

DOS ENFOQUES PARA EL ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES FUNCIONALES MÚLTIPLES: UN ESTUDIO COMPARATIVO.

Jesús E. Sánchez*, Cristina Chávez**, Roberto Piñeiro*** y Arsenio Areces****

*Instituto de Cibernética, Matemática y Física

**Instituto Superior Politécnico “José Antonio Echeverría”

***Centro de Investigaciones Pesqueras

****Instituto de Oceanología

ABSTRACT

Functional principal component analysis (FPCA) is a technique which has been gaining power in applications by means of getting acquainted with its scope and the possibilities of interpretation of complex data. A direct generalization of FPCA is the Multiple Functional Principal Component Analysis (MFPCA) which deals with multiple time series. The amplest known approach is due to Ramsay and Silverman (2002). In this paper the proposal by Berrendero *et al.* (2011) is presented and a comparative study is done and a linking strategy is proposed in search of a better quality in the interpretation of the results. This strategy is applied to a socioecological study related with the evolution of lobster fishing in the western part of Cuba.

KEYWORDS:

Functional principal component analysis, multiple functional principal component analysis, analysis of socioecological data

MSC: 62H25

RESUMEN

El análisis de componentes principales funcionales (ACPF) es una técnica que se ha ido imponiendo en las aplicaciones en la medida en que se ha ido conociendo su alcance y las posibilidades de interpretación de datos complejos. Una generalización directa del ACPF lo constituye el análisis de componentes principales funcionales múltiple (ACPFM) que se ocupa de series de tiempo múltiples. El enfoque más conocido es el de Ramsay & Silverman (2002). En este trabajo se presenta la propuesta de Berrendero *et al.* (2011) y se hace un estudio comparativo entre ambos y se hace una propuesta de vinculación de ambos, buscando una mejor calidad de la interpretación de los resultados. Esta estrategia se aplica a un estudio socioecológico relacionado con la evolución de la pesca de la langosta en la zona occidental de Cuba

1. INTRODUCCIÓN

El uso del análisis de componentes principales en las más diversas disciplinas ha dado pie a que se estudien nuevas variantes de esta técnica básica en los estudios multivariados. Así se tienen: el análisis de datos composicionales (Aitchison, 1982 y 1983), el análisis de componentes principales comunes (Flury, 1984), el análisis de componentes principales robusto (Rousseeuw (1984) y Varmuza & Filzmoser (2008) y el análisis de componentes principales funcionales (Ramsay & Silverman, 2005).

El análisis de datos provenientes de investigaciones que transcurren en el tiempo siempre ha sido de interés para numerosas disciplinas así como también para el propio desarrollo de la Estadística Matemática. El análisis multivariado clásico no se había ocupado específicamente del tratamiento de este tipo de observaciones hasta que Ramsay presenta su artículo “When the Data are Functions” en 1982 en la revista *Psychometrika*. Posteriormente y ya incorporado B. W. Silverman, con la publicación de sus libros *Functional Data Analysis* (2da edición, 2005) y *Applied Functional Data Analysis* (2002) y cobra cuerpo este tipo de análisis. Se remite al lector a ambas publicaciones para encontrar a otros autores que se han ocupado de estos aspectos, así como de aplicaciones en muchas disciplinas científicas.

Si bien el trabajo de Ramsay & Silverman trata de datos funcionales, ha sido precisamente en aquellos conjuntos de observaciones que transcurren en el tiempo los que han tenido una mayor aplicación. Puede verse por ejemplo el trabajo de Chávez Chong *et al.* (2014) en el que se hace un estudio de series de tiempo económicas.

De una manera básica, el análisis de componentes principales funcionales puede dividirse en dos partes: el análisis de una serie de tiempo y el análisis de varias series de tiempo simultáneamente. En el primer caso se trata fundamentalmente de considerar las observaciones de una misma variable a través del tiempo para varios individuos. El tratamiento dado por Ramsay & Silverman es semejante al análisis de componentes principales clásico y es precisamente en la interpretación donde se pone de manifiesto un conjunto de aspectos que permiten una mejor comprensión del comportamiento de la serie.

Sin embargo, al considerarse simultáneamente varias series de tiempo medidas a los mismos individuos el análisis puede verse desde diferentes ángulos. En este trabajo se presentarán el enfoque de Ramsay & Silverman que es el de uso más amplio y una propuesta novedosa presentada por Berrendero *et al.* (2011).

En el presente trabajo se darán las ideas básicas de ambos y se realizará una comparación entre ambos métodos, fundamentalmente en cuanto a la profundidad de la interpretación de los resultados sobre la base de los datos de condiciones socioeconómicas en zonas de pesca de la langosta del Occidente de Cuba, recogidos entre los años 1982 y 2012.

En la sección siguiente se presentan brevemente ambos métodos y en la posterior se hace un análisis de los resultados obtenidos al aplicar ambos enfoques a los datos antes mencionados. El trabajo termina con las conclusiones y recomendaciones.

2. DOS ENFOQUES

Los enfoques que se dan a continuación parten de disponer la matriz de observaciones de forma diferente. De manera general, se considera que se tiene una matriz X de n filas que representan los individuos a los que se les hicieron las observaciones. La distinción entre los métodos está precisamente en las columnas, por lo que se explicará en detalle dentro de los acápites correspondientes. En general, se habla de un conjunto de variables medidas a lo largo de un período de tiempo. Se supone que los tiempos de medición son los mismos para todas las variables.

2.1. Ramsay & Silverman

La idea básica del enfoque de Ramsay & Silverman para el caso de varias series de tiempo observadas simultáneamente es una generalización directa de su método para una sola. En el presente caso se considera la siguiente estructura de las variables observadas:

$$X = (x_{11}, \dots, x_{1s}, x_{21}, \dots, x_{2s}, \dots, x_{i1}, \dots, x_{is}, \dots, x_{p1}, \dots, x_{ps}) \quad (1)$$

De la expresión anterior se aprecia que se tienen p variables con observaciones en s tiempos cada una. Ramsay & Silverman proponen llevar este caso al ya expuesto en su libro *Functional Data Analysis* (2002) y para ello buscan definir un producto interno en el espacio de funciones y de esa manera tener exactamente lo mismo que en el caso del ACPF.

