SOLUCIÓN PERIÓDICA DE LAS ECUACIONES ESTOCÁSTICAS CON COEFICIENTES DIFINIDOS EN UNA UNIÓN DE INTERVALOS CERRADOS

Farhouh Korichi [*,*], Hisao Fujita Yashima[**,†]
[*]Ecole Normale Supérieure de Kouba, Kouba, Alger, Argelia
[**]Ecole Normale Suprieure de Constantine, Constantine, Argelia.

ABSTRACT
In this article we consider a class of stochastic equations with coefficients defined on a union of closed time intervals; during the break between two closed intervals the process has to evolve passively with the coefficients determined at the last moment of the previous closed interval. Under the assumption of the periodicity of the union of closed intervals and of the coefficients, we prove the existence of a periodic solution. The proof is based on the techniques developed by Khas'minskii for the analogous problem in case of usual stochastic equations. We present also some remarks about the possibility of application to the stochastic modeling of the hibernation.

KEYWORDS: Stochastic equations, periodic solution, union of closed time intervals.

MSC: 34K50; 60H10.

RESUMEN
En este artículo se considera una clase de ecuaciones estocásticas con coeficientes definidos en una unión de intervalos cerrados de tiempo; durante la pausa entre dos intervalos cerrados el proceso debe evolucionar pasivamente con los coeficientes determinados en el último instante del intervalo cerrado precedente. Suponiendo la periodicidad de la unión de intervalos cerrados y de los coeficientes, se demuestra la existencia de una solución periódica. La demostración se basa en las técnicas desarrolladas por Khas'minskii para el problema análogo en caso de ecuaciones estocásticas usuales. Presentamos también algunas observaciones sobre la posibilidad de aplicación a la modelación estocástica de la hibernación.

1. INTRODUCCIÓN

En [4] Khas'minskii da un teorema de existencia de una solución periódica de una ecuación estocástica

$$d\xi(t) = f(t, \xi(t))dt + \sigma(t, \xi(t))dG(t) \tag{1}$$

para un proceso estocástico desconocido $\xi(t)$ con valores en $\mathbb{R}^d$, ecuación en la que $G(t)$ es un proceso estocástico con incrementos independientes con valores en $\mathbb{R}^l$ y $f(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ son funciones periódicas en t con valores respectivamente en $\mathbb{R}^d$ y en $\mathbb{R}^{d\times l}$.
En este trabajo vamos a considerar una unión I de intervalos cerrados y periódicos de período T (es decir, si $t \in I$, entonces $t + nT \in I$ para todos $n \in \mathbb{Z}$) y una ecuación de la forma

$$d\xi(t) = f(\iota(t), \xi(\iota(t)))dt + \sigma(\iota(t), \xi(\iota(t)))dW(t), \tag{2}$$

donde $f(\cdot, \cdot)$ y $\sigma(\cdot, \cdot)$ son funciones medibles en $I \times \mathbb{R}^d$, localmente lipschitzianas en $x \in \mathbb{R}^d$ y periódicas en t de período T, $W(t)$ es el movimiento browniano canónico con valores en $\mathbb{R}^l$ y $\iota(t)$ es definido por

$$\iota(t) = \sup\{\, s \le t \mid s \in I \,\}. \tag{3}$$

[*]korifarhouh@yahoo.fr
[†]hisaofujitayashima@qq.com.

Se ve que en los intervalos contenidos en I la ecuación (2) tendrá la misma forma que (1), mientras que para $t \notin I$ las funciones $f(\cdot,\cdot)$ y $\sigma(\cdot,\cdot)$ quedan en los valores del último instante perteneciente a I. En la sección 2 se especifica la clase de los conjuntos I que vamos a considerar.
La existencia y unicidad de la solución de la ecuación (2) con los datos iniciales (sin suponer la periodicidad de I y sin la dependencia de f y de σ de $\iota(t)$) quedan demostradas en [6]. Por otra parte, para una ecuación estocástica con los coeficientes definidos en un conjunto cerrado general, algunos autores han introducido nuevas definiciones de la integral estocástica (véanse por ejemplo [9], [7]). Pero, hasta donde sabemos, no existe resultado significativo sobre el comportamiento asintótico de la solución en el caso de un conjunto cerrado que no es unión de intervalos cerrados.
Como ejemplo de aplicación de la solución periódica de las ecuaciones del tipo (2) podríamos citar la dinámica de poblaciones de algunas especies animales y vegetales que efectúan la hibernación. En efecto, ésas pasan de manera pasiva estaciones de condiciones adversas. Pero el proceso de hibernación no es necesariamente simple. Por ejemplo, los mosquitos pasan la estación fría en distintas formas (adulto o huevo u otra forma) y por eso se necesita una ecuación multi-fase para describirlo (véase por ejemplo [2]). Otro ejemplo muy interesante es el de *boufaroua* (una especie de ácaro) y mariquitas, que constituyen un sistema de presa-depredador sobre los frutos de dátiles y pasan la estación fría en un estado de casi-hibernación (véanse por ejemplo [5], [8]). Para estos problemas interesantes es necesario formular de manera particular y específica una ecuación. Aun cuando consideramos la hibernación de una especie bastante simple, el estudio de la solución periódica de la ecuación estocástica con pausas requiere una elaboración considerable. Por eso en este trabajo nos limitamos a algunas observaciones sobre las ecuaciones de tipo hibernación, intentando estudiar este problema en un futuro próximo.

