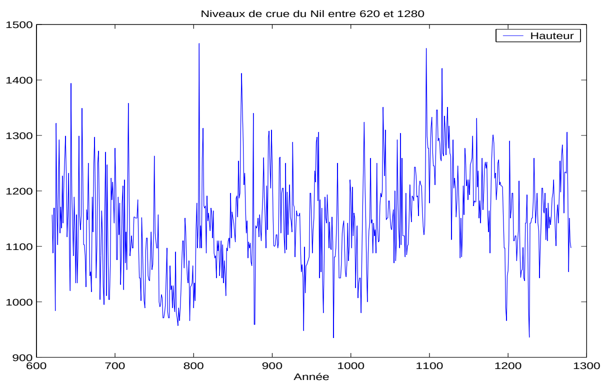
Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Master M.A.E.F.

Feuilles de TD du cours "Statistiques II"

Jean-Marc Bardet (Université Paris 1, SAMM)



U.F.R. 27 et SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisciplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 0:

Quelques rappels...

(1) **(*)** Soit $\Omega = [0,1]$ et X la fonction telle que $X(\omega) = \omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.
   (a) Montrer que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}([0,1]))$, où $\mathcal{B}([0,1])$ est la tribu borélienne sur $[0,1]$.
   (b) Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Déterminer la loi de probabilité de X sur $(\Omega, \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, ainsi que son espérance et sa variance.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n telle que $Y_n(\omega) = 1 - \omega^n$ pour $\omega \in \Omega$. Quelles sont l'espérance et la variance de Y_n? Les Y_n sont-elles indépendantes les unes les autres? La suite (Y_n) converge-elle quand $n \to \infty$ en probabilité? presque-sûrement? dans $\mathbb{L}^p$?

(2) **(**)** Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et Z une variable de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X. Déterminer la loi de $2Z-1$, puis celle de $Y = (2Z-1)X$. Montrer que (X,Y) n'est pas un vecteur gaussien. X et Y sont-elles indépendantes?

(3) **(**)** Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires centrées, indépendantes et identiquement distribuées avec pour variance σ^2.
   (a) Quelle est la matrice de variance-covariance du vecteur $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$?
   (b) Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_t = \varepsilon_t - \alpha\, \varepsilon_{t-1}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{N}*$, quelle est l'espérance de X_t? Sa variance? Les X_t sont-elles identiquement distribuées?
   (c) Déterminer $\mathrm{cov}\,(X_t, X_{t+k})$ où $(t, t+k) \in \mathbb{N}^{*2}$. Les X_t sont-elles indépendantes? En déduire la matrice de variance-covariance de $(X_1, \cdots, X_n)$ pour n$\in \mathbb{N}^*$.
   (d) Dans le cas où $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables gaussiennes, quelle est la loi et la densité de probabilité de $(X_1, \cdots, X_n)$ pour n$\in \mathbb{N}^*$.

(4) **(***)** Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires centrées, indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On note pour $t \in \mathbb{N}$, $X_t = \sum_{k=1}^t \varepsilon_k$.
   (a) Déterminer la loi de X_t.
   (b) Démontrer un théorème de la limite centrale vérifié par $(X_t)_t$.
   (c) On suppose connu $(X_1, \cdots, X_n)$. Déterminer un estimateur $\widehat{\sigma}^2$ par maximum de vraisemblance de σ^2. Donner une théorème limite vérifié par σ^2.

Feuille n^o 1:

Processus aléatoires: premières définitions et propriétés

(1) **(*)** Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc. Déterminer si les processus suivants sont 1/ centrés, 2/ stationnaires, 3/ des bruits blancs, avec

$$X_t = (2t-1)\varepsilon_t,\ Y_t = 3\varepsilon_{2t},\ Z_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t+1}.$$

(2) **(*)** Soit $(\varepsilon_t)_t$ et $(\varepsilon'_t)_t$ deux bruits blancs indépendants. $(\varepsilon_t + \varepsilon'_t)_t$ est-il un bruit blanc?

