Université Paris I, Panthéon-Sorbonne

Licence MASS, deuxième année, 2011/2012
Analyse

Test 1, sujet A et B - Intégrale généralisée

1. Etudier la convergence des intégrales :

$$A = \int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t, \qquad B = \int_1^\infty \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

   Correction :

   Pour A, posons $f(t) = \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t(1-t)}}$, $f(t) \sim_{0^+} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 1 < \infty$ donc f est prolongeable en 0. $f(t) \sim_{1^-} \frac{\sin(1)}{\sqrt{1-t}} < \frac{1}{\sqrt{1-t}}$, il s'agit d'une intégrale de Riemann avec $1-t$ entre 0 et 1 et $\alpha = 1/2 < 1$, qui converge donc, et par le théorème de comparaison, l'intégrale A est convergente.
   Pour B, posons $f(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}$, on remarque que $f(t) < \frac{1+|\cos(t)|}{t^2} < \frac{2}{t^2}$, il s'agit d'une intégrale de Riemann avec t entre 1 et l'infinie, $\alpha = 2 > 1$, qui converge donc, et par le théorème de comparaison, l'intégrale B est convergente.

2. Après avoir montré la convergence, calculer les intégrales :

$$A = \int_0^\infty \frac{\sin(e^{-t})}{e^t}\mathrm{d}t, \qquad B = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}\mathrm{d}t$$

Correction :

Pour A, posons $f(t) = \frac{\sin(e^{-t})}{e^t}$, pas de problème en 0. On remarque que $|f(t)| < \frac{1}{e^t}$ et comme $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0$, $\int_0^\infty \frac{1}{e^t}\mathrm{d}t$ converge et par le théorème de comparaison, l'intégrale A est convergente. Passons maintenant au calcul, sachant que $\cos(u)' = -u'\sin(u)$,

$$\begin{aligned} A = \int_0^\infty \frac{\sin(e^{-t})}{e^t} &= [\cos(e^{-t})]_0^\infty \\ &= \lim_{t\to\infty} \cos(e^{-t}) - \cos(e^{-0}) \\ &= \cos(0) - \cos(1) \\ &= 1 - \cos(1) \end{aligned}$$

Pour B, posons $f(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}$, $f(t) \sim_{0^+} \frac{1}{\sqrt{t}}$, il s'agit d'une intégrale de Riemann avec t entre 0 et 1 et $\alpha = 1/2 < 1$ qui converge donc. $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et comme $\sin(x) \neq 0$

pour tout $x \in]\epsilon, \pi/4[, \epsilon > 0$, l'intégrale B est convergente. Passons maintenant au calcul, sachant que $(\sqrt{u})' = \frac{2u'}{\sqrt{u}}$,

$$
\begin{aligned}
B = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}} \mathrm{d}t &= [2\sqrt{\sin(t)}]_0^{\pi/4} \\
&= 2(\sqrt{\sin(\pi/4)} - \sqrt{\sin(0)}) \\
&= 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}
\end{aligned}
$$