2. PRELIMINARES

Para formular bien el problema, ante todo tenemos que especificar la clase de conjuntos I que vamos a considerar. Sea T un número estrictamente positivo, que será el período de nuetra ecuación periódica. Sean $\overline{m} \in \mathbb{N}$, $\overline{k} \in \mathbb{N}$. Supongamos que el conjunto I tiene la forma

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\big(\bigcup_{m=0}^{\overline{m}-1} \big(\bigcup_{k=0}^{\infty} [nT + \alpha_k^m, nT + \beta_k^m] \big) \big) \cup \big(\bigcup_{k=0}^{\overline{k}} [nT + \alpha_k^{\overline{m}}, nT + \beta_k^{\overline{m}}] \big) \Big), \tag{4}$$

$$\alpha_0^0 = 0, \qquad \beta_{\overline{k}}^{\overline{m}} = T, \tag{5}$$

$$\alpha_k^m \le \beta_k^m, \qquad \beta_k^m < \alpha_{k+1}^m \tag{6}$$

para todos α_k^m y β_k^m que se hallan en la expresión de la derecha de (4) y

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k^m = \lim_{k\to\infty} \beta_k^m = \alpha_0^{m+1} \tag{7}$$

para todos $m \in \{0, 1, \cdots, \overline{m}-1\}$. La condición (5), que significa que $nT \in I$ para todos $n \in \mathbb{Z}$, no es esencial, pero tomamos el comienzo del período $[nT, (n+1)T]$ en I (y por eso $\alpha_0^0 = 0$ y $\beta_{\overline{k}}^{\overline{m}} = T$) para facilitar la presentación. Si en (4) $\overline{m} = 0$, tenemos naturalmente

$$\bigcup_{m=0}^{\overline{m}-1} \big(\bigcup_{k=0}^{\infty} [\alpha_k^m, \beta_k^m] \big) = \emptyset$$

y $I \cap [0, T]$ se compone de un número finito de intervalos cerrados.
Se introducen las notaciones

$$\mathcal{J}_T = \{(m,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N};\ m \le \overline{m}-1\} \cup \{\,(m,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N};\ m = \overline{m}\ ,\ \ k \le \overline{k}\}. \tag{8}$$

Se observa que, si ponemos $\alpha_{\overline{k}+1}^{\overline{m}} = \beta_{\overline{k}}^{\overline{m}} = T$, tenemos

$$[nT, (n+1)T] = \bigcup_{(m,k)\in\mathcal{J}_T} \big([nT + \alpha_k^m, nT + \beta_k^m] \cup [nT + \beta_k^m, nT + \alpha_{k+1}^m] \big). \tag{9}$$

Si $\xi(t)$ es un proceso estocástico con valores en $\mathbb{R}^d$ y satisface la ecuación (2), entonces para todos intervalos $[t_0, t_1]$ con $t_0 \in I$, $t_1 \geq t_0$, tomando $\xi(t_0) \equiv \overline{\xi}_0$ como condición inicial, se puede considerar $\xi(t)$, $t \geq t_0$, como solución de la ecuación

$$\xi(t) = \overline{\xi}_0 + \int_{t_0}^{t} f(\iota(s), \xi(\iota(s)))ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(\iota(s), \xi(\iota(s)))dW(s). \tag{10}$$

Hay que observar que en la ecuación (10) el instante inicial t_0 debe pertenecer a I, pues, si $t_0 \notin I$, entonces existe un número $\varepsilon > 0$ tal que $[t_0, t_0 + \varepsilon[\subset (\mathbb{R} \backslash I)$ y para todos $s \in [t_0, t_0 + \varepsilon[$ tengamos $\iota(s) < t_0$ y por eso $f(\iota(s), \xi(\iota(s)))$ y $\sigma(\iota(s), \xi(\iota(s)))$ no estén bien definidos.
Si suponemos que para todos $(s, x) \in I \times \mathbb{R}^d$ la ecuación (2) con la condición inicial

$$\xi(s) = x \tag{11}$$

admite una única solución $\xi(t)$, $t \geq s$, es decir existe un único proceso estocástico que satisface la ecuación

$$\xi(t) = x + \int_{s}^{t} f(\iota(\tau), \xi(\iota(\tau)))d\tau \; + \int_{s}^{t} \sigma(\iota(\tau), \xi(\iota(\tau)))dW(\tau), \tag{12}$$

entonces, denotando por $\xi^{s,x}(t)$ la solución de la ecuación (12), se puede definir la familia de leyes de probabilidad

$$P(s, x, t, B) = \mathbb{P}(\{\xi^{s,x}(t) \in B\}), \qquad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \tag{13}$$

sobre $\mathbb{R}^d$.
Aunque el proceso estocástico $\xi(t)$ que satisface la ecuación (10) no sea generalmente un proceso de Márkov, la definición (13) de la familia de probabilidades $P(s, x, t, \cdot)$ nos permite considerar $P(s, x, t, \cdot)$ como probabilidad de transición, siempre que $s \in I$, y es válida la igualdad de Chapman-Kolmogorov

$$P(t_0, x_0, t, B) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t_0, x_0, s, dy)P(s, y, t, B) \qquad \text{para } \; t_0, s \in I, \; t_0 < s < t. \tag{14}$$

Esta propiedad puede deducirse sin dificultad de la misma manera que en el caso de las ecuaciones diferenciales estocásticas usuales (véanse por ejemplo [1], [4]).