(3) **(*)** Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ un processus tel que X_0 soit une variable uniforme sur $[-1,1]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + 1$. X est-il stationnaire? A accroissements stationnaires? Les X_i sont-elles indépendantes? Calculer les fonctions espérance et covariance de X.

(4) **(*)** Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2. Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = 0$. On considère $X_t = f(\varepsilon_t)$. (X_t) est-il un processus centré? stationnaire? gaussien?

(5) **(*)** On suppose que le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est tel que $Y_t = X_{t+2} - X_t$ soit stationnaire. $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-il stationnaire? Réciproquement, si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire, montrer que (Y_t) est stationnaire.

(6) **(*)** On considère la chaîne de Markov $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ à deux états $X_t \in E = \{0,1\}$, telle que $\Pr(X_0 = 0) = p_0 \in]0,1[$ et sa matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$.
  (a) Pourquoi est-ce bien une chaîne de Markov? Est-elle homogène?
  (b) Calculer les probabilités des événements $\{X_1 = 1\}$, $\{(X_1, X_2) = (1,0)\}$ et $\{X_3 = 1\}$.
  (c) Calculer la probabilité de $X_2 = 1$ sachant que $X_3 = 1$.
  (d) Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité invariante pour X et la préciser. En déduire la condition nécessaire et suffisante pour que $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ soit stationnaire.

(7) **(*)** Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus non corrélés, ayant pour fonctions d'auto-covariance $\gamma_X(.)$ et $\gamma_Y(.)$ et pour densité spectrale $f_X(.)$ et $f_Y(.)$ respectivement. Montrer que le processus $Z_t = X_t + Y_t$ est stationnaire d'ordre 2, a pour fonction d'auto-covariance $\gamma_Z = \gamma_X + \gamma_Y$ et pour densité spectrale $f_Z = f_X + f_Y$.

(8) **(***)** Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ un bruit blanc fort. On définit par récurrence le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ pour $t \in \mathbb{N}$ par : $X_{t+1} = \varepsilon_{t+1} X_t$. Si X_0 est fixé (donc la mesure de X_0 est une masse de Dirac en un point) est-il possible que X soit stationnaire? Même question si maintenant $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est un bruit blanc fort de loi uniforme sur $[0,1]$ et X_0 suit une loi uniforme sur $[0,1]$. Et si X_0 et ε_t prennent leurs valeurs dans $\{-1,1\}$? Plus généralement, à quelles conditions sur X_0 et ε le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ peut-il être stationnaire?

(9) **(**)** Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus défini par $X_t = A\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ où A et B sont des variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance σ^2. Montrer que X est un processus centré stationnaire d'ordre 2. Calculer sa fonction d'auto-covariance ainsi que sa densité spectrale.

(10) **(**)** Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc gaussien. On définit le processus $(X_t^{(m)})_{t\in\mathbb{Z}}$ par $X_t^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \theta^k \varepsilon_{t-k}$ pour $t \in \mathbb{Z}$, avec $-1 < \theta < 1$ et $m \in \mathbb{N}$ fixé.
  (a) Montrer que $(X_t^{(m)})_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus gaussien existant pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
  (b) Montrer que $(X_t^{(m)})_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus centré et stationnaire. En déduire $\mathrm{var}\,(X_t)$.
  (c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la suite de fonctions $(X_t^{(m)})_m$ admet une limite dans $\mathbb{L}^2$ quand $m \to \infty$. On notera $X_t^{(\infty)}$ cette limite.
  (d) En travaillant sur la suite des densités, montrer que $(X_t^{(\infty)})_t$ est un processus centré, gaussien, stationnaire et vérifie pour $t \in \mathbb{Z}$, $X_{t+1}^{(\infty)} = \theta\, X_t^{(\infty)} + \varepsilon_{t+1}$.

(11) **(**)** On suppose que la densité spectrale f d'un processus d'ordre 2 centré et stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une fonction telle que $f(\lambda) = a$ si $0 \le |\lambda| < \frac{\pi}{2}$ et et par $f(\lambda) = b$ si $\pi/2 \le \lambda \le \pi$.
  (a) Déterminer la fonction d'auto-covariance $\gamma_X(0)$ puis $\gamma_X(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
  (b) Vérifier que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_X(k)| = \infty$ mais que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_X(k)|^2 < \infty$.

