

ACO CON UNA ESTRATEGIA DE EXPLORACIÓN EN DOS ETAPAS PARA EL PROBLEMA DE CUBRIMIENTO DE CONJUNTOS.

Byron Oviedo¹, Amilkar Puris, Harold Escobar, Jorge Murillo, Janeth Mora, Yaima Trujillo, Jorge Guanín
Universidad Técnica Estatal de Quevedo – Facultad de Ciencias de la Ingeniería, EC120508,

ABSTRACT

Optimization based on Ant Colony two stages (TS -ac), it represents a way to improve exploration strategy meta-heuristic optimization based on Ant Colony (ACO). TS-ACO, it is based on the methodology of "divide and conquer" and its effectiveness has been proven in several discrete optimization problems. In this paper, three approaches to TS-ACO are presented and appropriate adjustments are made to test their effectiveness in solving the problem of Coverage Sets (SCP). These approaches use partial results (only sub solution (S-TS-ACO) or only pheromone trail (P-TS-ACO) or both (PS-TS-ACO)), obtained in the first phase, in order to guide exploration in the second phase of the search process. Experimental results show that the best solutions are achieved by the variant P-TS-ACO. Finally a comparative study of the two-stage strategy and the original ACO strategy was performed. The results show that the proposed P-TS-ACO, you get significantly better results than the original strategy, in the same execution time and under the same parameter values.

KEYWORDS: Ant Colony-based Optimization, Divide and Conquer Strategy, Covering Sets

MSC: 90C59

RESUMEN

La Optimización basada en Colonia de Hormigas en dos Etapas (TS -ACO), representa una manera de mejorar la estrategia de exploración de la meta-heurística Optimización basada en Colonia de Hormigas (ACO). TS -ACO, se basa en la metodología de "divide y vencerás" y su eficacia ha sido probada en varios problemas discretos de optimización. En este trabajo, se presentan tres enfoques de TS-ACO y se realizan los ajustes pertinentes para probar su eficacia en la solución del Problema de Cubrimiento de Conjuntos (SCP). Estos enfoques utilizan los resultados parciales (sólo sub solución (S-TS-ACO) o sólo rastro de feromonas (P-TS-ACO) o ambos (PS-TS-ACO)), obtenidos en la primera fase, con el fin de guiar la exploración en la segunda fase del proceso de búsqueda. Los resultados experimentales muestran que las mejores soluciones son alcanzadas por la variante P-TS-ACO. Finalmente se realizó un estudio comparativo entre la estrategia en dos etapas y la estrategia original de ACO. Los resultados muestran que la propuesta P-TS-ACO, obtiene resultados significativamente mejores que la estrategia original, en el mismo tiempo de ejecución y bajo los mismos valores de los parámetros.

PALABRAS CLAVE: Optimización basada en Colonias de Hormigas, Estrategia Divide y Vencerás, Conjunto de Cubrimiento

MSC: 90C59

1. INTRODUCCIÓN

El Problema de Cubrimiento de Conjuntos (Set Covering Problem, SCP) es un problema clásico de optimización discreta que pertenece a la categoría de NP-Complejos [1]. Se caracteriza principalmente por el gran tamaño que tienen sus instancias reales, lo que provoca que la operatividad de los algoritmos existentes sean extremadamente costosa [2] en términos computacionales. Este problema tiene diferentes aplicaciones, entre las que podemos destacar la localización de servicios (hospitales, bomberos, etc.), la asignación de tripulaciones a vuelos, la disposición de productos en grandes almacenes, la disposición de carreteras y vías férreas, la disposición de distritos electorales, conservación biológica de las especies, entre muchas otras [3].

Diferentes meta heurísticas [4, 5, 6, 7], han sido diseñadas para resolver de forma aproximada este problema. Dentro de los modelos meta heurísticos más estudiados en este contexto, se encuentra la Optimización basada en Colonias de Hormigas (Ant Colony Optimization, ACO) [8]. Donde un conjunto de hormigas artificiales realizan un proceso constructivo de soluciones, manteniendo una comunicación indirecta, a través de rastros artificiales de feromonas. En [9] se presenta un estudio detallado de algunos algoritmos ACO para la solución del SCP.

