Révisions d'algèbre linéaire

Xavier Bacon, Mohammed Bachir

January 29, 2019

Exercice 0.1. *Démontrer que les ensembles suivants sont des espace vectoriels (sur $\mathbb{R}$) en démontrant qu'ils sont des sous-espaces vectoriels d'un plus gros espace vectoriel que l'on explicitera.*

1. $F_1 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, x_1 = x_2 \right\}$.
2. $F_2 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$.
3. $F_3 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_3 = 0 \right\}$.
3. *Le noyau d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F.*
4. *L'image d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F.*
5. $F_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ dérivable }, f' = f\}$.
6. $F_5 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ dérivable }, f'' + 5f' = -2f\}$.

Exercice 0.2. *Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et inversez les le cas échéant.*

1. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

Exercice 0.3. *Dans chacun des cas suivants, déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que son inverse.*

1. *Dans* $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ *et* $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.
2. *Dans* $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ *et* $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.
3. *Dans* $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ *et* $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.
4. *Dans* $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ *et* $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

5. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ *et* $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$.

6. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ *et* $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} \right)$.

Les deux exercices suivants ont été proposés par M. Bachir.

Exercice 0.4. *Soit* $B = (e_1, e_2)$ *une base de* $E = \mathbb{R}^2$ *et* $f : E \to E$ *définie pour tout* $x = x_1e_1 + x_2e_2$ *par* $f(x) = (x_1 + x_2)e_1 + (x_1 - x_2)e_2$.

(1) *Montrer que* f *est un endomorphisme de* E *dans* E.

(2) *Déterminer* $M_B(f)$ *la matrice de* f *dans la base* B.

(2) *Soit* $e'_1 = e_1 + e_2$ *et* $e'_2 = 2e_1 - e_2$. *Montrer que* $B' = (e'_1, e'_2)$ *est une base de* E.

(3) *Déterminer la matrice de passage* $P_{B,B'}$ *de* B *vers* B' *ainsi que la matrice de passage* $P_{B',B}$ *de* B' *vers* B. *Endéduire* $P_{B,B'}^{-1}$.

(4) *Déterminer* $M_{B'}(f)$, *la matrice de* f *dans la base* B'.

Exercice 0.5. *Soit* $B = (1, X)$ *la base canonique de* $E = \mathbb{R}_1[X]$ *(l'espace des polynôme de degré inférieur ou égale à* 1*) et* $f : E \to E$ *définie par* $f(P) = Q$, *où*

$$Q(X) = P(X) + P(-X).$$

(1) *Montrer que* f *est un endomorphisme de* E *dans* E.

(2) *Déterminer* $M_B(f)$ *la matrice de* f *dans la base* B.

(2) *Soit* $B' = (1, -X)$. *Montrer que* B' *est une base de* E.

(3) *Déterminer la matrice de passage* $P_{B,B'}$ *de* B *vers* B' *ainsi que la matrice de passage* $P_{B',B}$ *de* B' *vers* B. *Endéduire* $P_{B,B'}^{-1}$.

(4) *Déterminer* $M_{B'}(f)$, *la matrice de* f *dans la base* B'.