(12) **(***)** Soit le processus $B_H = (B_H(t))_{t\in\mathbb{R}}$ tel que B_H est centré, gaussien et vérifie $B_H(0) = 0$ et pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{E}\left(B_H(t+s) - B_H(t)\right)^2 = \sigma^2 |s|^{2H} \text{ où } H \in]0,1[\text{ et } \sigma > 0.$$

On supposera qu'un tel processus existe bien.
  (a) En déduire la loi de $B_H(t)$ pour $t \in \mathbb{Z}$.
  (b) Déterminer la covariance de $B_H(t)$ (considérer à part le cas $H = 0.5$).
  (c) On note $N_H(t) = B_H(t+1) - B_H(t)$ pour $t \in \mathbb{N}$. Montrer que $N_H = (N_H(t))_{t\in\mathbb{N}}$ est un processus gaussien centré à temps discret stationnaire et donner la loi de probabilité de $N_H(t)$.
  (d) Déterminer la covariance $r_H(k)$ de N_H. Que peut-on dire lorsque $H = 0.5$?
  (e) Montrer que $\sum |r(k)| = +\infty$ pour $H > 0.5$. Que peut-on en déduire quant à la densité spectrale de N_H?

Feuille n^o 2:

Tendance et saisonnalité

(1) **(*)** Soit $(\varepsilon_t)_{n\in\mathbb{N}}$ un bruit blanc de variance σ^2. On considère le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ tel que $X_t = (3t+\varepsilon_t)^2 + (-1)^t$ pour $t \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}\, X_t$. En déduire la tendance et la saisonnalité (et la période) de X.
   (b) Calculer $\operatorname{var} X_t$.
   (c) On considère la partie bruit de la série. Est-elle stationnaire?

(2) **(**)** Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon'_t)_{t\in\mathbb{N}}$ deux suites indépendantes de v.a.i.i.d. d'espérances respectives m et m', avec $m \neq m'$. Soit X le processus tel que $X_{2p} = \varepsilon_p$ et $X_{2p+1} = \varepsilon'_p$ pour $p \in \mathbb{N}$.
   (a) Déterminer la tendance, la saisonnalité et la partie bruit de ce processus. Cette partie bruit est-elle stationnaire?
   (b) On considère maintenant la marche aléatoire Y formée à partir de X (soit $Y_t = \sum_{k=1}^t X_k$ pour $k \in \mathbb{N}$). Déterminer la tendance, la saisonnalité et la partie bruit de Y. Cette partie bruit est-elle stationnaire?

(3) **(**)** Soit le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ tel que $X_t = at + b + \varepsilon_t$ pour $t \in \mathbb{N}$, où $(\varepsilon_t)_{n\in\mathbb{N}}$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2 et a et b sont deux nombres réels.
   (a) Déterminer la tendance et la saisonnalité de X.
   (b) Déterminer la loi de X_t pour $t \in \mathbb{N}$.
   (c) On suppose une trajectoire $(X_1, \cdots, X_n)$ connue, mais a et b inconnu. Déterminer l'expression des estimateurs $\widehat{a}_n$ et $\widehat{b}_n$ obtenus par moindres carrés ordinaires.
   (d) A-t-on convergence de ces estimateurs? Si oui, à quelle vitesse?
   (e) On considère la série détendancialisée $(\widehat{\varepsilon}_t)$ telle que $\widehat{\varepsilon}_t = X_t - \widehat{a}_n t - \widehat{b}_n$ pour $t \in \{1, \cdots, n\}$. La famille $(\widehat{\varepsilon}_t)_{1\leq t\leq n}$ est-elle stationnaire?
   (f) Montrer que $\operatorname{cov}(\widehat{\varepsilon}_i, \widehat{\varepsilon}_j) \to 0$ quand $|i-j| \to \infty$. Et pour $i \neq j$, a-t-on $\operatorname{cov}(\widehat{\varepsilon}_i, \widehat{\varepsilon}_j) \to 0$ quand $n \to \infty$?