3. FÓRMULA DE ITO PARA LA ECUACIÓN (2)

En la demostración del teorema de existencia de una solución periódica, vamos a utilizar una variante de la fórmula de Ito para la ecuación (2). Aunque su construcción es simple, nos parece útil recordarla en su forma bastante general antes de enunciar el teorema de existencia de una solución periódica.
Sea $t_0 \in I$ y sea $t \geq t_0$. Pongamos

$$\overline{n}_0 = \max\{n' \in \mathbb{N};\; n'T \leq t_0\}, \qquad \overline{n}_t = \max\{n' \in \mathbb{N};\; n'T \leq t\}. \tag{15}$$

Si $\overline{n}_0 < \overline{n}_t$, es decir, si existe al menos un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $t_0 \leq nT \leq t$, pongamos

$$\mathcal{J}_T^{(0)} = \{(m, k) \in \mathcal{J}_T \,|\, t_0 \leq \overline{n}_0 T + \beta_k^m \}, \tag{16}$$

$$\mathcal{J}_T^{(t)} = \{(m, k) \in \mathcal{J}_T \,|\, \overline{n}_t T + \alpha_k^m \leq t \}. \tag{17}$$

Se observa que en este caso, de manera análoga a (9), los intervalos $[t_0, (\overline{n}_0 + 1)T]$ y $[\overline{n}_t T, t]$ pueden ser representados por

$$[t_0, (\overline{n}_0 + 1)T] = \bigcup_{(m,k) \in \mathcal{J}_T^{(0)}} ([\overline{n}_0 T + \alpha_k^m, \overline{n}_0 T + \beta_k^m] \cup [\overline{n}_0 T + \beta_k^m, \overline{n}_0 T + \alpha_{k+1}^m]), \tag{18}$$

$$[\overline{n}_t T, t] = \bigcup_{(m,k) \in \mathcal{J}_T^{(t)}} ([\overline{n}_t T + \alpha_k^m, \overline{n}_t T + \beta_k^m] \cup [\overline{n}_t T + \beta_k^m, \overline{n}_t T + \alpha_{k+1}^m]) \tag{19}$$

con las convenciones $\alpha_{\widetilde{k}}^{\widetilde{m}} = t_0$ si $\beta_{\widetilde{k}}^{\widetilde{m}} = \min\{\, \beta_k^m \,|\, (m,k) \in \mathcal{J}_T^{(0)} \}$ y $\beta_{\widetilde{k}}^{\widetilde{m}} = \iota(t)$ si $\alpha_{\widetilde{k}}^{\widetilde{m}} = \max\{\, \alpha_k^m \,|\, (m,k) \in \mathcal{J}_T^{(t)} \}$, además de la convención $\alpha_{\overline{k}+1}^{\overline{m}} = \beta_{\overline{k}}^{\overline{m}} = T$ introducida ya en (9). Por eso, si ponemos

$$\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]} = \widetilde{\mathcal{J}}_0^{[t_0,t]} \cup \widetilde{\mathcal{J}}_1^{[t_0,t]} \cup \widetilde{\mathcal{J}}_t^{[t_0,t]}, \tag{20}$$

$$\widetilde{\mathcal{J}}_0^{[t_0,t]} = \{(n',m,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \,|\, n' = \overline{n}_0, (m,k) \in \mathcal{J}_T^{(0)} \},$$

$$\widetilde{\mathcal{J}}_1^{[t_0,t]} = \{(n',m,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \,|\, \overline{n}_0 < n' < \overline{n}_t, (m,k) \in \mathcal{J}_T \},$$

$$\widetilde{\mathcal{J}}_t^{[t_0,t]} = \{(n',m,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \,|\, n' = \overline{n}_t, (m,k) \in \mathcal{J}_T^{(t)} \},$$

de (9), de (18) y de (19) se deduce que

$$[t_0,t] = \bigcup_{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]}} ([n'T+\alpha_k^m, n'T+\beta_k^m] \cup [n'T+\beta_k^m, n'T+\alpha_{k+1}^m]). \tag{21}$$

En el caso en que $\overline{n}_0 = \overline{n}_t$, como se ve fácilmente, se puede definir directamente

$$\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]} = \{(n',m,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \,|\, n' = \overline{n}_0,\ t_0 \leq \overline{n}_0 T + \beta_k^m,\ \overline{n}_t T + \alpha_k^m \leq t \}.$$

La utilización de la misma notación $\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]}$ en los dos no provoca confusión.
Utilizando estas notaciones, se puede escribir la fórmula correspondiente a la fórmula de Ito de la manera siguiente.

Lema 3.1. *Sea $\varphi(t,x)$ una función dos veces continuamente derivable con respecto a $x \in \mathbb{R}^d$ y una vez continuamente derivable con respecto a $t \in \mathbb{R}$. Sea $t_0 \in I$. Si el proceso estocástico $\xi(\cdot)$ satisface la ecuación*

$$\xi(t) = \overline{\xi}_0 + \int_{t_0}^t f(\iota(s),\xi(\iota(s)))ds + \int_{t_0}^t \sigma(\iota(s),\xi(\iota(s)))dW(s) \qquad (t \geq t_0), \tag{22}$$

entonces $\varphi(t,\xi(t))$ verifica la igualdad

$$\varphi(t,\xi(t)) = \varphi(t_0,\overline{\xi}_0) + \sum_{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]}} \int_{n'T+\alpha_k^m}^{n'T+\beta_k^m} L\varphi(s,\xi(s))ds+ \tag{23}$$

$$+ \sum_{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]}} \int_{n'T+\alpha_k^m}^{n'T+\beta_k^m} \nabla\varphi(s,\xi(s))\cdot\sigma(s,\xi(s))dW(s)+$$

$$+ \sum_{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]}} \Big[\varphi(n'T+\alpha_{k+1}^m, \Xi(n'T+\beta_k^m, \xi(n'T+\beta_k^m), n'T+\alpha_{k+1}^m)) - \varphi(n'T+\beta_k^m, \xi(n'T+\beta_k^m))\Big],$$

donde

$$L\varphi(t,x) = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^d f_i(t,x)\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\sum_{k=1}^l \sigma_{ik}(t,x)\sigma_{jk}(t,x)\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{24}$$

$$\Xi(r,x,s) = x + f(r,x)(s-r) + \sigma(r,x)(W(s)-W(r)). \tag{25}$$

Demostración. Recordando la definición de $\iota(t)$ y la de $\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]}$ (véanse (3) y (20)), se puede reescribir (22) en la forma

$$\xi(t) = \overline{\xi}_0 + \sum_{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]}} \int_{n'T+\alpha_k^m}^{n'T+\beta_k^m} f(s,\xi(s))ds+ \tag{26}$$

$$+ \sum_{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]}} \int_{n'T+\alpha_k^m}^{n'T+\beta_k^m} \sigma(s,\xi(s))dW(s) + \sum_{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]}} f(n'T+\beta_k^m, \xi(n'T+\beta_k^m))(\alpha_{k+1}^m - \beta_k^m)+$$

$$+\sum_{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]}}\sigma(n'T+\beta_k^m,\xi(n'T+\beta_k^m))\big[W(n'T+\alpha_{k+1}^m)-W(n'T+\beta_k^m)\big].$$