¹ boviedo@uteq.edu.ec, apuris@uteq.edu.ec, hescobar@uteq.edu.ec, jmurillo@uteq.edu.ec, jmora@uteq.edu.ec, yaimatr@gmail.com, jguanin@uteq.edu.ec

La Optimización basada en Hormigas en Dos Etapas (Two-Stage Ant Colony Optimization, TS-ACO) [10], es una propuesta para mejorar la exploración del espacio de búsqueda para los algoritmos ACO. Esta estrategia define un parámetro $r \in (0; 1)$ que se encarga de dividir la exploración en dos fases. En la primera se encuentran resultados parciales que son utilizados indistintamente para completar la exploración en una segunda etapa. Esta propuesta ha sido aplicada a varios problemas de estudio con características diferentes: el Problema del Viajero Vendedor (“Travelling Salesman Problem”, TSP) [11], el Problema de Asignación de Tareas (“Job Shop Scheduling Problem”, JSSP) [12] y el Problema de Asignación Cuadrática (“Quadratic Assignment Problem”) [10], donde se demuestra que dividir el proceso de exploración en dos etapas, aumenta la eficiencia del proceso de búsqueda sin afectar la calidad de las soluciones.

En el proceso de reutilización de los resultados obtenidos en la primera etapa, se presentan 3 variantes en la literatura; basada en feromona (P-TS-ACO), basada en subsoluciones (S-TS-ACO) y basada en resultados parciales (PS-TS-ACO). Todas con diferentes comportamientos en cuanto a exploración y explotación. En este trabajo se realiza una modelación de estas tres alternativas de búsqueda y se prueba su rendimiento en diferentes instancias del problema de cubrimiento de conjuntos utilizando el algoritmo Sistema de Hormigas (Ant System, AS [8]). Luego los resultados de la mejor variante son comparados con los resultados alcanzados por la estrategia original de ACO, utilizando la misma configuración de parámetros.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se define el problema de cubrimiento de conjuntos, seguidamente se presentan los aspectos fundamentales de la meta heurística ACO en la sección 3. Por otra parte en la sección 4 se describe la exploración en dos etapas con las 3 variantes estudiadas. En la sección 5 se presentan las instancias utilizadas del problema, el modelo propuesto y los parámetros utilizados. Seguidamente en la sección 7 se analizan los resultados y por último se exponen las conclusiones del trabajo.

2. PROBLEMA DE CUBRIMIENTO DE CONJUNTOS

Este problema, también conocido como Set Covering Problem (SCP) [13], pertenece a los 21 problemas NP-Completos de Karp [14] y consiste en encontrar un cubrimiento total de un conjunto, a partir de elementos de otro conjunto dado, garantizando minimizar los costos del cubrimiento. Formalmente se puede definir como: Sea $A = (a_{ij})$ una matriz binaria de $m \times n$, $M = \{1, \dots, m\}$ y $N = \{1, \dots, n\}$ dos conjuntos cualesquiera y C un vector de costos de dimensión n asociado al conjunto N . Se dice que la columna $j \in N$ cubre a la fila $i \in M$ si en la matriz A el elemento $a_{ij} = 1$. Por tanto, el objetivo consiste en encontrar un subconjunto de columnas $S \subseteq N$ tal que todas las filas $i \in M$ estén cubiertas con un costo mínimo.

El problema de programación lineal entero asociado se plantea como sigue:

$$\min(z) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall i \in M \quad (2)$$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in S \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \forall j \in N \quad (3)$$

3. OPTIMIZACIÓN BASADA EN COLONIA DE HORMIGAS

Los algoritmos de ACO [8] se inspiran directamente en el comportamiento de las colonias reales de hormigas, para solucionar problemas de optimización combinatoria. Se basan en una colonia de hormigas artificiales (agentes simples) que exploran de manera cooperativa y se comunican mediante rastros artificiales de feromonas. Los algoritmos de ACO son esencialmente métodos constructivos. En cada iteración del algoritmo, cada hormiga construye una solución al problema recorriendo un grafo (representación del problema). Cada arista representa los posibles pasos que la hormiga puede dar, tiene asociados dos tipos de información que guían el movimiento de la hormiga:

- *Información heurística* (η_{rs}), mide la preferencia heurística de moverse desde el nodo r hasta el nodo s . Las hormigas no modifican esta información durante la ejecución del algoritmo y depende totalmente del problema que se esté resolviendo.