(4) **(**)** On considère le processus $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tel que:

$$X_k = \Big(\cos(\frac{\pi}{2}k) + \varepsilon_k\Big)^2 \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

avec $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2.
   (a) Déterminer la tendance et la saisonnalité (et la période) de X. X est-il un processus stationnaire?
   (b) Calculer la variance de X_k pour $k \in \mathbb{Z}$.
   (c) Déterminer un filtre linéaire non nul rendant la série chronologique X sans tendance ni saisonnalité. Si Y est la série filtrée, Y est-elle un bruit blanc?

(5) **(**)** On suppose que le processus $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ est de la forme $X_t = s(t) + \varepsilon_t$ avec s une fonction de période $T \geq 2$ connue et ε un bruit blanc. On suppose connu $(X_1, \cdots, X_{nT})$. On suppose que $s(t) = a\cos(2\pi t/T) + b\sin(2\pi t/T)$ pour $t \in \mathbb{N}$ où a et b sont inconnus. Déterminer l'expression des estimateurs $\widehat{a}_n$ et $\widehat{b}_n$ obtenus par moindres carrés ordinaires. Lorsque $n \to \infty$, ces estimateurs sont-ils convergents?

(6) **(***)** On suppose que le processus $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ est de la forme $X_t = s(t) + \varepsilon_t$ avec s une fonction de période 2 et ε un bruit blanc gaussien de variance σ^2 inconnue. On suppose connu $(X_1, \cdots, X_{2n})$.
   (a) Montrer que la variance empirique de X est un estimateur convergent et déterminer sa limite. Calculer sa vitesse de convergence.
   (b) Déterminer l'expression exacte de l'estimation de s par une régression par moindres carrés. Quelle est la vitesse de convergence?

(c) Déterminer alors une estimation de σ à partir du processus auquel on a retiré l'estimation de s. Quelle est alors la vitesse de convergence?

(7) **(**)** On considère le processus (X_t), où $X_t = P(t) + s(t) + \varepsilon_t$ avec $P(t)$ un polynôme de degré 3, $s(t)$ une fonction périodique de période 4, telle que $s(1) + s(2) + s(3) + s(4) = 0$, et (ε_t) est un bruit banc gaussien de variance σ^2.

(a) Déterminer un filtre linéaire éliminant la tendance, puis un filtre linéaire éliminant la saisonnalité.

(b) Quel est le filtre composé de ces deux filtres?

(c) Déterminer la loi de la série filtrée. Est-ce un bruit blanc?

Feuille n^o 3:

Processus ARMA et extensions

(1) **(*)** Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance 1. On considère les processus X et Y, où:

$$X_n = 0.7X_{n-1} + \varepsilon_n \text{ et } Y_n = -0.7Y_{n-1} + \varepsilon_n \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Quels sont ces processus? Déterminer la densité spectrale et le corrélogramme (théorique) de ces processus. Que se passe-t-il si on rajoute la condition $X_0 = 0$?

(2) **(*)** Déterminer si les processus autorégressifs suivants sont stationnaires (inversibles) et causaux:
 (a) $X_t + 0.2\,X_{t-1} - 0.48\,X_{t-2} = \varepsilon_t$;
 (b) $X_t + 1.9\,X_{t-1} + 0.88\,X_{t-2} = \varepsilon_t + 0.2\,\varepsilon_{t-1} + 0.7\,\varepsilon_{t-7}$;
 (c) $X_t + 0.6\,X_{t-1} = \varepsilon_t + 1.2\,\varepsilon_{t-1}$;
 (d) $X_t + 1.8\,X_{t-1} + 0.81\,X_{t-2} = \varepsilon_t$;
 (e) $X_t - 1.5\,X_{t-1} + 0.5\,X_{t-2} = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-2}$;
 (f) $X_t + 1.6\,X_{t-1} = \varepsilon_t - 0.4\,\varepsilon_{t-1} + 0.04\,\varepsilon_{t-2}$.