La expresión (26) nos permite aplicar la fórmula de Ito (véanse por ejemplo [1], [3]) a la función $\varphi(s,\xi(s))$ en los intervalos $[n'T+\alpha_k^m, n'T+\beta_k^m]$ para $(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]}$. Por eso, recordando las definiciones (24), (25) de $L\varphi$ y de $\Xi(\beta_k^m,x;s)$, se obtiene (23). $\square$

Se ve que, aun cuando se cumple solamente las desigualdades

$$\beta_k^m\le\alpha_{k+1}^m \tag{27}$$

para $(m,k)\in\mathcal{J}_T$ en lugar de la segunda desigualdad de (6), la igualdad (23) queda verificada. Para obtener una expresión de la esperanza matemática de (23), expresión útil en la siguiente, definamos

$$\Lambda\varphi(r,s,x)=\lim_{s'\to s^+}\frac{\varphi(s',x+y_f+z_W^0)-\varphi(r,x)-z_W^0\cdot\nabla\varphi(s',x+y_f)}{s'-r}, \tag{28}$$

donde

$$y_f=(s'-r)f(r,x),\qquad z_W^0=\sigma(r,x)W^{(0)}(s'-r),$$

y $W^{(0)}(\tau)$, $\tau\ge 0$, es un movimiento browniano canónico con valores en $\mathbb{R}^d$ independiente de las σ-álgebras en las que la solución de la ecuación (2) está definida. Es claro que, si $s>r$, entonces $\Lambda\varphi(r,s,x)$ es igual a

$$\frac{\varphi(s,x+y_f+z_W^0)-\varphi(r,x)-z_W^0\cdot\nabla\varphi(s,x+y_f)}{s-r}$$

con $y_f=(s-r)f(r,x)$ y $z_W^0=\sigma(r,x)W^{(0)}(s-r)$, mientras que, si $s=r$, entonces $\Lambda\varphi(r,s,x)=\Lambda\varphi(r,r,x)=L\varphi(r,x)$. Utilizando esta notación, del lema 3.1 se puede deducir la relación siguiente.

Lema 3.2. *Bajo las mismas condiciones del lema 3.1 tenemos*

$$\mathbb{E}\varphi(t,\xi(t))=\mathbb{E}\varphi(t_0,\bar{\xi}_0)+\sum_{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]}}\int_{n'T+\alpha_k^m}^{n'T+\beta_k^m}\mathbb{E}L\varphi ds+ \tag{29}$$

$$+\sum_{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}^{[t_0,t]}}(\alpha_{k+1}^m-\beta_k^m)\mathbb{E}\Lambda\varphi(\beta_k^m+n'T,\alpha_{k+1}^m+n'T,\xi(\beta_k^m+n'T)).$$

Demostración. Puesto que $W^{(0)}(s'-r)$ tiene la misma ley que $W(s')-W(r)$ y $W^{(0)}(s'-r)$ y $W(s')-W(r)$ son independientes de la σ-álgebra generada por $\xi(r)$, tenemos

$$\mathbb{E}\sigma(r,\xi(r))(W(s)-W(r))\cdot\nabla\varphi(s,\xi(r)+f(r,\xi(r))(s-r))=$$

$$=\mathbb{E}\sigma(r,\xi(r))(W^{(0)}(s-r))\cdot\nabla\varphi(s,\xi(r)+f(r,\xi(r))(s-r))=0.$$

Por eso, de (28) se deduce que

$$\mathbb{E}\big[\varphi(n'T+\alpha_{k+1}^m,\Xi(n'T+\beta_k^m,\xi(n'T+\beta_k^m),n'T+\alpha_{k+1}^m))-\varphi(n'T+\beta_k^m,\xi(n'T+\beta_k^m))\big]=$$

$$=(\alpha_{k+1}^m-\beta_k^m)\mathbb{E}\Lambda\varphi(\beta_k^m+n'T,\alpha_{k+1}^m+n'T,\xi(\beta_k^m+n'T)).$$

Por tanto, aplicando la esperanza matemática a (23) y teniendo en cuenta la relación

$$\mathbb{E}\big[\int_{n'T+\alpha_k^m}^{n'T+\beta_k^m}\nabla\varphi(s,\xi(s))\cdot\sigma(s,\xi(s))dW(s)\}\big]=0,$$

se obtiene (29). $\square$

4. ENUNCIADO DEL TEOREMA DE EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN PERIÓDICA

Ahora enunciamos el teorema de existencia de una solución periódica, que es el resultado principal de este trabajo.