2.2. Berrendero, Justel & Svarc

En el enfoque de Berrendero *et al.* la matriz X se dispone de la forma siguiente:

$$X = (x_{11}, \dots, x_{p1}, \dots, x_{1j}, \dots, x_{pj}, \dots, x_{1t}, \dots, x_{pt}) \quad (3)$$

Como se aprecia, en este caso las variables se ordenan según los tiempos, de modo que se tienen p submatrices cada una de tamaño t . Berrendero *et al.* resumen su enfoque en una proposición que constituye el centro de su artículo.

2.3. Consideraciones sobre los enfoques

Lo enunciado en los dos acápites anteriores puede resumirse de la forma siguiente:

Ramsay & Silverman: A la matriz dispuesta en la forma (1) se le aplica el análisis de componentes principales clásico Berrendero *et al.*: La matriz dada en la fórmula (3) se descompone en las submatrices mencionadas y se aplica a cada uno el análisis de componentes principales clásico.

2.4. Presentación de los resultados

2.4.1. Ramsay & Silverman

El análisis de la importancia de los componentes es idéntico a la forma de proceder en el caso clásico. Los autores dan una forma muy interesante de representar gráficamente los resultados de los vectores propios a través de un gráfico de los componentes como perturbaciones de la media (para un ejemplo de su uso, véase p.ej. el libro *Applied Functional Data Analysis* y Chávez *et al.* (2014), así como los resultados de la aplicación en el acápite 3).

De igual forma, utilizan la expresión de (2) para tener una medida de la importancia de la variable estudiada en el contexto de todo el período.

Asimismo, pueden representarse los individuos en el espacio generado por los 2 primeros componentes, como se hace en el ACP clásico.

2.4.2. Berrendero *et al.*

Como en el enfoque de Berrendero se hacen tantos ACP como tiempos haya, a cada uno se le puede dar el tratamiento de interpretación habitual en el ACP clásico.

Berrendero propone como forma integradora para la interpretación global de los resultados dos medidas de la variabilidad que se exponen a continuación:

π_1 : Es un promedio de las fracciones de variabilidad explicadas por las componentes r en el período de tiempo estudiado. Su expresión matemática es:

$$\pi_{1r} = \frac{1}{d-c} \int_c^d \frac{\lambda_r(t)}{v(t)} dt$$

Y su versión para el caso en que se trabaja con una muestra es:

$$\hat{\pi}_{1r} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N \frac{\widehat{\lambda}_r(t_k)}{\widehat{v}(t_k)}$$

π_2 : Integra la varianza del componente en el tiempo t y compara el resultado con la integral de la varianza total. Su expresión es:

$$\pi_{2r} = \frac{\int_c^d \lambda_r(t) dt}{\int_c^d v(t) dt}$$

En el caso muestral se tiene:

$$\widehat{\pi}_{2r} = \frac{\sum_{k=1}^N \widehat{\lambda}_r(t_k)}{\sum_{k=1}^N \widehat{v}(t_k)}$$

2.5 Propuesta de utilización

En lo que sigue se hará una aplicación de lo visto hasta el momento analizando los datos según ambos enfoques, con vistas a comprobar sobre la base de este ejemplo cómo actúan ambos enfoques y qué relación guarda la información que suministra cada uno.

El enfoque de Ramsay & Silverman da una visión única del problema que se explica muy claramente a través del gráfico mencionado en 2.4.1. , mientras que la forma sistemática en que trabaja el enfoque de Berrendero *et al.* permite ver el decurso del fenómeno a lo largo del período de tiempo en estudio. Los índices propuestos en este enfoque dan una idea de la importancia de las componentes y permiten presentar los resultados globales bajo el prisma de la importancia que tienen las dimensiones que se utilizan.

3. APLICACIÓN A DATOS SOCIOECONÓMICOS

3.1. Consideraciones preliminares

En el sistema socioecológico del golfo de Batabanó, se desarrolla la pesquería de la langosta espinosa (*Panulirus argus*, Latreille 1804), capturándose entre un 60 % y 70 % de los desembarques nacionales. El deterioro paulatino de la calidad ambiental debido a la acción de variables climático-antropogénicas, se ha reflejado directamente en modificaciones de la extensión y naturaleza de los hábitats marinos bentónicos, situación que ha afectado las áreas de cría y pesca de su principal recurso pesquero. La ausencia de un enfoque holístico apoyado en indicadores e índices para explicar la evolución y manejo de esta pesquería, impidió evaluar con objetividad la dinámica de su abundancia desde finales de la década de 1980 hasta el presente. La propuesta de un índice de sustentabilidad basado en variables e indicadores correspondientes a

cinco categorías, con el fin de examinar el período desde 1980 al 2013, posibilitó caracterizar la evolución de este sistema socioecológico y estimar su variabilidad en el tiempo (Piñeiro, 2015).

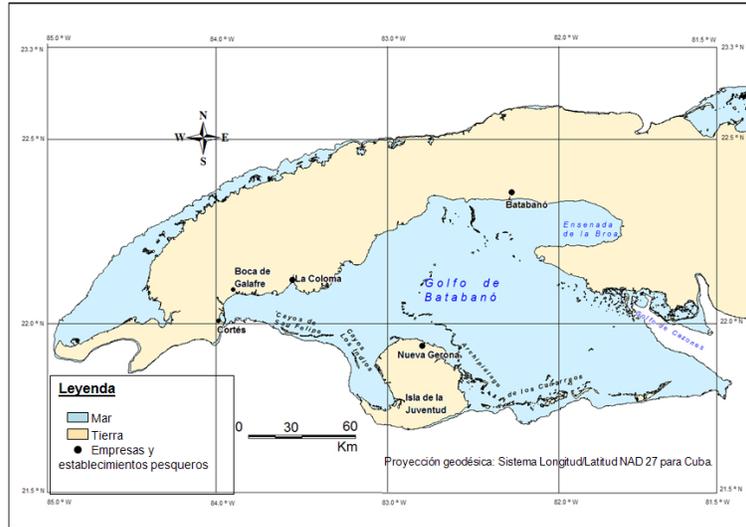


Figura 1. Situación y límites del área de estudio (Golfo de Batabanó).

En el presente trabajo se analizan las condiciones socio-económicas de la región donde se asientan las empresas y establecimientos pesqueros a lo largo del período 1986 a 2012. Para su caracterización se emplearon las siguientes variables: Población Total de cada Municipio, Envejecimiento (Proporción de habitantes de 60 o más años con respecto a la población total), Migración (Saldo migratorio, diferencia entre los que llegan y los que se van) e Índice de Aprovechamiento Agrícola (Relación entre tierra agrícola trabajada y tierra agrícola potencial) (Piñeiro, 2015). Las estaciones consideradas en el estudio aparecen referidas en el Anexo 1.