(3) **(**)** Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2 et soit $X = (X_t)_{y\in\mathbb{Z}}$ le processus ARMA tel que: $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$ où $|a| > 1$.
 (a) Montrer que X_t est donné par l'expression $X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} a^{-j}\varepsilon_{t+j}$
 (b) On définit $\omega_t = X_t - \frac{1}{a}X_{t-1}$. Montrer que $\omega_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_\omega^2\right)$. La famille $(\omega_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-elle un bruit blanc gaussien? Exprimer σ_ω^2 en fonction de a et σ^2 et montrer que X a la représentation causale (en fonction de ω_t): $X_t = \frac{1}{a}X_{t-1} + \omega_t$.

(4) **(**)** Soit (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2. On considère les processus X et Y, où:

$$X_n = A\cos(\pi n/3) + B\sin(\pi n/3) + Y_n \text{ et } Y_n = \varepsilon_n + 2.5\varepsilon_{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{Z},$$

où A et B sont deux variables normales centrées réduites indépendantes et indépendantes des ε_n.
 (a) Quel type de processus est Y? Tracer la densité spectrale et le corrélogramme (théorique) de Y. Déterminer la loi de Y_n pour $n \in \mathbb{Z}$.
 (b) X a-t-il une tendance? une saisonnalité?
 (c) Montrer que X est stationnaire et déterminer sa densité spectrale et son corrélogramme.
 (d) Déterminer la loi de X_n pour $n \in \mathbb{Z}$.

(5) **(*)** Soit (ε_n) un bruit blanc de variance 1. On considère les processus X et Y, où:

$$X_n = X_{n-3} + \varepsilon_n \text{ et } Y_n = 0.999Y_{n-3} + \varepsilon_n \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

 (a) Quel type de processus est Y? Tracer la densité spectrale et le corrélogramme (théorique) de Y.
 (b) Montrer que X n'est pas stationnaire. Calculer $\rho(n) = \mathbb{E}\,X_0X_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et tracer $\rho(n)$ en fonction de n. Que remarque-t-on?
 (c) Déterminer un filtre rendant X stationnaire (et non nul). Appliquer ce filtre à Y et déterminer la densité spectrale du processus filtré.

(6) **(**)** On considère le processus stationnaire centré $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifiant: $X_t - aX_{t-1} - a^2X_{t-2} = \varepsilon_t$ où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2.
 (a) Pour quelles valeurs de a ce processus est-il causal?
 (b) Pour une réalisation $x_1, \cdots, x_{200}$ de ce processus on observe $\hat{\gamma}(0) = 6.06$ et $\hat{\gamma}(1) = 4.16$. Trouver les estimations de a et de σ^2 en résolvant les équations de Yule-Walker (si il y a plusieurs solutions, choisir la solution causal).

(7) **(*)** Soit deux observations x_1 et x_2 avec $|x_1| \neq |x_2|$ d'un processus AR(1) causal stationnaire satisfaisant $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$, où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2. Trouvez les estimateurs du maximum de vraisemblance de a et σ^2.

(8) **(**)** Trouver une équation de degré 3 vérifiée par l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre a d'un processus AR(1) causal stationnaire satisfaisant $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$, où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2, si on suppose que l'on dispose des observations $(x_1, \cdots, x_n)$.

(9) **(***)** Soit (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2. On considère le processus X, où:

$$X_n = X_{n-1} - 0.16\, X_{n-2} + \varepsilon_n - 0.2\, \varepsilon_{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

(a) Quel type de processus est X? Tracer sa densité spectrale.
(b) Déterminer les équations de Yule-Walker et en déduire l'expression du corrélogramme (théorique) de X.
(c) On suppose connu le corrélogramme empirique de X. En déduire un estimateur de σ^2.