Teorema A. *Supongamos que para todos* $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$ *la ecuación* (2) *con la condición inicial*

$$\xi(t_0) = x_0 \tag{30}$$

admite la solución única en el intervalo $[t_0, \infty[$ *y que existe una función continua* $V(t,x)$ *definida en* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *dos veces continuamente derivable con respecto a* x*, una vez continuamente derivable con respecto a* t *y tal que*

$$V(t,x) \geq 0 \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \tag{31}$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, |x|>R} V(t,x) \to \infty \qquad \textit{para} \ \ R \to \infty, \tag{32}$$

$$V(t,x) = V(t+nT, x) \quad \forall (n,t,x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \tag{33}$$

$$\sup_{t \in I, x \in \mathbb{R}^d} LV(t,x) < \infty, \tag{34}$$

$$\sup_{(m,k) \in \mathcal{J}_T,\, x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}\Lambda V(\beta_k^m, \alpha_{k+1}^m, x) < \infty, \tag{35}$$

donde L *y* Λ *son los operadores definidos en* (24) *y* (28) *respectivamente. Además, supongamos que la condición*

[C-1] *existen dos números* $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)} \in [0,T]$ *tales que* $\alpha^{(0)} < \beta^{(0)}$, $[\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}] \subset I$ *y*

$$\sup_{\alpha^{(0)} \leq t \leq \beta^{(0)},\, |x|>R} LV(t,x) \to -\infty \qquad \textit{para} \quad R \to \infty, \tag{36}$$

o la condición

[C-2] *existe un* $(m,k) = (m^{(2)}, k^{(2)}) \in \mathcal{J}_T$, $(m^{(2)}, k^{(2)}) \neq (\overline{m}, \overline{k})$*, tal que*

$$\sup_{|x|>R} \mathbb{E}\Lambda V(\beta_{k^{(2)}}^{m^{(2)}}, \alpha_{k^{(2)}+1}^{m^{(2)}}, x) \to -\infty \qquad \textit{para} \quad R \to \infty, \tag{37}$$

está verificada. Entonces existe un proceso estocástico $\xi(t)$ *que satisface* (2) *y la medida inducida por* $\xi(t)$ *para cada* $t \in \mathbb{R}$ *es periódica en* t *de período* T.

5. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA

Para demostrar el teorema A, tenemos que establecer algunas estimaciones de la solución de la ecuación (2) con una condición inicial y deducir de éstas la relación crucial para la existencia de una solución periódica. Escribamos este razonamiento por separado para el caso de la condición [C-1] y para el caso de la condición [C-2].

Comencemos con el caso de la condición [C-1]; antes de demostrar la relación principal, recordemos una propiedad técnica.

Lema 5.1. *Supongamos que las hipótesis del teorema A están verificadas. Si la condición* [C-1] *se cumple y si* $\xi(t)$ *es la solución de la ecuación* (2) *con la condición inicial*

$$\xi(0) = x_0, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^d, \tag{38}$$

entonces existe una función $q = q(R)$ *tal que* $q(R) \to \infty$ *para* $R \to \infty$ *y*

$$\sup_{\alpha^{(0)} \leq s < \beta^{(0)},\, |y| \leq q(R)} P(s, y, \beta^{(0)}, B_R^C) \equiv \alpha(R) \to 0 \qquad \textit{para} \ \ R \to \infty. \tag{39}$$

Demostración. La condición (32) nos permite demostrarlo de la misma manera que en la demostración del teorema 5.2 del capítulo 3 de [4] (más precisamente, en la demostración de la condición dada en la observación que sigue al teorema 2.2 del capítulo 3). □

Ahora demostremos el lema siguiente.

Lema 5.2. *Bajo la condición del lema 5.1, para todos $\varepsilon > 0$ existe un número $R_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ que satisface la relación*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{n'=0}^{n}\mathbb{P}(\{|\xi(\beta^{(0)}+n'T)| > R_\varepsilon\}) \le \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}. \tag{40}$$

Demostración. Dado que $[\alpha^{(0)},\beta^{(0)}] \subset I$, existe un $(m,k) \in \mathcal{J}_T$ tal que $[\alpha^{(0)},\beta^{(0)}] \subset [\alpha_k^m,\beta_k^m]$. Si adoptamos la condición (27) (en lugar de la segunda condición de (6)), podemos reordenar la unión $I\cap[0,T] = \bigcup_{(m,k)\in\mathcal{J}_T}[\alpha_k^m,\beta_k^m]$ de manera que

$$(m^{(1)},k^{(1)}) \in \mathcal{J}_T, \qquad \alpha^{(0)} = \alpha_{k^{(1)}}^{m^{(1)}}, \qquad \beta^{(0)} = \beta_{k^{(1)}}^{m^{(1)}},$$

con la eventualidad de que $\beta_{k^{(1)}-1}^{m^{(1)}} = \alpha_{k^{(1)}}^{m^{(1)}}$ y/o $\beta_{k^{(1)}}^{m^{(1)}} = \alpha_{k^{(1)}+1}^{m^{(1)}}$. En esta demostración escribemos igualmente $\mathcal{J}_T$ al reordenado, pues el lema 3.2 es válido igualmente con la condición (27) y por eso esta redefinición de $\mathcal{J}_T$ no modifica la demostración.
Pongamos

$$C_1 = \max\big(\sup_{(t,x)\in I\times\mathbb{R}^d} LV(t,x), \sup_{(m,k)\in\mathcal{J}_T, x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}\Lambda V(\beta_k^m,\alpha_{k+1}^m,x)\big), \tag{41}$$

$$A_R^{(1)} = -\sup_{\alpha^{(0)}\le t\le\beta^{(0)},\, |x|>R} LV(t,x). \tag{42}$$

Además, para simplificar la notación, pongamos

$$\widetilde{\mathcal{J}}^{(n)} = \widetilde{\mathcal{J}}^{[0,\beta^{(0)}+nT]}, \qquad \widetilde{\mathcal{J}}_0^{(n)} = \{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}^{(n)} \,|\, m\ne m^{(1)}, k\ne k^{(1)}\}. \tag{43}$$