3.2. Resultados

En la figura 2 se presentan los datos de las cuatro variables consideradas entre los años 1982 y 2012. En ambos casos se trabajó con la matriz de correlaciones en lugar de la de varianzas y covarianzas, ya que las cuatro variables del estudio tienen órdenes de magnitud muy diferentes.

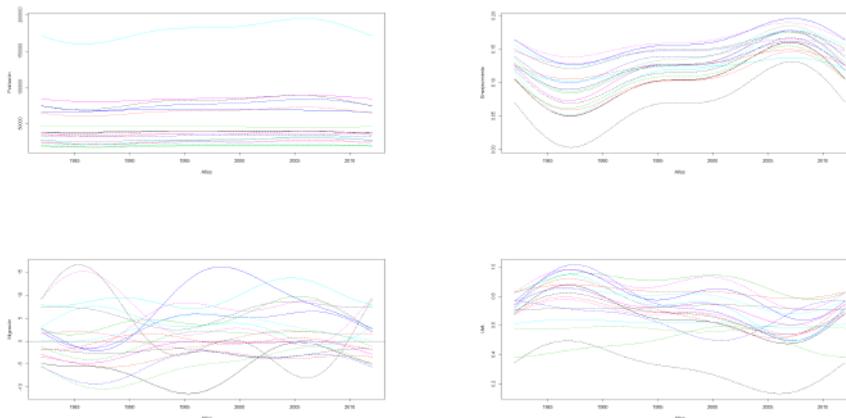


Figura 2. Datos de las variables estudiadas. Comenzando en la esquina superior izquierda y en sentido de las manecillas del reloj aparecen Población, Envejecimiento, IAA y Migración

3.2.1. Enfoque de Ramsay & Silverman

Los resultados que aparecen en la figura 3 corresponden a las primeras componentes de cada una de las variables estudiadas según el ACPF. En la figura 4 se tiene la disposición de los individuos según el sistema de referencia generado a partir de las 2 primeras componentes del ACPFM.

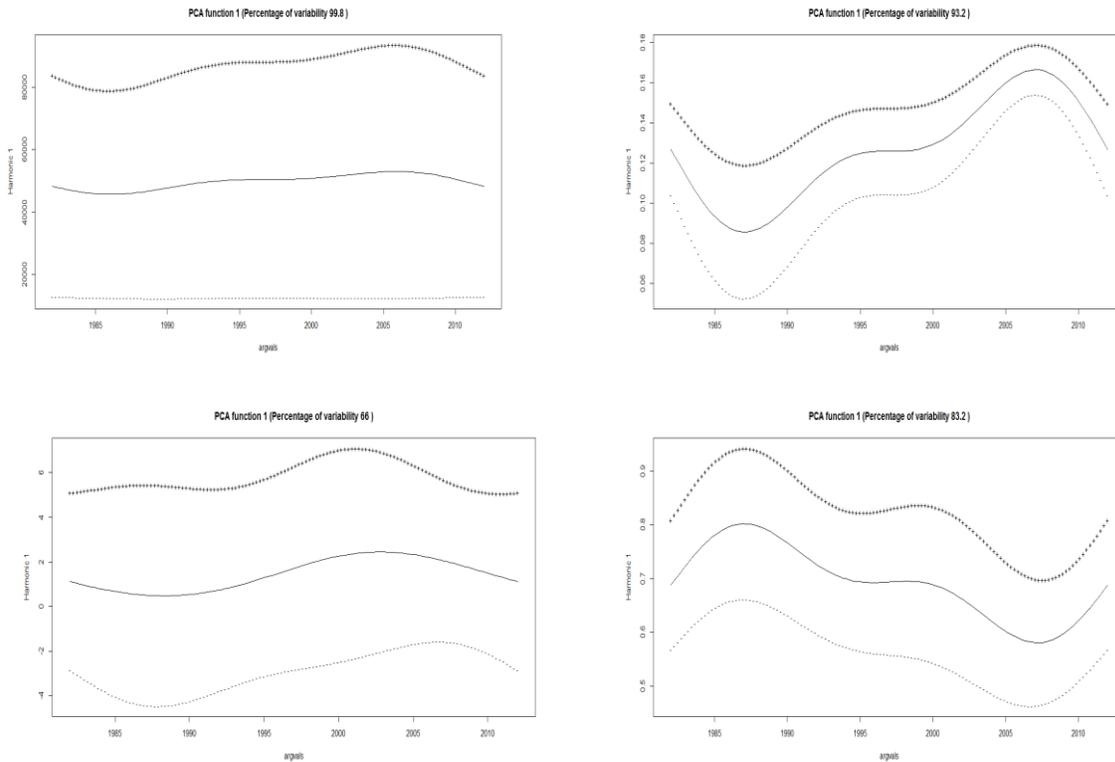


Figura 3. Gráfico de la primera componente para cada una de las variables estudiadas. Comenzando en la esquina superior izquierda y en sentido de las manecillas del reloj aparecen Población, Envejecimiento, IAA y Migración.

Pasando a los resultados del ACPFM, se calcularon las normas de cada una de las variables estudiadas según la fórmula propuesta:

$$\|\xi_1^P\|^2 + \|\xi_1^E\|^2 + \|\xi_1^M\|^2 + \|\xi_1^I\|^2 = 1$$

Cuyos sumandos representan la contribución (importancia) de cada una de las variables en la primera componente:

$$0.1122 + 0.4250 + 0.1416 + 0.3212$$

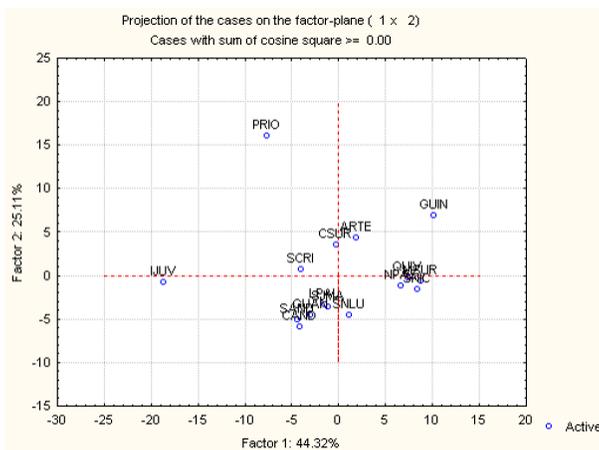


Figura 4. Representación de los individuos en las dos primeras componentes principales del ACPFM.