- *Información de los rastros artificiales de feromona* (τ_{rs}), mide la “deseabilidad aprendida” del movimiento de r a s . Imita de forma numérica a la feromona real que depositan las hormigas naturales. Esta información se modifica durante la ejecución del algoritmo dependiendo de las soluciones encontradas por las hormigas.

Entre los algoritmos de ACO disponibles para problemas de optimización combinatoria [8] se encuentran: el Sistema de Hormigas (Ant System; AS), el Sistema de Colonia de Hormigas (Ant Colony System; ACS), el Sistema de Hormigas Máximo-Mínimo (Max-Min Ant System; MMAS), el Sistema de Hormigas con Ordenación Jerárquica (Rank-Based Ant System), el Sistema de Hormigas Mejor-Peor (Best-Worst Ant System), entre otros.

4. EXPLORACIÓN EN DOS ETAPAS PARA ACO

La manera constructiva de exploración de los algoritmos de la meta heurística ACO, provoca que se evalúen todos los posibles estados a donde puede moverse cada hormiga, acarreando un costo computacional alto para realizar cada movimiento. La estrategia en dos etapas para los algoritmos ACO (Two Stage ACO, TS-ACO), propone una forma menos costosa para la búsqueda, basada fundamentalmente en el principio de “Divide y Vencerás”. Fue propuesta en [10] y posteriormente se ha realizado diversos trabajos con el objetivo de probar su rendimiento. La idea fundamental de TS-ACO, es dividir la estrategia de exploración en dos fases; la primera se encarga de obtener resultados parciales, los cuales son utilizados como información para dirigir la búsqueda en la segunda etapa. Para dividir el proceso de búsqueda se introduce un parámetro $r \in (0; 1)$ el cual afecta de manera directa algunos parámetros; tamaño de la colonia (m), condición de parada (sc) y el tamaño de las soluciones (ss). El proceso ocurre de la siguiente manera:

- *Hormigas* (m): La colonia definida para realizar la exploración es dividida en dos subcolonias (m_1 y m_2), donde m_1 representa el número de hormigas para la primera etapa y m_2 en la segunda. Estos valores se calculan como:

$$m_1 = r * m \quad (4a)$$

$$m_2 = m - m_1 \quad (4b)$$

- *Tamaño de las Soluciones* (ss): Las soluciones factibles de un problema de optimización combinatoria tienen alguna característica en común (en la mayoría de los casos la cantidad de componentes), donde esta característica puede ser dividida en dos (ss_1 y ss_2), de manera tal, que en la primera fase se buscan soluciones que satisfagan a ss_1 y en la segunda fase a ss_2 . El parámetro ss_2 depende específicamente de la variante de la estrategia a utilizarse. Ambos parámetros se calculan como:

$$ss_1 = r * ss \quad (5a)$$

$$ss_2 = \begin{cases} ss - ss_1, & \text{variantes (S - TS - ACO ó PS - TS - ACO)} \\ ss & , \text{variante (P - TS - ACO)} \end{cases} \quad (5b)$$

- *Condición de parada* (sc): la condición de parada (usualmente tiempo de ejecución) utilizada por los algoritmos ACO, es dividida en dos valores (sc_1 y sc_2), sc_1 define el tiempo de exploración que durará la primera etapa y por consecuente sc_2 el de la segunda. Estos valores se calculan como:

$$sc_1 = r * sc \quad (6a)$$

$$sc_2 = sc - sc_1 \quad (6b)$$

Luego de terminar la primera etapa, las mejores soluciones parciales y el estado de los rastros de feromona son almacenados para ser utilizados indistintamente en la segunda etapa. La forma de utilizar estos resultados parciales da origen a 3 variantes de exploración:

- *Basada en resultados parciales* (PS-TS-ACO): Esta variante de la estrategia en dos etapas, fue presentada como idea inicial en los trabajos [11] [12], donde al terminar la primera etapa las mejores soluciones parciales y los rastros de feromona son reutilizados en la segunda fase de la exploración. Esta variante disminuye considerablemente la exploración en la segunda etapa, ya que se concentra específicamente en completar las mejores soluciones de la fase anterior, lo que provoca estancamientos en la búsqueda.
- *Basada en soluciones* (S-TS-ACO): Esta estrategia utiliza las mejores soluciones parciales encontradas en la primera etapa como punto de partida de las hormigas en la segunda etapa. En este caso, los rastros de feromona son reinicializados antes de comenzar la segunda fase. De esta forma se pierde la información memorística de la colonia aumentando los niveles de exploración del algoritmo en la última fase.

