Université Paris I, Panthéon-Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2012 - 2013
TP 3 : Modélisation ARMA, ARCH et GARCH

Nous allons commencer par étudier les processus ARMA(p, q), c'est-à-dire des processus du type,

$$X_t = \theta_1 X_{t-1} + \cdots + \theta_p X_{t-p} + \xi_t + \phi_1 \xi_{t-1} + \cdots + \phi_q \xi_{t-q}$$

avec $(\theta_1, \cdots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$, $(\phi_1, \cdots, \phi_q) \in \mathbb{R}^q$ et ξ un bruit blanc.

Exercice 1. *Soit $(X, t \geq 0)$ un procesus ARMA(1,1) tel que,*

$$X_t + 0.3X_{t-1} = \xi_t + 0.7\xi_{t-1}.$$

où ξ est un bruit blanc gaussien de variance 1. Pour simuler un tel processus, disons 1000 réalisations, nous pouvons rentrer dans la console R,
X=arima.sim(model=list(ar=θ_1,ma=ϕ_1), n=1000, sd=1)

1. *Tracer le résultat de la simulation, X.*
2. *Tracer sa fonction d'autocorrélation.*
3. *Nous allons maintenant revenir en arrière, estimer les paramètres du modèle à partir de la simulation.*
   Coeff=arima(X,order=c(1,0,1))
   Résultat ?

Exercice 2. *Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus AR(p),*

$$X_t = \theta_1 X_{t-1} + \cdots + \theta_p X_{t-p} + \xi_t.$$

1. *A l'aide des equations de Yule-Walker, montrer que la fonction d'autocovariance vérifie*

$$\gamma(0) = \sum_{i=1}^{p} \theta_i \gamma(i) + \sigma_\xi^2.$$

2. *Montrer que la fonction d'autocorrelation est donnée par,*

$$\rho(h) = \sum_{i=1}^{p} \theta_i \rho(h - i).$$

3. *Considérons maintenant le processus*

$$(1 - 0.4B)(1 - 0.5B)X = \xi$$

   avec B l'opérateur de retard et ξ un bruit blanc gaussien de variance 2
4. *Ecrire sous forme d'une équation de récurrence (3)*
5. *Le processus est il causal ?*
6. *Simuler un tel processus à l'aide la fonction arima.sim.*
7. *Determiner l'autocorrelation théorique du processus.*
8. *Tracer l'acf de X issue de la simulation ainsi que l'acf théorique. Comparer.*
9. *Tracer la densité de X. Cela peut il s'apparenter à des rendements boursier ?*
10. *Produire la trajectoire -> arima.sim(model=list(ar=c(-0.2,-0.3)), n=1000, sd=1). Après avoir calculé l'acf (rho=as.vector(acf(X)\$acf)), en écrivant les équations de Yule-Walker sous forme matricielle, en déduire l'estimateur des paramètres du modèles. Quelles valeurs trouve t'on ?*

Nous allons maintenant nous interesser au processus GARCH(p,q), i.e. les processus de la forme,

$$\begin{aligned} X_t =& \mu + h_t\xi_t \\ h_t^2 =& \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j X_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i h_{t-j}^2 \end{aligned}$$

avec ξ un bruit blanc gaussien de variance fini, les paramètres étant positifs ou nul et vérifiant $\sum_{i=1}^{q} \beta_i + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j < 1$

Exercice 3.

1. *On suppose que l'on observe $(X_1, \cdots, X_n)$, en déduire un estimateur de μ.*
2. *Calculer les log-rendements du cours du S&P 500, $r_t = \log(S_t/S_{t-1})$.*
3. *On suppose que les rendements sont 'modélisable' par un processus ARCH(p),*

$$\begin{aligned} X_t =& \mu + h_t\xi_t \\ h_t^2 =& \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j X_{t-j}^2 \end{aligned}$$

Sans à priori sur l'ordre p, on peut chercher a minimiser l'AIC :

```
aic=c()
for (k in 1 :10){
    aic[k]=AIC(garch(x-μ, c(0,k)))
}
which.min(aic)
```

Ecrire le code pour simuler un ARCH d'ordre p déterminé précédement, de coefficient estimé précédement, de taille 1000 avec $\xi \sim \mathcal{N}$.

Exercice 4. * *Le problème principal du modèle ARCH est la détermination de l'ordre p. Emipiriquement, le modèle GARCH(1,1) donne de meilleurs résultats (mais quand même très pauvre).*

1. *Coder le modèle GARCH(1,1) afin de le simuler.*
2. *Estimer les paramètres du modèles, garch(x,c(1,1)).*
3. *Après quelques calculs très simple, on trouve que la variance conditionée par rapport au passé est donnée par,*

$$\mathbb{V}ar(r_{t+k}|\mathcal{F}_t) = (\alpha_1+\beta_1)^{k-1}h_{t+1} + \frac{\alpha_0(1-(\alpha_1+\beta_1)^{k-1})}{1-(\alpha_1+\beta_1)}$$

Il s'agit du 'meilleur' prédicteur de la variance (du risque). Sur l'historique de taille N, estimer les paramètres du GARCH(1,1) sur l'intervalle [1,N-50], en déduire la prévision de la volatilité sur les 50 points suivant.

4. *La loi de $r_{t+1}|\mathcal{F}_t$ est $\mathcal{N}(0, h_{t+1})$, l'intervalle de prévision est alors*

$$\mathbb{P}(r_{t+1} \in [-2\sqrt{h_{t+1}}, 2\sqrt{h_{t+1}}]) = 95\%$$

Pour $k \geq 2$ la loi de $r_{t+1}|\mathcal{F}_t$ n'ets pas nécessairement normale. Sur l'historique de taille N, estimer les paramètres du GARCH(1,1) sur l'intervalle $[1, N/2]$, donner l'intervalle de confiance des rendements en $t+1$, donc pour $t+1 = N/2+1$, recommencer la même opération sur l'intervalle $[2, N/2+1]$ pour calculer l'IC en $t+2 = N/2+2$, ainsi de suite jusqu'a $t+N/2$, i.e. la fin de la série. Qu'en pensez vous ?

Remarque : Le modèle GARCH(1,1) est en fait le modèle à volatilité stochastique de Heston. Après quelque arrangements sur les paramètres ($\kappa = 1-(\alpha_1+\beta_1)$, $\theta = \alpha_0/\kappa$), et en prenant la limite, c'est à dire que $r_t = \log(S_{t+1}/S_t)$ est remplacé par $r_t = \log(S_{t+\delta t}/S_t)$, avec $\delta t \to 0$, on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} &= \mu \mathrm{d}t + \sqrt{\nu_t}\mathrm{d}W_t^1 \\ \mathrm{d}v_t &= \kappa(\theta - \nu_t) + \sigma_\nu\sqrt{\nu_t}\mathrm{d}W_t^2 \end{aligned}$$

W^1 et W^2 deux mouvement brownien corrélés.