De donde se concluye que la variable Envejecimiento es la de mayor importancia a lo largo del tiempo, seguida por IAA. Asimismo, se hicieron los gráficos correspondientes de los valores de los pesos en la componente 1 para cada una de las variables estudiadas. Estos gráficos se presentan en el Anexo 2. En la figura 4 se presenta la disposición de los individuos según los dos primeros componentes del ACPFM.

3.2.2. Enfoque de Berrendero

A continuación se da una tabla de los resultados de aplicar el enfoque propuesto por Berrendero *et al.*

Años	Ira Comp	% Var. Expl.	Variables En Ira				Variables en 2da			
			P	E	M	I	P	E	M	I
1982	1.87	46.74	-	+	-	+				
1983	1.81	45.16	-	+		+				
1984	1.72	43.00	-	+		+				
1985	1.78	44.71	+	-		-				
1986	1.68	42.06	+	-		-				+
1987	1.72	43.11	-	+		+				+
1988	1.74	43.72	-	+		+				+
1989	1.74	43.60	-	+		+				+
1990	1.75	43.78	-	+		+				-
1991	1.79	44.64		+		+	-			-
1992	1.88	47.08		-		-	+			+
1993	1.99	49.93		-	-	-	+			
1994	2.15	53.85		-	-	-	+			
1995	2.26	56.48		-	-	-	+			
1996	2.23	55.57		-	-	-	+			
1997	2.20	54.95		-	-	-	+			
1998	2.14	53.51		+	+	+	+			
1999	2.08	52.19		+	+	+	+			
2000	2.15	53.75		-	-	-	+			
2001	2.22	55.53		-	-	-	+			
2002	2.17	54.32		-	-	-	+			
2003	2.17	54.23		-	-	-	+			
2004	2.15	53.63		-	-	-	+			
2005	2.14	53.45		-	-	-	-			
2006	2.04	50.94		-	-	-	-			
2007	2.11	52.73		-	-	-	-			
2008	2.06	51.60		-	-	-	+			
2009	1.86	45.66	+	-	-	-	-	-	+	
2010	1.69	42.29		-		-	-	-	+	
2011	1.56	39.14		-		-	-	-	+	
2012	1.55	38.68		+	-	+	+			-

Tabla 1. Resultados de los ACP según el enfoque de Berrendero *et al.* (En las columnas de Variables, los signos de + y - representan simultáneamente que la variable en cuestión es importante en la componente y el signo propiamente).

En este caso, el valor de $\hat{\pi}_{11} = 0.47$, solo para la primera componente, mientras que $\hat{\pi}_{21} = 0.56$, también para la 1ra.

Al analizar la estructura de las componentes, pueden distinguirse varios períodos a lo largo del tiempo en el que aparecen conformaciones semejantes de los componentes principales, a saber:

Período	Años comprendidos
1	1982
2	1983 - 1990
3	1991 - 1992
4	1993 - 2008
5	2009 - 2012

Tabla 2. División en períodos según los resultados de las componentes principales

Según la definición de π_{1r} y π_{2r} , estos pueden utilizarse también para agrupamientos de años. En el caso de los períodos antes considerados se tienen los siguientes resultados:

Períodos	$\hat{\pi}_{11}$	$\hat{\pi}_{21}$
1	-	-
2	0.3879	0.4356
3	0.3057	0.4587
4	0.5039	0.5353
5	0.3315	0.41

Tabla 3. Valores de $\hat{\pi}_{11}$ y $\hat{\pi}_{21}$ para los años agrupados en períodos

De cada uno de los períodos considerados se presenta uno o varios gráficos de los individuos que, de alguna forma, pueden verse como representativos de las componentes.

Período 1. Año 1982

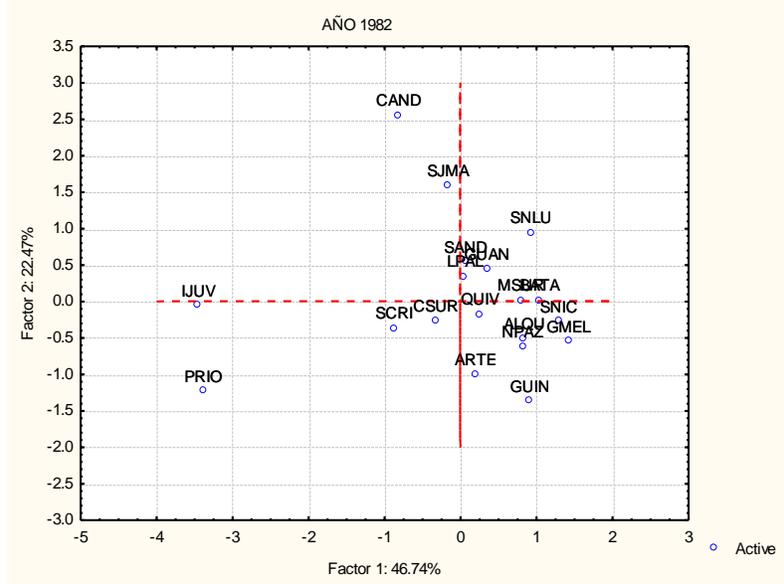


Figura 5. Distribución de los individuos según las componentes principales, período 1
Período 2 1983 – 1990

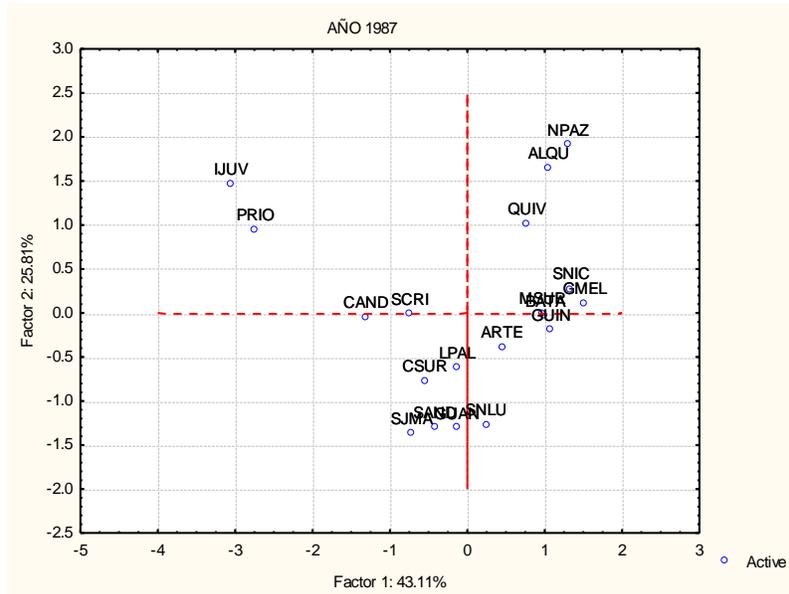


Figura 6. Distribución de los individuos según las componentes principales, período 2.