- *Basada en feromona (P-TS-ACO)*: A diferencia de la variante anterior, esta reutiliza en la segunda fase los rastros de feromona obtenidos de la primera etapa. Otra de las diferencias es que en la segunda fase no se completan las mejores soluciones encontradas en la fase anterior, sino que se buscan soluciones completas. Esta variante como la anterior aumenta los niveles de exploración en la segunda etapa.

A continuación se presenta el esquema general de la exploración en dos fases.

<p>Definir los parámetros de entrada (r, m, ss, sc)</p> <p>Paso 1. Primera etapa</p> <p>1.2 Calcular los parámetros de esta etapa (ecuaciones (4a), (5a), (6a))</p> <p>1.3 Aplicar un algoritmo ACO con los parámetros de esta etapa</p> <p>1.4 Almacenar los resultados (rastros de feromona y las mejores soluciones encontradas)</p> <p>Paso 2. Segunda etapa</p> <p>2.1 Calcular los parámetros de esta etapa (ecuaciones (4b), (5b), (6b))</p> <p>2.2 Aplicar un algoritmo ACO con los valores de los parámetros de esta etapa (utilizando los resultados de la etapa anterior)</p> <p>2.3 Obtener la mejor solución encontrada</p>

5. ESTUDIO EXPERIMENTAL

Al aplicar los algoritmos ACO, se hace necesario definir la estructura del grafo que representa el problema. En este caso particular, el problema SCP se representa como un grafo $G = (V, A)$ totalmente conexo, donde los vértices coincide exactamente con el conjunto N ($V=N$) y los arcos A determinan el vecindario de un vértice. De esta forma el tamaño del grafo está directamente relacionado con el tamaño de la instancia del problema a resolver.

Otro aspecto importante es la representación de los rastros de feromona, en la mayoría de los problemas se define como una matriz de valores reales, que determinan la relación de orden en que fue construida una solución. En el caso específico del SCP, no interesa el orden en que son visitados los nodos del grafo, solo los elementos que forman el cubrimiento, por esta razón los rastros de feromona son representados como un vector de valores reales.

a. Ant System al SCP

En el algoritmo AS [8] aplicado al problema de SCP, cada hormiga de la colonia es posicionada de manera aleatoria en un nodo del grafo. Seguidamente y de manera incremental cada hormiga selecciona un nodo al cual moverse (ver ecuación 7):

$$p_{ij}^k = \frac{(\tau_{ij})^\alpha \cdot (\eta_{ij})^\beta}{\sum_{j \in N_i^k} (\tau_{ij})^\alpha \cdot (\eta_{ij})^\beta} \quad si \quad j \in N_i^k \quad (7)$$

Donde la función heurística fue tomada de [9] y se define como:

$$\eta_{ij} \leftarrow \frac{CE_j}{C_j}, \quad j \in N \quad (8)$$

Donde CE_j representa la cantidad de elementos no cubiertos de M , que cubre la columna j y C_j el costo asociado a dicho cubrimiento.

Este proceso se repite hasta que cada hormiga haya encontrado una solución (un cubrimiento total del conjunto S). Luego los rastros de feromona son evaporados utilizando la ecuación 9

$$\tau_{ij} = (1 - \rho) * \tau_{ij}, \quad \rho \in (0,1] \quad (9)$$

Y posteriormente se actualizan en los arcos pertenecientes a las soluciones encontradas por las hormigas en dependencia de su calidad utilizando la ecuación 10, donde $\Delta\tau^k$ representa el costo del cubrimiento encontrado por la hormiga k

$$\tau_{ij} = \tau_{ij} * \Delta\tau^k, \quad \forall a_{ij} \in S^k \quad (10)$$

b. Exploración en dos fases para Ant System

Cuando se aplica el algoritmo AS con la estrategia de exploración en dos etapas (TS-AS) al problema de SCP, se comienza calculando los parámetros de la primera etapa según las ecuaciones (4a), (5a), (6a), donde ss representa el cardinal o cantidad de elementos de M (conjunto a cubrir) y por consiguiente $ss_1 < |M|$. Luego se aplica el algoritmo AS a esta fase por un tiempo determinado por sc_1 y los resultados parciales (vector de feromona y mejores sub cubrimientos) son almacenados.