(10) **(*)** Soit (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2.
(a) Déterminer la densité spectrale et la fonction de covariance de ε (soit $r(k) = \mathbb{E}\, \varepsilon_0 \varepsilon_k$ pour $k \in \mathbb{N}$).
(b) Calculer la log-vraisemblance exacte (c'est-à-dire $\log f_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)}(x_1, .., x_n)$) en fonction de σ^2. Peut-on obtenir une expression simple de l'estimateur de σ^2 par maximum de vraisemblance?
(c) Écrire le contraste de Whittle pour le paramètre σ^2. Peut-on obtenir une expression simple de l'estimateur de σ^2 par minimum de contraste? Comparer avec l'expression précédente.

(11) **(**)** Soit (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2. On considère le processus X, où:

$$X_n = \varepsilon_n - \theta \varepsilon_{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{N},$$

où $\theta \in]-1, 1[$.
(a) Quel type de processus est X? Déterminer sa densité spectrale et sa fonction de covariance (soit $r(k) = \mathbb{E}\, X_0 X_k$ pour $k \in \mathbb{N}$).
(b) Calculer la log-vraisemblance exacte (c'est-à-dire $\log f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, .., x_n)$) en fonction de σ^2 et θ (on écrira matriciellement cette expression). On notera $R(n)$ la matrice d'ordre n: $(r(j-i))_{1\leq i,j\leq n}$. Peut-on obtenir une expression simple de l'estimateur de (σ^2, θ) par maximum de vraisemblance?
(c) Écrire le contraste de Whittle pour les paramètres (σ^2, θ). Peut-on obtenir une expression simple de l'estimateur de (σ^2, θ) par minimum de contraste?
(d) Répondre au deux questions précédentes en supposant $\theta = 0.5$ connu (le paramètre à estimer est alors seulement σ^2).

(12) **(**)** Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2 et soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus ARCH(1) défini par $X_t = \varepsilon_t \sqrt{1 + a\, X_{t-1}^2}$ pour $t \in \mathbb{Z}$, avec $0 \leq a < 1$.
(a) X est-il gaussien? Centré?
(b) Montrer que $Y = (X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA.
(c) Déterminer l'expression de la vraisemblance conditionnelle de $(X_1, \cdots, X_n)$ sachant $X_0, X_{-1}, \ldots$, puis en déduire un estimateur de a par maximum de vraisemblance.

Feuille n^o 4:

Chaînes de Markov à espace d'état fini

(1) **(*)** Soit la chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E = \{0,1\}$ et telle que $\Pr(X_1 = 1\,|\,X_0 = 0) = p$ et $\Pr(X_1 = 1\,|\,X_0 = 1) = q$, où $p, q \in]0,1[$ sont inconnues.
- (a) Tracer le graphe associé à cette chaîne.
- (b) Déterminer la matrice de transition de (X_n).
- (c) On suppose que $X_0 = 0$. Déterminer la loi de probabilité de X_1.
- (d) Déterminer la mesure de probabilité μ invariante par X.
- (e) On suppose que X_0 à pour loi μ. Déterminer $\mathbb{E}\,X_n$ puis l'auto-covariance de X. Donner enfin la densité spectrale de X. Existe-t-il un processus ARMA ayant la même densité?
- (f) On suppose toujours que X_0 à pour loi μ et que $(X_1, \cdots, X_n)$ est observé. Déterminer l'expression des estimateurs $\widehat{p}_n$ et $\widehat{q}_n$. Vérifier que ces estimateurs convergent.

(2) **(*)** Soit la chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E = \{-1,0,1\}$ telle que $\mathbb{E}\,X_n = 0$ et

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_1 = 1\,|\,X_0 = 0) = \Pr(X_1 = -1\,|\,X_0 = 0) = p\\
&\Pr(X_1 = 1\,|\,X_0 = 1) = \Pr(X_1 = -1\,|\,X_0 = -1) = q\\
&\Pr(X_1 = 1\,|\,X_0 = 1) = 1/2,
\end{aligned}$$

avec $0 < p < 1/2$ et $0 < q < 1/4$.
- (a) Tracer le graphe associé à cette chaîne.
- (b) Déterminer la matrice de transition de (X_n).
- (c) On suppose que $X_0 = 0$. Déterminer la loi de probabilité de X_1.
- (d) Existe-t-il des états absorbants pour cette chaîne?
- (e) Déterminer la ou les mesures de probabilité invariantes par X.