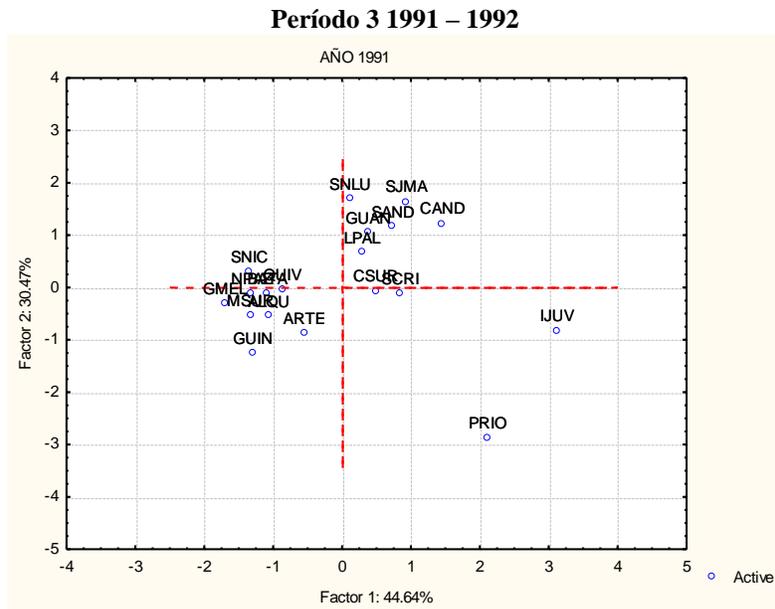


Figura 7. Distribución de los individuos según las componentes principales, período 3
Período 4 1993 – 2008

Este es un período largo en el que se aprecia una cierta evolución, de ahí que para este caso se presenten dos años como “típicos”

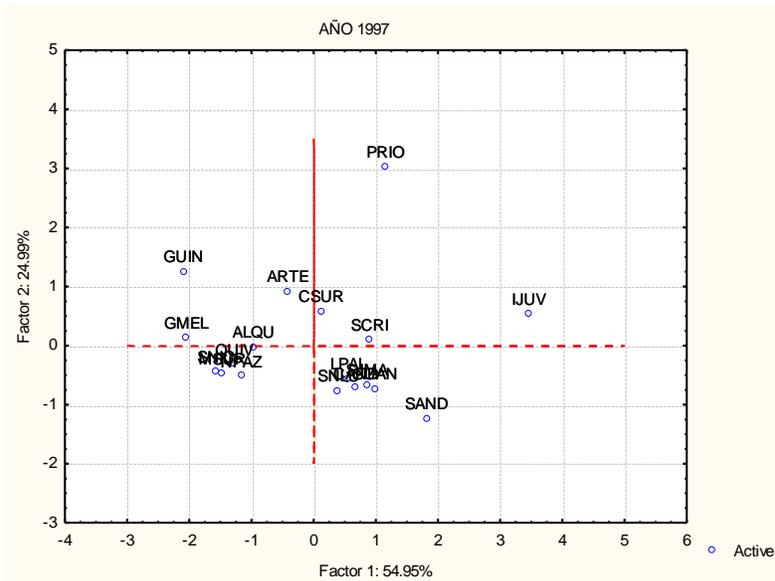


Figura 8. Distribución de los individuos según las componentes principales, período 4.1

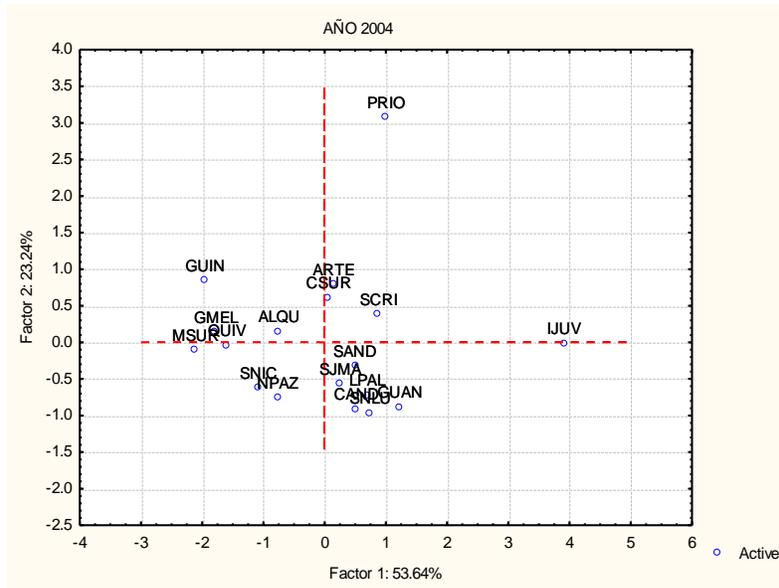


Figura 9. Distribución de los individuos según las componentes principales, período 4.2 Período 5. 2009 – 2012

Este período se caracteriza por la diversidad, como se aprecia en la tabla 1, de ahí que se presenten los 4 años que agrupa