Para la segunda fase, se calculan los parámetros según las ecuaciones (4b), (5b), (6b) y se aplica nuevamente el algoritmo AS, obteniéndose cubrimientos completos de M , utilizando sc_2 como el tiempo total de ejecución de esta fase.

c. Descripción de las instancias y los parámetros

Las instancias del SCP utilizadas en este trabajo son SCP41, SCP410, SCP42, SCP48, SCP51, SCP61, SCP62, SCP63, SPP39, SPP34, SPP26, SPP41, SPP3, descritas más detalladamente en [15]. La tabla 1 muestra los parámetros utilizados, cuyos valores no fueron obtenidos a partir de ningún estudio de parámetros previos, por no ser objetivo de la presente investigación, estos valores se obtuvieron como sugerencia de los autores en [10]. Donde m representa la cantidad de hormigas, $\tau(0)$ el valor de la feromona inicial, ρ constante de evaporación, α y β la importancia de la heurística y la feromona, r tamaño de la exploración en cada etapa (solo para las estrategias TS-AS), subSol la cantidad de sub soluciones de la primera etapa que son almacenadas para utilizarse como punto de partida en la segunda fase y CP la condición de parada.

Algoritmo	m	$\tau(0)$	ρ	α	β	r	subSol	sc
AS	10	0,2	0,1	2	3	-	-	Tiempo
P-TS-AS	10	0,2	0,1	2	3	0,25	-	Tiempo
S-TS-AS	10	0,2	0,1	2	3	0,25	10	Tiempo
PS-TS-AS	10	0,2	0,1	2	3	0,25	10	Tiempo

Tabla 1. Configuración de los parámetros utilizados por AS y TS-AS

6. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para analizar los resultados de los experimentos, se aplicó un conjunto de técnicas estadísticas no paramétricas propuestas en [16] para comparar métodos aproximados. En la discusión se describe el test utilizado y la interpretación de este.

d. Exploración en dos etapas

En este estudio se aplicaron las 3 versiones de la estrategia en dos etapas (P-TS-AS, S-TS-AS y PS-TS-AS) a las instancias del SCP. La Tabla 2 muestra los resultados promedios de cada algoritmo sobre 25 ejecuciones independientes. La columna “tiempo” define el tiempo de ejecución (en milisegundos) para cada instancia y fue seleccionado como el tiempo promedio en el que no se estancaban las soluciones de P-TS-AS. En la última fila se puede encontrar el promedio de cada algoritmo.

La Tabla 3 presenta los resultados de aplicar el test de Friedman [17] e Iman-Davenport [18] para verificar si existen diferencias significativas en los resultados obtenidos por los algoritmos computados en la Tabla 3. El valor de la distribución χ^2 con 2 grados de libertad para el test de Friedman se muestra en la columna “valor de la distribución”, así como el valor de la distribución F con 2 y 24 grados de libertad para el test de Iman-Davenport. Para ambos casos

el valor del test es mayor que el valor de la distribución, por lo que se rechaza la hipótesis de igualdad de medias y se concluye que existen diferencias significativas entre los algoritmos comparados.

Instancia	Tiempo	P-TS-AS	S-TS-AS	PS-TS-AS	AS
Scp41	42000	490,5	499,3	491,7	501
Scp410	42000	608,3	627,2	608,3	618
Scp42	42000	638,8	645,3	640,6	640,7
Scp48	42000	572,7	601,8	586,1	590,9
Scp51	42000	312,4	331,3	313,8	313,1
Scp61	42000	171,7	174,6	170,9	174,2
Scp62	42000	187,2	192,7	190,1	192,5
Scp63	42000	172,6	197,1	175,8	175,8
Spp39	5000	13450,3	13833,4	13589,2	14189,7
Spp34	5000	12640,2	12900,6	12714,2	13114,2
Spp26	5000	8673,6	87376,4	8694,2	9294
Spp41	800	13017,2	13595,4	13179,1	14073,1
Spp32	800	17018,7	17606,1	17086,6	17394,6
Media		5227,24	11429,32	5264,66	5482,44