Entonces, según (29) tenemos

$$\mathbb{E}V(\beta^{(0)}+nT,\xi(\beta^{(0)}+nT)) - V(0,x_0) = \tag{44}$$

$$= \sum_{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}_0^{(n)}}\int_{n'T+\alpha_k^m}^{n'T+\beta_k^m}\mathbb{E}LVds + \sum_{n'=0}^{n}\int_{n'T+\alpha^{(0)}}^{n'T+\beta^{(0)}}\mathbb{E}LVds +$$

$$+ \sum_{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}^{(n)}}(\alpha_{k+1}^m-\beta_k^m)\mathbb{E}\Lambda V(\beta_k^m+n'T,\alpha_{k+1}^m+n'T,\xi(\beta_k^m+n'T)).$$

En virtud de la condición (34) y de la hipótesis [C-1] y por ello utilizando (41) y (42), obtenemos

$$\sum_{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}_0^{(n)}}\int_{n'T+\alpha_k^m}^{n'T+\beta_k^m}\mathbb{E}LVds \le C_1(n+1)(T-(\beta^{(0)}-\alpha^{(0)})),$$

$$\sum_{n'=0}^{n}\int_{n'T+\alpha^{(0)}}^{n'T+\beta^{(0)}}\mathbb{E}LVds \le C_1(n+1)(\beta^{(0)}-\alpha^{(0)}) - A_q^{(1)}\sum_{n=1}^{n}\int_{n'T+\alpha^{(0)}}^{n'T+\beta^{(0)}}\mathbb{E}\chi_{\{|\xi(s)|>q\}}ds.$$

Por otra parte, de (41) se obtiene

$$\sum_{(n',m,k)\in\widetilde{\mathcal{J}}^{(n)}}(\alpha_{k+1}^m-\beta_k^m)\mathbb{E}\Lambda_1 V(\beta_k^m+n'T,\alpha_{k+1}^m+n'T,\xi(\beta_k^m+n'T)) \le C_1nT.$$

Por consiguiente, de (44) resulta

$$\mathbb{E}V(\beta^{(0)}+nT,\xi(\beta^{(0)}+nT)) \le$$

$$\leq V(0,x_0) + 2C_1(n+1)T - A_q^{(1)} \sum_{n'=0}^{n} \int_{n'T+\alpha^{(0)}}^{n'T+\beta^{(0)}} \mathbb{E}\chi_{\{|\xi(s)|>q\}} ds.$$

De esta desigualdad, teniendo en cuenta la condición (31), se deduce que

$$A_q^{(1)} \sum_{n'=0}^{n} \int_{n'T+\alpha^{(0)}}^{n'T+\beta^{(0)}} \mathbb{P}(\{|\xi(s)|>q\}) ds \leq V(0,x_0) + 2C_1(n+1)T. \tag{45}$$

Tomemos ahora

$$B_R = \{\, x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq R\}, \qquad B_R^C = \mathbb{R}^d \setminus B_R,$$

y recordemos que, como hemos visto en (14) (véase también (13)), bajo la restricción $s \in I \cap [0, n'T + \beta^{(0)}]$, es válida la igualdad de Chapman-Kolmogorov

$$P(0, x_0, n'T + \beta^{(0)}, B_R^C) = \int_{\mathbb{R}^d} P(0, x_0, s, dy) P(s, y, n'T + \beta^{(0)}, B_R^C) = \tag{46}$$

$$= \int_{B_q} P(0, x_0, s, dy) P(s, y, n'T + \beta^{(0)}, B_R^C) + \int_{B_q^C} P(0, x_0, s, dy) P(s, y, n'T + \beta^{(0)}, B_R^C).$$

Puesto que $P(s, y, \beta^{(0)}, B_R^C) = P(s + n'T, y, \beta^{(0)} + n'T, B_R^C)$, tomando $s \in [n'T + \alpha^{(0)}, n'T + \beta^{(0)}[$ y $q = q(R)$ en (46) y utilizando la notación dada en (39), se deduce

$$P(0, x_0, n'T + \beta^{(0)}, B_R^C) \leq \alpha(R) + \mathbb{P}(\{|\xi(s)| > q(R)\}). \tag{47}$$

Dado que (47) es válida para todos $s \in [n'T + \alpha^{(0)}, n'T + \beta^{(0)}[$, se obtiene

$$P(0, x_0, n'T + \beta^{(0)}, B_R^C) \leq \alpha(R) + \frac{1}{\beta^{(0)} - \alpha^{(0)}} \int_{n'T+\alpha^{(0)}}^{n'T+\beta^{(0)}} \mathbb{P}\{(|\xi(s)| > q(R))\} ds.$$

Por eso, haciendo la suma de $n' = 0$ hasta $n' = n$ y teniendo en cuenta (45), obtenemos

$$\frac{1}{n+1} \sum_{n'=0}^{n} \mathbb{P}(|\xi(n'T + \beta^{(0)})| > R) \leq \frac{1}{A_{q(R)}^{(1)}} \frac{V(0,x_0) + 2C_1 T}{\beta^{(0)} - \alpha^{(0)}} + \alpha(R). \tag{48}$$

Puesto que $q(R) \to \infty$ para $R \to \infty$, en virtud de la hipótesis [C-1], tenemos

$$A_{q(R)}^{(1)} \to \infty \qquad \text{para } \; R \to \infty.$$

Por consiguiente, de (48) y de (39) se deduce la relación (40). $\square$

En caso de que la condición [C-2] esté verificada, para simplificar las notaciones, ponemos

$$\beta^{(0)} = \beta_{k^{(2)}}^{m^{(2)}}, \qquad \alpha^{(1)} = \alpha_{k^{(2)}+1}^{m^{(2)}}. \tag{49}$$

Entonces tenemos el lema siguiente.