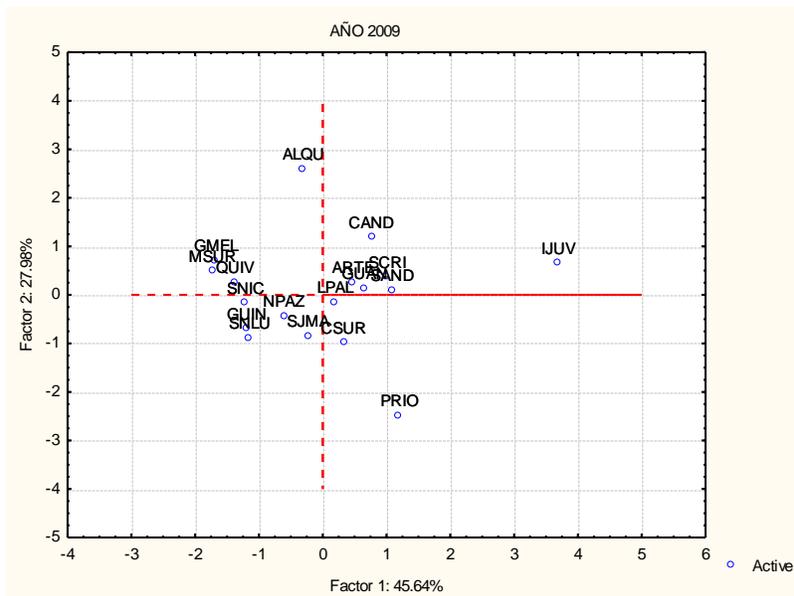


Figura 10. Distribución de los individuos según los componentes principales, período 5, Año 2009

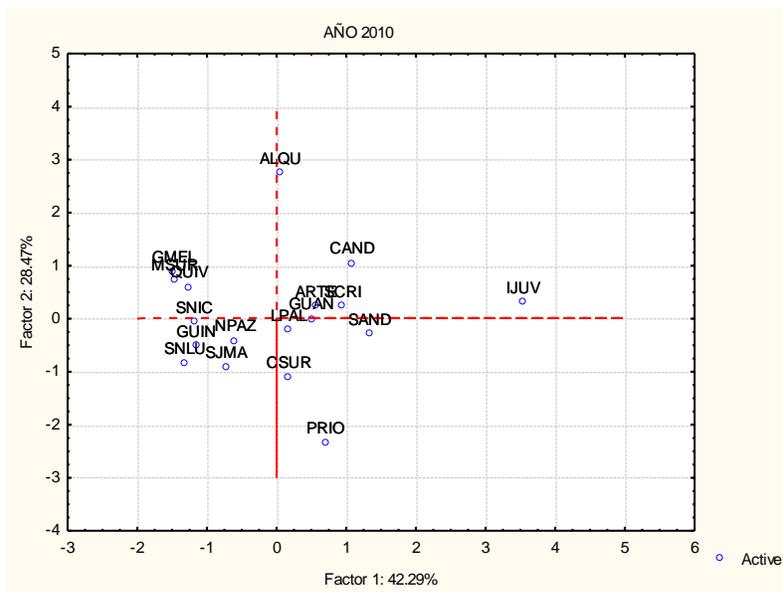


Figura 11. Distribución de los individuos según las componentes principales, período 5, Año 2010

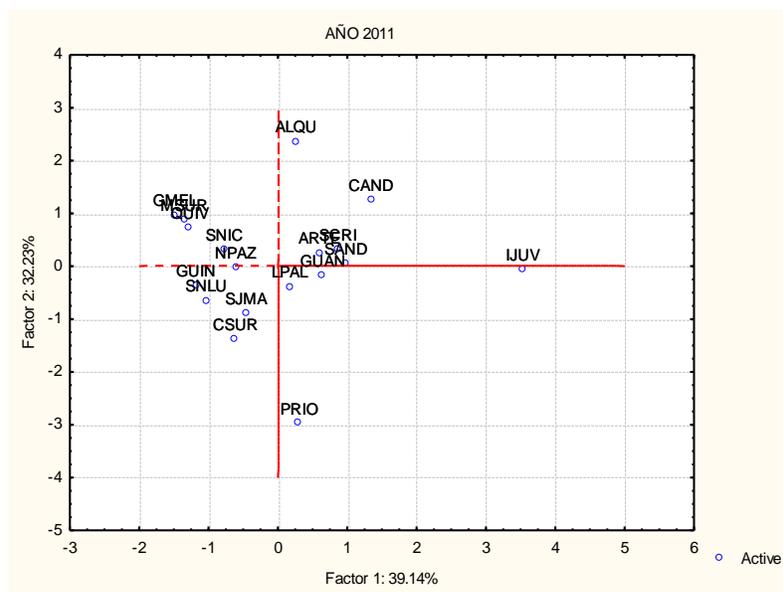


Figura 12. Distribución de los individuos según las componentes principales, período 5, Año 2011

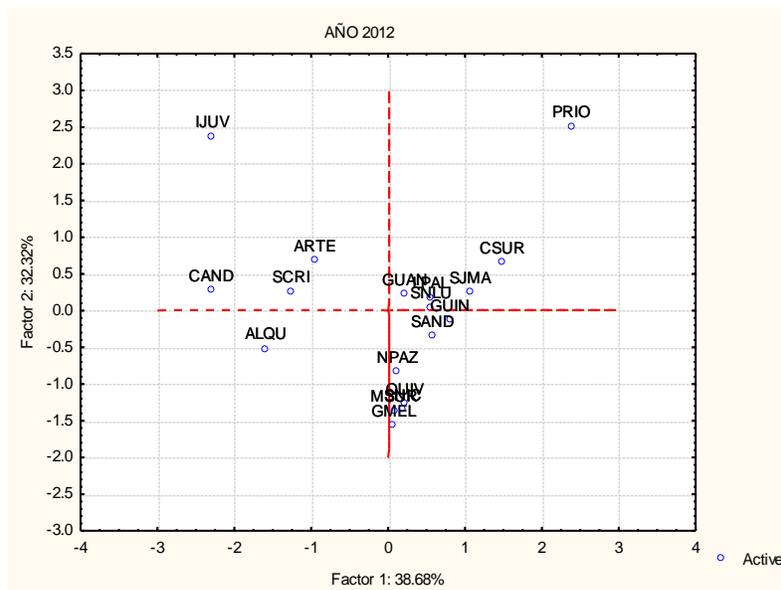


Figura 13. Distribución de los individuos según las componentes principales, período 5, Año 2012

3.3. Análisis del comportamiento de la pesca de la langosta

En este acápite se presentan los datos de captura de langosta de las 3 empresas estudiadas y se hace un análisis a la luz de los períodos determinados en los ambientes socioecológicos. En el gráfico que aparece a continuación se presentan las series de la captura de las langostas en el período de tiempo estudiado