(3) **(**)** Reprendre l'exercice précédent en traitant le cas $p = 1/2$ et $q < 1/4$, puis le cas $p = 2q = 1/2$.

(4) **(**)** Soit la chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E = \{0,1,\cdots,m\}$, où $m \geq 2$ telle que pour tout $k \in \{1,\cdots,m-1\}$,

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_1 = k+1\,|\,X_0 = k) = 1 - \Pr(X_1 = 0\,|\,X_0 = k) = p\\
&\Pr(X_1 = 0\,|\,X_0 = m) = \Pr(X_1 = 1\,|\,X_0 = 0) = 1.
\end{aligned}$$

- (a) Tracer le graphe associé à cette chaîne.
- (b) Déterminer la matrice de transition de (X_n).
- (c) On suppose que $X_0 = 0$. Déterminer la loi de probabilité de X_1, puis celle de X_2.
- (d) Existe-t-il des états absorbants pour cette chaîne?
- (e) Déterminer la ou les mesures de probabilité invariantes par X.
- (f) La chaîne converge-t-elle en loi quand $n \to \infty$?

Feuille n^o 5:

Prédiction

(1) **(*)** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un processus stationnaire d'espérance m et de covariance $r(\cdot)$. Montrer que le prédicteur optimal au sens des moindres carrés de X_{n+h} de la forme aX_n+b s'obtient avec $a=r(h)$ et $b=m(1-r(h))$.

(2) **(**)** Soit la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans $\{x_1,x_2\}$ et de matrice de transition $Q=(q_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$. Déterminer la prédiction optimale au sens des moindres carrés de X_{n+1} et X_{n+2} connaissant $(X_0,X_1,\cdots,X_n)$.

(3) **(**)** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ le processus MA(1) stationnaire défini par

$$X_n=\varepsilon_n-\theta\varepsilon_{n-1},\ \text{pour } n\in\mathbb{Z},$$

avec $|\theta|<1$ et (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2. Montrer que le prédicteur linéaire optimal $\widehat{X}_{n+1}$ au sens des moindres carrés de X_{n+1} à partir de $\{X_{n-j},j\in\mathbb{N}\}$ est :

$$\widehat{X}_{n+1}=-\sum_{j=1}^{\infty}\theta^j X_{n+1-j}.$$

Calculer l'erreur quadratique moyenne de ce prédicteur.

(4) **(**)** Dans le modèle de l'exercice précédent, on suppose que X_1, X_2, X_4 et X_5 sont connus, mais pas X_3. Déterminer le prédicteur linéaire optimal $\widehat{X}_3$ au sens des moindres carrés de X_3 à partir de (X_1,X_2), puis à partir de (X_4,X_5) et enfin à partir de (X_1,X_2,X_4,X_5). Calculer à chaque fois l'erreur quadratique moyenne de ce prédicteur.

(5) **(**)** Répondre aux mêmes questions dans le cas du modèle

$$X_n=\phi X_{n-1}+\varepsilon_n,\ \text{pour } n\in\mathbb{Z},$$

où $|\phi|<1$ et (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2.

(6) **(***)** Soit le processus $X=(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tel que $X_k=ak+b+\varepsilon_k$. On suppose que $(X_A,\cdots,X_n)$ est connue mais a et b sont inconnus. On estime a et b par moindres carrés ordinaires.
   - (a) Si (ε_n) est un bruit blanc gaussien de variance σ^2, déterminer une prédiction $\widehat{X}_{n+1}$ et donner son erreur quadratique moyenne. Que se passe-t-il quand $n\to\infty$?
   - (b) Si (ε_n) est un processus MA(1) de paramètre ϕ connu et de variance σ^2_ε, déterminer une prédiction $\widehat{X}_{n+1}$ et donner son erreur quadratique moyenne. La prédiction est-elle "meilleure" que dans le cas précédent?
   - (c) Que faire si maintenant ϕ est inconnu?