Lema 5.3. *Supongamos que las hipótesis del teorema A están verificadas. Si la condición* [C-2] *se cumple y si $\xi(t)$ es la solución de la ecuación* (2) *con la condición inicial* (38)*, entonces para todos $\varepsilon > 0$ existe un número $R_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ que satisface la relación* (40)*.*

En la relación (40) del lema 5.3, $\beta^{(0)}$ debe ser $\beta_{k^{(2)}}^{m^{(2)}}$, mientras que en la relación (40) del lema 5.2 $\beta^{(0)}$ debe ser $\beta_{k^{(1)}}^{m^{(1)}}$. Pero no se utilizará el carácter específico del valor de $\beta^{(0)}$ y por eso no hay riesgo de ambigüedad.

Demostración. Sea C_1 la constante introducida en (41); pongamos también

$$A_R^{(2)} = -\sup_{|x|>R} \mathbb{E}\Lambda V(\beta_{k^{(2)}}^{m^{(2)}}, \alpha_{k^{(2)}+1}^{m^{(2)}}, x) = -\sup_{|x|>R} \mathbb{E}\Lambda V(\beta^{(0)}, \alpha^{(1)}, x). \tag{50}$$

Entonces, según (29) se obtiene

$$\mathbb{E}V((n+1)T,\xi((n+1)T)) = V(0,x_0) + \sum_{n'=0}^{n} \sum_{(m,k)\in\mathcal{J}_T} \int_{n'T+\alpha_k^m}^{n'T+\beta_k^m} \mathbb{E}LV ds + \tag{51}$$

$$+ \sum_{n'=0}^{n} \sum_{(m,k)\in\mathcal{J}_T} (\alpha_{k+1}^m - \beta_k^m)\mathbb{E}\Lambda V(\beta_k^m + n'T, \alpha_{k+1}^m + n'T, \xi(\beta_k^m + n'T)).$$

Recordando las relaciones (41) y (50), se obtiene

$$\sum_{(m,k)\in\mathcal{J}_T} (\alpha_{k+1}^m - \beta_k^m)\mathbb{E}\Lambda V(\beta_k^m + n'T, \alpha_{k+1}^m + n'T, \xi(\beta_k^m + n'T)) \leq$$

$$\leq C_1 T - (\alpha^{(1)} - \beta^{(0)}) A_R^{(2)} \mathbb{P}(\{|\xi(n'T + \beta^{(0)})| > R\}).$$

Por otra parte, en virtud de (41) se verifica la desigualdad

$$\sum_{(m,k)\in\mathcal{J}_T} \int_{n'T+\alpha_k^m}^{n'T+\beta_k^m} \mathbb{E}LV ds \leq C_1 T.$$

Por eso, de (51) se deduce que

$$0 \leq V(0,x_0) + 2(n+1)C_1 T - (\alpha^{(1)} - \beta^{(0)}) A_R^{(2)} \sum_{n'=0}^{n} \mathbb{P}(\{|\xi(n'T + \beta^{(0)})| > R\});$$

por consiguiente se obtiene

$$\frac{1}{n+1} \sum_{n'=0}^{n} \mathbb{P}(\{|\xi(n'T + \beta^{(0)})| > R\}) \leq \frac{V(0,x_0) + 2C_1 T}{A_R^{(2)}(\alpha^{(1)} - \beta^{(0)})}, \tag{52}$$

lo que, en virtud de la hipótesis [C-2], implica (40). □

Ahora podemos demostrar la existencia de una solución periódica de (2), es decir un proceso $\xi(t)$ que satisface (2) y tiene la medida inducida $\mu(t)$ periódica de período T.

Demostración del teorema A. Dado que bajo la condición $t_0, s \in I$ $(t_0 < s < t)$ es válida la igualdad (14), de la misma manera que la demostración del teorema 2.2 del capítulo 3 de [4] se puede deducir de la relación (40) la existencia de una solución periódica de la ecuación (2). □

6. OBSERVACIONES SOBRE ECUACIONES ESTOCÁSTICAS DE TIPO HIBERNACIÓN

Como es bien conocido, la ecuación fundamental de la dinámica de poblaciones, llamada *ecuación logística*, es

$$\frac{d}{dt}X(t) = \alpha(t)X(t) - \beta(t)X(t)^2,$$

y su versión estocástica más sencilla sería

$$dX(t) = (\alpha(t) - \beta(t)X(t))X(t)dt + \sigma(t)X(t)dW(t). \tag{53}$$

Tomando

$$\xi(t) = \log X(t),$$

la ecuación (53) se transforma en

$$d\xi(t) = (\alpha(t) - \frac{\sigma(t)^2}{2} - \beta(t)e^{\xi(t)})dt + \sigma(t)dW(t)$$

o, admitiendo la dependencia de los coeficientes $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y $\sigma(t)$ de $\xi(t)$,

$$d\xi(t) = (\alpha(t,\xi(t)) - \frac{\sigma(t,\xi(t))^2}{2} - \beta(t,\xi(t))e^{\xi(t)})dt + \sigma(t)dW(t). \tag{54}$$

Para modelar la dinámica de población con la hibernación, supongamos que durante el período de la vida pasiva los coeficientes $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y $\sigma(t)$ quedan como en el último instante del período activo, que denotamos con I. Por eso pongamos

$$\alpha = \alpha(\iota(t), \xi(\iota(t))), \qquad \beta = \beta(\iota(t), \xi(\iota(t))), \qquad \sigma = \sigma(\iota(t), \xi(\iota(t))).$$

Supongamos que I es un conjunto cerrado periódico que tiene la forma (4) y para todos $\xi \in \mathbb{R}$ las funciones $\alpha(\iota(t),\xi)$, $\beta(\iota(t),\xi)$, $\sigma(\iota(t),\xi)$ son periódicas en t. Con eso, poniendo igualmente

$$\gamma(\iota(t), \xi(\iota(t))) = \alpha(\iota(t), \xi(\iota(t))) - \frac{\sigma(\iota(t), \xi(\iota(t)))^2}{2},$$

tenemos la ecuación

$$d\xi(t) = (\gamma(\iota(t), \xi(\iota(t))) - \beta(\iota(t), \xi(\iota(t)))e^{\xi(t)})dt + \sigma(\iota(t), \xi(\iota(t)))dW(t). \tag{55}$$

Recordemos que durante el período de hibernación la natalidad debe ser casi nula, mientras que la mortalidad debe ser estrictamente positiva. Por eso durante ese período se debe verificar

$$\gamma(\iota(t), \xi(\iota(t))) \leq -c_1 < 0$$

con una constante $c_1 > 0$.
Para la ecuación (55) se demuestra la proposición siguiente.