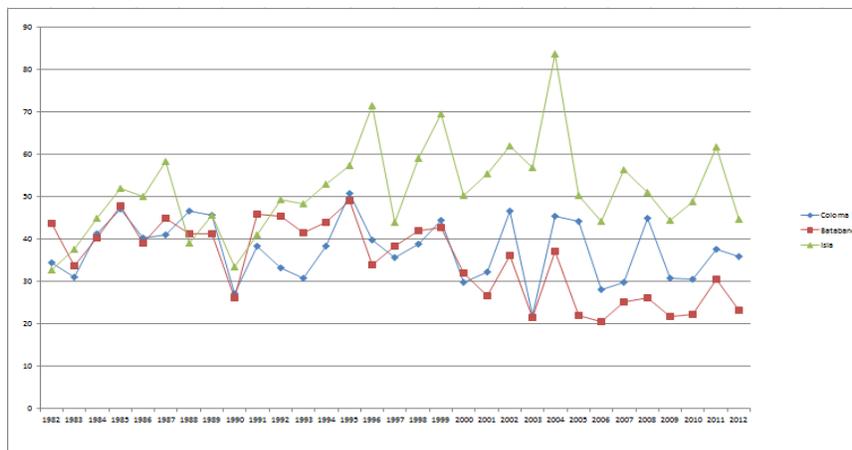


Figura 14. Series de la captura de la langosta en las tres empresas estudiadas

En un análisis preliminar de las series de la figura 14 se puede apreciar un primer período que llega aproximadamente hasta 1999 en el que no se puede apreciar la superioridad de ninguna de las empresas. A partir del año 2000 ya queda establecido un orden en cuanto a los niveles de captura, a saber: la Isla, con los niveles más altos, seguida por La Coloma y Batabanó.

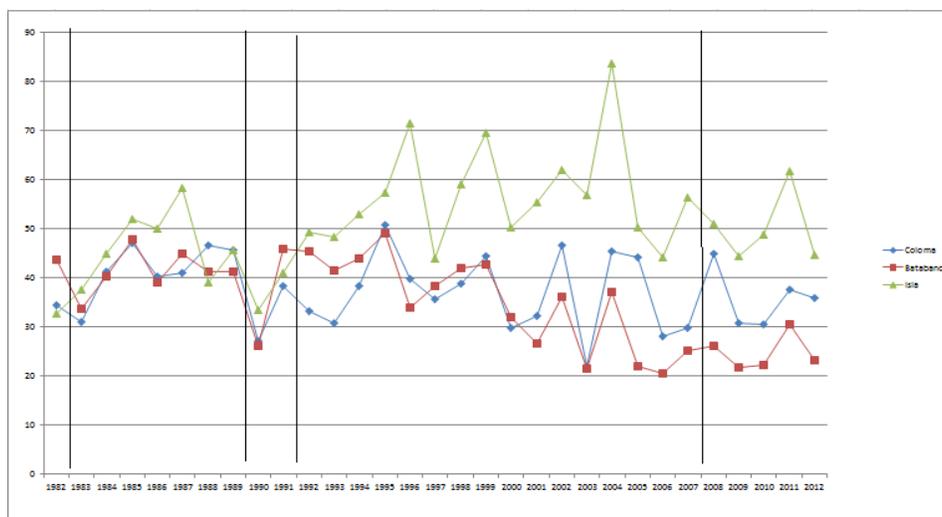


Figura 15. Agrupamiento de los años según los períodos determinados por el análisis de componentes principales funcionales

Al superponer los períodos determinados por el ACPFM en las series de captura se ve que existe una notable correspondencia entre estos. Llamen la atención los 1992 a2007 que dan muestras, como se había señalado, de una gran estabilidad. El último período, a pesar de que se mantiene la misma relación que en el anterior, pero se distingue por un cambio radical en las localidades que conforman las empresas, según se ve en las figuras 12 y 13. El análisis se realizó con el paquete fda (Ramsay *et al.*, 2014) en el software R (R Core Team, 2012).

3.4. Análisis comparativo

Hay una coincidencia casi total entre los resultados relativos a la importancia de las variables dentro de la primera componente en ambos enfoques. Esto se aprecia cuando se comparan lo expuesto con respecto a las variables en la tabla 1 y en los gráficos del Anexo 2. En ambos casos se obtiene que la variable más importante a lo largo del tiempo es Envejecimiento, seguida a cierta distancia por Migración.

El gráfico único que arroja el enfoque de Ramsay & Silverman (ver figura 4) se corresponde en líneas generales con los expuestos en las figuras del período 1993-2008, que es precisamente el que agrupa la mayor cantidad de años. Es notable la posición que ocupa IJUV en todos los gráficos presentados. PRIO manifiesta en los primeros años una tendencia a separarse, producto fundamentalmente de su población, pero posteriormente pasa a integrar los grupos del centro. Sería muy interesante un análisis pormenorizado de los cambios de posición de los individuos a lo largo del tiempo, ya que esto daría una noción de su evolución en función de la migración y el envejecimiento, fundamentalmente, pero por razones de espacio aquí solo se mencionan los hechos más sobresalientes.

El enfoque de Ramsay & Silverman pone de manifiesto lo ocurrido en todo el período estudiado de una forma concisa, mientras que el de Berrendero *et al.* da una descripción pormenorizada a lo largo de los años con lo que se logra una visión más enfocada a la unidad de tiempo.

La unión de ambos enfoques brinda una perspectiva clara acerca de la forma en que fue variando la situación socioeconómica de la región estudiada y permitió la conformación de períodos con relativa estabilidad. Este resultado fue importante para el estudio acerca de las fluctuaciones de la captura de langosta que se presenta en la última parte del artículo.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- Los enfoques estudiados se complementan y juntos dan una visión global y local de la situación estudiada, por lo que se recomienda su utilización conjunta en las aplicaciones.
- Se determinó que las variables Envejecimiento y Migración fueron las más importantes en los cambios ocurridos en el ambiente socioeconómico estudiado.

De acuerdo con las relaciones entre las variables obtenidas de la aplicación del enfoque de Berrendero *et al.* se conformaron períodos de relativa estabilidad que deberán tenerse en cuenta cuando se estudie el comportamiento de la captura de langosta.

