Université Paris I, Panthéon-Sorbonne

Licence MASS, deuxième année, 2011/2012

Analyse

Test 2, sujet A et B - Equation différentielle

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

   $$A: \ (x^2+1)y' - xy = (x^2+1)^{3/2}, \qquad B: \ (1+e^x)y' + e^x y = (1+e^x)$$

   Correction :

   Pour A, on résoud l'équation homogène, $(x^2+1)y' - xy = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2-1}$, donc $y_{EH}(x) = k\exp(-\int^x \frac{t}{t^2-1}\mathrm{d}t) = k\exp(\frac{1}{2}\ln(x^2+1))$, on applique la méthode de variation de la constante, $k'(x) = 1$, $k(x) = x + k$, la solution est donc $y(x) = \sqrt{(x^2+1)}(x+k)$, $k \in \mathbb{R}$.

   Pour B, on résoud l'équation homogène, $(1+e^x)y' + e^x y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{e^x}{1+e^x}$, donc $y_{EH}(x) = k\exp(-\int^x \frac{e^t}{1+e^t}\mathrm{d}t) = k\exp(-\ln(1+e^x))$, on applique la méthode de variation de la constante, $k'(x) = 1$, $k(x) = x + e^x + k$, la solution est donc $y(x) = \frac{x+e^x+k}{1+e^x}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle avec comme condition initiale $y(0) = 0$:

   $$A: \ yy' = x, \qquad B: \ y' = \sqrt{y}$$

Correction :

Pour A, on reconnaît la dérivée de y^2, donc $yy' = x \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + k' \Leftrightarrow y(x) = \sqrt{x^2+k}$ avec la condition initiale on trouve $k = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour B, en réecrivant l'équation on a $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 1$, on reconnaît la dérivée de $\sqrt{y}$, donc, $2\sqrt{y} = x + k \Leftrightarrow y(x) = \frac{(x+k)^2}{4}$ avec la condition initiale on trouve $k = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.