Proposición B. *Sean $\gamma(t,\xi)$, $\beta(t,\xi)$, $\sigma(t,\xi)$ funciones medibles y acotadas en $I \times \mathbb{R}$ y localmente lipschitzianas en ξ. Si*

$$\int_0^T \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \gamma(\iota(t), \xi)dt > 0, \qquad \inf_{t \in I,\, \xi \in \mathbb{R}} \beta(t,\xi) > 0, \tag{56}$$

entonces existe una solución periódica de la ecuación (55).

Demostración. Pongamos

$$Q(t) = \int_0^t q_1(s)ds, \qquad q_1(t) = \overline{\gamma}_0 - \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \gamma(\iota(t), \xi), \qquad \overline{\gamma}_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \gamma(\iota(t), \xi)dt. \tag{57}$$

Tomando

$$\eta(t) = \xi(t) + Q(t), \tag{58}$$

tenemos

$$d\eta(t) = (q_1(t) + \gamma(\iota(t), \xi(\iota(t))) - \beta(\iota(t), \xi(\iota(t)))e^{\xi(t)})dt + \sigma(\iota(t), \xi(\iota(t)))dW(t), \tag{59}$$

donde $\xi(\iota(s))$ se considera como función $\xi(\iota(s)) = \eta(\iota(s)) - Q(\iota(s))$.
Aplicando la fórmula de Ito a la función $V(\eta(t)) = \frac{\eta(t)^2}{2}$ y aplicando también la esperanza matemática, se obtiene

$$\mathbb{E}V(\eta(t)) = \mathbb{E}V(\eta(0)) +$$
$$+ \int_0^t \mathbb{E}\big[\eta(s)\big(q_1(s) + \gamma(\iota(s), \xi(\iota(s))) - \beta(\iota(s), \xi(\iota(s)))e^{-Q(s)}e^{\eta(s)}\big) + \frac{\sigma(\iota(s), \xi(\iota(s)))^2}{2}\big]ds.$$

Recordemos que, en virtud de (56), es $\overline{\gamma}_0 > 0$ y por eso de la definición de $q_1(s)$ se deduce que

$$q_1(s) + \gamma(\iota(s), \xi(\iota(s))) \geq \overline{\gamma}_0 > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{60}$$

Dado que $\gamma(\cdot,\cdot)$, $\beta(\cdot,\cdot)$, $\sigma(\cdot,\cdot)$ (y por eso también $Q(\cdot)$) son acotadas, teniendo en cuenta (60) y la segunda desigualdad de (56), con cálculos elementales se constata que

$$\sup_{|\eta|>R, s\in\mathbb{R}} \Big[\eta\big(q_1(s)+\gamma(\iota(s),\xi(\iota(s)))-\beta(\iota(s),\xi(\iota(s)))e^{-Q(s)}e^{\eta}\big)+\frac{\sigma(\iota(s),\xi(\iota(s)))^2}{2}\Big] \to -\infty \qquad (61)$$

para $R\to\infty$.
Establecida la relación (61), se puede demostrar la existencia de una solución periódica $\eta(t)$ de la ecuación (59) de manera análoga a la del lema 5.2 y del teorema A. Ya que $Q(t)$ es una función periódica (véase (57)), de (58) se deduce que $\xi(t)$ es una solución periódica de la ecuación (55). $\square$

RECEIVED: APRIL, 2016
REVISED: JUNE, 2016

REFERENCIAS

[1] BALDI, P. (1984): **Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni** Pitagora Ed., Bologna.

[2] CAILLY, P., TRAN, A., BALENGHIEN, T., L'AMBERT, G., TOTY, C., and EZANNO, P. (2012): A climate-driven abundance model to assess mosquito control strategies **Ecological Modelling**, 227:7–17.

[3] GIKHMAN, I. I. and SKOROKHOD, A. (1968): **Stochastic differential equations(en ruso)** Izd. Naukova Dumka. Traducción inglesa(1972), Springer-Verlag.

[4] HASMINSKII, R. Z. (1980): **Stochastic stability of differential equations, translated from Russian** Sijthoff-Noordhoff.

[5] IDDER, M. A. and B., P. (2008): Efficacité de la coccinelle stethorus punctillum (weise) comme prédateur de l'acarien oligonychus afrasiaticus (mcgregor) dans les palmeraies de la région d'ouargla en algérie **Fruits**, 63:85–92.

[6] KORICHI, F. (2016): Existence et unicité de la solution pour une classe d'équations stochastiques à coefficients définis par rapport à un ensemble fermé de temps To appear in **Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino**.

[7] LUPULESCU, V. and LUNGAN, C. (2013): Random integral equations on time scales **Opuscula Math.**, pages 323–335.

[8] SAHARAOUI, L. and GOURREAU, J. M. (2000): Les coccinelles d'algérie: inventaire et régime alimentaire **Recherche Agron**, 6:11–27.

[9] SANYAL, S. (2005): **Stochastic dynamic equations** Ph. d., Missouri Univ. Sci. Techn.