RECEIVED APRIL, 2016
REVISED: NOVEMBER, 2016

REFERENCES

- [1] AITCHISON, J. (1982): “The statistical analysis of compositional data (with discussion)”, **Journal of the Royal Statistical Society, Series B**, 44(2), pp. 139-177
- [2] AITCHISON, J. (1983): “Principal component analysis of compositional data”, **Biometrika**, 70(1), pp. 57-65
- [3] BERRENDERO, J. , JUSTEL, A. & SVARC, M. (2011): “Principal components for multivariate functional data”, **Computational Statistics and Data Analysis**, 55, pp. 2619-2634
- [4] CHÁVEZ CHONG, C., SÁNCHEZ GARCÍA, J. E. & LACERDA, J. (2014): “Análisis de componentes principales funcionales en series de tiempo económicas”, **Reporte de Investigación ICIMAF**
- [5] FLURY, B. (1984): “Common principal components in k groups”, **Journal of the American Statistical Association**, 79, pp. 892-898
- [6] PIÑEIRO, R. (2015): **La sustentabilidad en la pesquería de la langosta espinosa (*Panulirus argus*) en el Golfo de Batabanó, Cuba. Tesis presentada en opción al grado de Doctor en Ciencias Geográficas, La Habana**
- [7] R-CORE TEAM (2012): **R: A language and environment for statistical computing**, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>
- [8] RAMSAY, J.O. (1982): “When the data are functions”, **Psychometrika**, 47, pp. 379-396
- [9] RAMSAY, J.O. & SILVERMAN, B. W. (2005): **Functional Data Analysis (2nd Edition)**, Springer, Nueva York
- [10] RAMSAY, J.O. & SILVERMAN, B.W. (2002): **Applied Functional Data Analysis**, Springer, Nueva York
- [11] RAMSAY, J.O., WICKHAM, H., GRAVES, S. & HOOKER, GILES (2014): **fda: Functional Data Analysis, R package version 2.4.3.**, <http://CRAN.R-project.org/package=fda>
- [12] ROUSSEEUW, P. J. (1984): “Least median of square regression”, **Journal of the American Statistical Association**, 79, pp. 871-880
- [13] VARMUZA, K. & FILZMOSER, P. (2008): **Introduction to Multivariate Statistical Analysis in Chemometrics**, CRC Press, Boca Raton

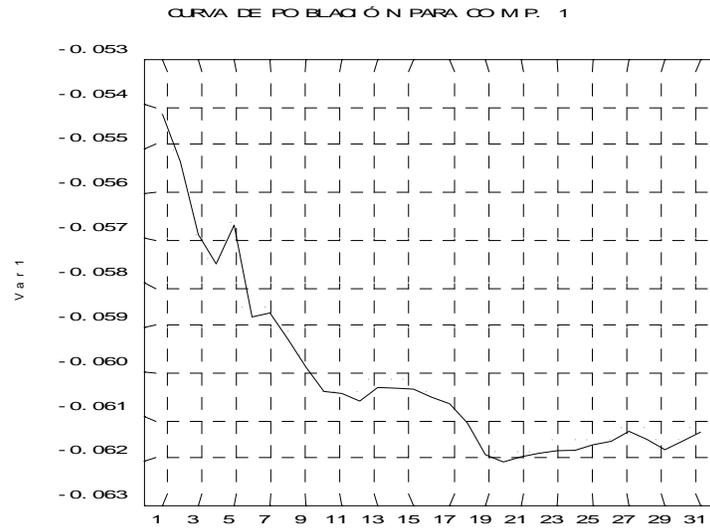
ANEXO 1

Relación de municipios considerados en el estudio.

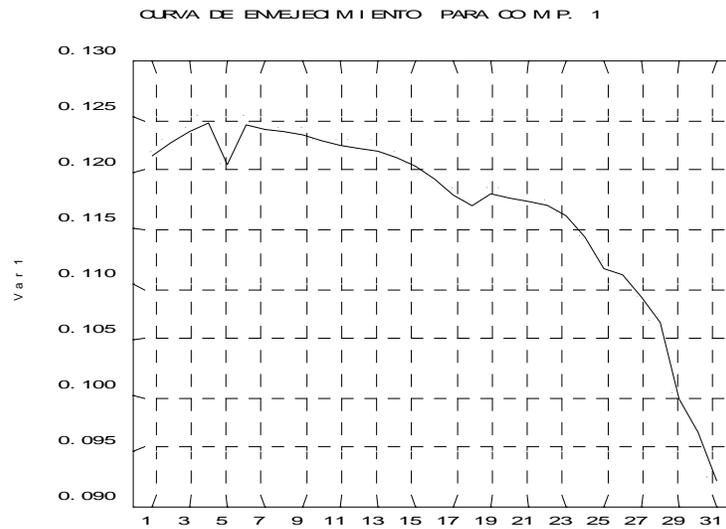
Provincia	Municipio	Abreviatura
Pinar del Río	Sandino	SAND
	Guane	GUAN
	San Juan y Martínez	SJMA
	San Luis	SNLU
	Pinar del Río	PRIO
	Consolación del Sur	CSUR
	Los Palacios	LPAL
Artemisa	San Cristóbal	SCRI
	Candelaria	CAND
	Artemisa	ARTE
	Alquízar	ALQU
	Güira de Melena	GUME
Mayabeque	Quivicán	QUIV
	Batabanó	BATA
	Melena del Sur	MSUR
	Güines	GUIN
	San Nicolás	SNIC
	Nueva Paz	NP AZ
Municipio Especial	Isla de la Juventud	IJUV

ANEXO 2 Representaciones gráficas de los componentes según el ACPFM

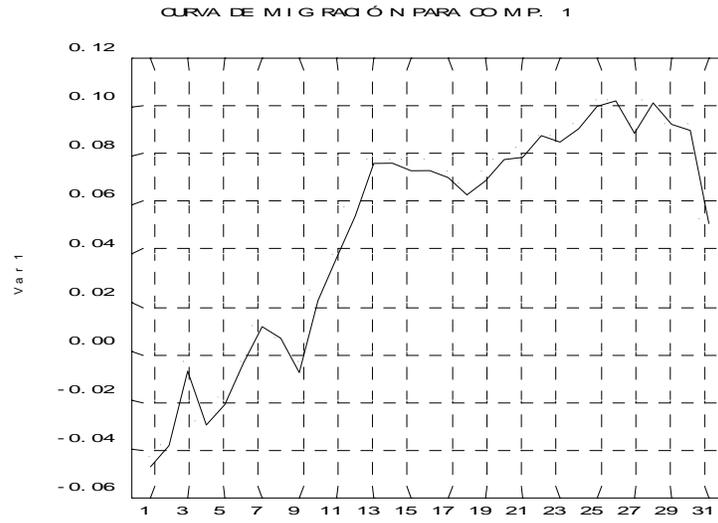
1. Población



2. Envejecimiento



3. Migración



4. IAA