Tabla 2 Resultados obtenidos por cada uno de los algoritmos computados

Test	Valor del test	Valor de la distribución	Valor p
Friedman	23,346	5,991	8,52E-5
Iman-Davempport	24	3,403	1,27E-12

Tabla 3 Resultados del test de Friedman e Iman-Davempport

Seguidamente se aplica el test de Holm [19] para comparar el algoritmo de menor valor medio (P-TS-AS, ver Tabla 3, última fila), con los restantes algoritmos. La Tabla 4 muestra los resultados del test, donde los algoritmos han sido ordenados de forma creciente por el valor z. Los valores de la columna “Valor p” se puede encontrar utilizando la distribución normal y como su valor es menor que los presentados en la columna α/i , la hipótesis de semejanza es rechazada para ambos casos (columna hipótesis). Con este análisis se puede concluir que el algoritmo P-TS-AS obtiene resultados significativamente mejores que los que obtuvieron las variantes S-TS-AS y PS-TS-AS.

Algoritmo	Z	Valor p	α/i	Hipótesis
S-TS-AS	4,804	1,548E-6	0,025	Rechazada
PS-TS-AS	1,961	0,049	0,05	Rechazada

Tabla 4 Resultados del test de Holm para comparaciones múltiples

e. Comparación entre estrategias de exploración

A continuación en la Tabla 5 se presentan los resultados del test no paramétrico de Wilcoxon [20] para comparación entre dos muestras relacionadas (P-TS-AS vs AS). Claramente se puede apreciar que el valor del test es menor al nivel de significancia determinado para el mismo ($\alpha=0.05$), por lo que la hipótesis de igualdad es rechazada (columna hipótesis), a favor de la variante P-TS-AS ($R^+ > R^-$).

Comparación	R+	R-	Valor del test	Hipótesis
P-TS-AS vs AS	91	0	0,00148	Rechazada

Tabla 5 Resultados del test de Wilcoxon

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un estudio para aplicar la estrategia de exploración en dos fases TS-ACO al problema de Cubrimiento de conjuntos. Específicamente se probaron 3 variantes de la estrategia, cada una con diferente forma de

reutilizar los resultados parciales obtenidos en la primera fase. Para cada instancia de SCP utilizada, se definió un tiempo máximo de ejecución para medir la velocidad de convergencia de la propuesta, frente a la versión original de AS. De los resultados obtenidos se puede concluir lo siguiente:

- En el estudio de las variantes de exploración en dos etapas, P-TS-AS fue la que obtuvo resultados significativamente mejores que las otras dos presentadas (PS-TS-AS y S-P-AS). Donde se puede deducir que con solo reutilizar los rastros de feromona resultantes de la primera fase, es suficiente para que el algoritmo alcance en la segunda etapa un adecuado balance entre exploración (construir soluciones completas) y explotación (reutilizar los rastros de feromona).
- En el estudio comparativo entre la estrategia en dos fases y la original presentada por ACO, los mejores resultados fueron alcanzados por la estrategia en dos etapas. Por lo que la propuesta es capaz de converger más rápidamente a zonas promisorias de espacio de búsqueda que la versión original.

