . 159-172.
- [8] BELIAKOV G., (2002): Three new techniques of approximating aggregation operators from empirical data. **Proceedings of IPMU2002 Conf., Annecy, 2002**, . 945-952.
- [9] BELIAKOV G., MESIAR R. AND VALASKOVA L., (2004): Fitting generated aggregation operators to empirical data, **Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, 12, 219–236.
- [10] BELIAKOV G., PRADERA A., and CALVO T., (2007): **Aggregation functions: A guide for practitioners**. Springer, Berlin.
- [11] BOUYSSOU, D., and VINCKE, PH., (1997): Ranking alternatives on the basis of preference relations: A progress report with special emphasis on outranking relations. **Journal of Multi-Criteria Decision Analysis** 6 . 77–85.
- [12] DYCKHOFF H. and PEDRYCZ W., (1984): Generalized means as model of compensative connectives. **Fuzzy Sets and Systems**, 14 , . 143-154.
- [13] FERNÁNDEZ E., NAVARRO, J., and BERNAL S., (2009): Multicriteria sorting using a valued indifference relation under a preference disaggregation paradigm, **European Journal of Operational Research**, 198, 602-609.
- [14] FERNÁNDEZ E., NAVARRO J., and MAZCORRO G., (2012): Evolutionary multi-objective optimization for inferring outranking model’s parameters under scarce reference information and effects of reinforced preference. **Foundations of Computing and Decision Sciences**, 37, 163-197.
- [15] FIGUEIRA, J., MOUSSEAU, V., and ROY, B. (2005): **ELECTRE Methods. Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys**. : Greco y Erghott (eds.), Springer Science + Bussiness Media (. 133-154). New York
- [16] FILEV D. and YAGER R., (1998): On the issue of obtaining OWA operator weights. **Fuzzy Sets and Systems**, 94, . 157-169
- [17] FODOR, J., and ROUBENS, M., (1994): **Fuzzy Preference Modeling and Multicriteria Decision Suort**. Kluwer, Dordrecht.
- [18] FRENCH, S., (1993): **Decision Theory: An Introduction to the Mathematics of Rationality**. Ellis Horwood, London.
- [19] HIROTA K. and PEDRYCZ W., (1994): OR/AND neuron in modeling fuzzy set connectives. **IEEE Transactions On Fuzzy Systems**, 2, 151-161.

- [20] GOLETSIS, Y., PSARRAS, J., and SAMOUILIDIS, J. E., (2003): Project ranking in the Armenian energy sector using a multicriteria method for groups. **Annals of Operations Research**, 120,. 135-157.
- [21] MAVROTAS, G., DIAKOULAKI, D., and CAPROS, P., (2003): Combined MCDA–IP approach for project selection in the electricity market. **Annals of Operations Research**, 120, 159-170.
- [22] MOUSSEAU V. AND DIAS L., (2004): Valued outranking relations in ELECTRE providing manageable disaggregation procedures. **European Journal of Operational Research**, 156, 467-482
- [23] OSTANELLO, A., (1984): Outranking methods. **Proceeding of the first summer school on MCDM**, . 41-60.
- [24] ROY, B., (1996): **Multicriteria methodology for Decision Aiding**. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London.
- [25] ROY, B., (1996): **Preference, indifference and incomparability: Binary relations and basic structures. In Multicriteria Methodology for Decision Aiding (79-126)**. Springer, N. York.
- [26] ROY, B., (1990): **The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods, in: C.A. Bana e Costa (Ed.), Reading in Multiple Criteria Decision Aid.**, Springer-Verlag, Berlin, 155-183.
- [27] ROY, B. and SŁOWIŃSKI, R., (2008): Handling effects of reinforced preference and counter-veto in credibility of outranking. **European Journal of Operational Research**, 188, 185-190.
- [28] TSOUKIAS, A., PERNY, P., and VINCKE, P., (2002): From concordance/discordance to the modelling of positive and negative reasons in decision aiding. In **Aiding decisions with multiple criteria (147-174)**. Springer N. York.
- [29] WASSERMANN, P.D., (1989): **Neural computing: Theory and Practice**. VNR. New York.
- [30] ZIMMERMANN H.-J., (1996): **Fuzzy set theory - and its applications**. Kluwer, Boston.
- [31] ZIMMERMANN H.-J. and ZYSNO P., (1980): Latent connectives in human decision making. **Fuzzy Sets and Systems**, 4, 37-51.
- [32] ZOPOUNDIS, C., and PARDALOS, (1990): **Handbook of multicriteria analysis. Chapter III. Decision Aid**. Springer-Verlag, Berlin, 155–183.