Université Paris I, Panthéon-Sorbonne

M1 MAEF, 2012/2013
TD Statistique 2.
Tendance et Saisonnalité
Alexis Fauth (alexis.fauth@univ-paris1.fr).

Exercice 1. *Considérons la régression linéaire, $y = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$, avec $\beta \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et le vecteur ε est un bruit blanc de variance $\sigma^2 I_n$. On définit D le sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^n$ engendré par les p colonnes de la matrice $\mathbf{X}$:*

$$D = \{v \in \mathbb{R}^n, v = \mathbf{X}\beta, \beta \in \mathbb{R}^p\}$$

1. *Supposons que $(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1} > 0$, montrer que la matrice $\mathbf{A} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t$ est symétrique, idempotente, projecteur dans $\mathbb{R}^n$ sur le sous-espace D et rang($\mathbf{A}$) $= p$ (Remarque : si $(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1} > 0$, alors dim(D)=p).*
2. *Montrer que la statistique*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{||y - \mathbf{X}\hat{\beta}||^2}{n-p}$$

   est un estimateur sans biais de σ^2.
3. *Supposons maintenant que le bruit blanc est gaussien, à l'aide du théorème de Cochran, montrer que $\sigma^{-2}||y - \mathbf{X}\hat{\beta}||^2 \sim \chi^2_{n-p}$ et $\sigma^{-2}||\mathbf{X}(\beta - \hat{\beta})||^2 \sim \chi^2_p$*

Exercice 2. *Soit $(y_1, \cdots, y_{3n})$ un échantillon d'observation et nous supposons que pour tout y_t, il existe une décomposition de la forme :*

$$y_t = ag(t) + \varepsilon_t, t \in \mathbb{N}$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $g(3s) = 1, g(3s+1) = 3, g(3s+2) = -1$ pour tout $s \in \mathbb{N}$ et ε un bruit blanc gaussien de variance σ^2.

1. *Le processus $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est-il stationnaire ? Gaussien ?*
2. *Déterminer la tendance et la saisonnalité du processus.*
3. *Montrer que l'estimation des moindres carrées ordinaires nous donne :*

$$\hat{a} = \frac{1}{11n}\sum_{s=0}^{n-1}(3y_{3s+1} - y_{3s+2} + y_{3s+3})$$

   et en déduire un estimateur non biaisé de σ^2
4. *Montrer que $\hat{a}$ est sans biais.*

Exercice 3. *Soit la régression*

$$y_t = a + (-1)^t b + \varepsilon_t, t \in \mathbb{N}$$

avec ε un bruit blanc gaussien de variance σ^2 et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Donner l'estimateur de $(\hat{a}, \hat{b})$ par moindre carré et montrer qu'il est sans biais (on supposera n impair).*