RECEIVED JUNE, 2016
REVISED SEPTEMBER, 2016

REFERENCIAS

- [1] BÄCK, T., SCHÜTZ, M., Y KHURI, S. (1996): A Comparative Study of a Penalty Function, a Repair Heuristic, and Stochastic Operators with the Set-Covering Problem, **Artificial Evolution**, 1063, 320-332.
- [2] BEASLEY, J. (1990): Or-library: distributing test problems by electronic mail, **Journal of the Operations Research Society**, 41, 1069-1072.
- [3] CASTRO, C. Y CRAWFORD, B. (2006): Ant colonies using arc consistency techniques for the set partitioning problem, In **19 th IFIP International Federation for Information Processing**.
- [4] CHVATAL, V. (1979): A Greedy Heuristic For The Set-Covering, **Mathematics of Operations Research**, 4, 233-235.
- [5] COUDERT, O. (1996): On solving covering problems, In **DAC '96 Proceedings of the 33rd annual Design Automation Conference**, New York.
- [6] CRAWFORD, B., SOTO, R. Y BERRIOS, N. (2016): Cat Swarm Optimization with Different Transfer Functions for Solving Set Covering Problems . In **Computational Science and Its Applications -- ICCSA 2016: 16th International Conference**.
- [7] CRAWFORD, B., SOTO, R., OLGUÍN, E., VILLABLANCA, S. M., RUBIO, Á. G., JARAMILLO, A. Y SALAS, J.(2016): An Artificial Fish Swarm Optimization Algorithm to Solve Set Covering Problem. de In **International Conference on Industrial, Engineering and Other Applications of Applied Intelligent Systems**.
- [8] CRAWFORD, B., SOTO, R., RIQUELME, L. Y OLGUÍN, E. (2016): Biogeography-based optimization algorithm for the Set Covering Problem. In **Information Systems and Technologies (CISTI), 2016 11th Iberian Conference**.
- [9] CRAWFORD, B., SOTO, R., PEÑA, C., PALMA, W., JOHNSON, F. Y PAREDES, F. (2015): Solving the set covering problem with a shuffled frog leaping algorithm.. In **ACIIDS 2015**.
- [10] DORIGO, M. Y STÜTZLE, T. (2004): **Ant Colony Optimization**. MIT Press.
- [11] FISCHETTI, M., CAPRARA, A. y TOTH, P. (2000): Algorithms for the set covering problem. **Annals of Operation Research**, 98, 353-371.

- [12] FRIEDMAN, M. (1937): Individual comparisons by ranking methods, **Journal of the American Statistical Association**, 32, 675–701.
- [13] GARCIA, S., MOLINA, D. Y HERRERA, F. (2009): A study on the use of non-parametric tests for analyzing the evolutionary algorithms' behaviour: a case study on the CEC'2005 Special Session on Real Parameter Optimization, **Heuristics**, 15., 617- 644.
- [14] GAREY, M. y JOHNSON, D. (1979): **Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness**. H. Freeman and Company, San Francisco.
- [15] HOLM, S. (1979): A simple sequentially rejective multiple test procedure, **Scandinavian Journal of Statistics**, 6, 65-70.
- [16] IMAN, R. L., Y DAVENPORT, J. M. (1980): Approximations of the critical region of the friedman statistic, **Communications in Statistics: A Theory Methods**, 9. 571–595.
- [17] KARP, R. M. (1972): Reducibility Among Combinatorial Problems, **Complexity of Computer Computations**, . 85-103.
- [18] LESSING, L., DUMITRESCU, I., Y STUTZLE, T. (2004): A Comparison Between ACO Algorithms for the Set Covering Problem,» In **ANTS 2004**.
- [19] MANIEZZO V. Y COLORNI, A. (1999): The ant system applied to the quadratic assignment problem, **IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering**, 769-778.
- [20] MOORE, J. L., FOLKMANN, M. Y BALMFORD, A. (2003): Heuristic and optimal solutions for set-covering problems in conservation biology. **Ecography**, 26, 595–601.
- [21] PURIS, A., BELLO, R., MARTÍNEZ, Y., Y NOWE, A. (2007): Two-stage ant colony optimization for solving the traveling salesman problem,» de Nature Inspired Problem-Solving Methods. in **Knowledge Engineering**, Springer, Berlin Heidelberg,. 307-316.
- [22] PURIS, A., BELLO, R., TRUJILLO, Y. Y NOWE, A. (2007): Two-stage ACO to solve the job shop scheduling problem,» In **Progress in Pattern Recognition, Image Analysis and Applications**, Springer Berlin Heidelberg, 447-456.
- [23] PURIS, A., BELLO, R., Y HERRERA, F. (2010): Analysis of the efficacy of a Two-Stage methodology for ant colony optimization: Case of study with TSP and QAP,» **Expert Systems with Applications**, 37, 5443-5453.
- [24] WILCOXON, F. (1945): Individual comparisons by ranking methods, **Biometrics**, 1, 80-83.