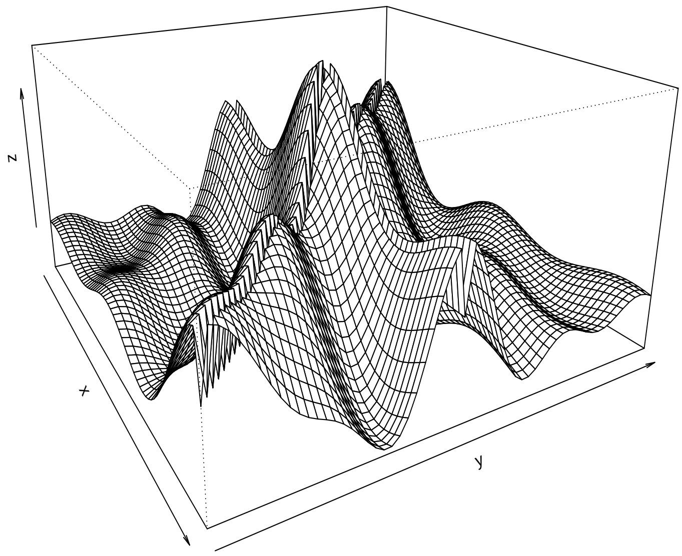
UFR 02 - ECONOMIE

Régime Aménagé - 2012/2013

MATHEMATIQUES 2

Deuxième Semestre



Cours : Ghjuvan Petru LECA

Travaux Dirigés : Alexis FAUTH

{jean-pierre.leca, alexis.fauth}@univ-paris1.fr

Table des matières

1 Programme de Mathématiques du Second Semestre.

Partie I. Algèbre Linéaire.

Chapitre 1. Espaces Vectoriels.

I. Généralités : définition, règles de calcul.
II. Sous-espaces veectoriels caractérisation, générateur, somme, supplémentaire.
III. Indépendance linéaire : famille génératrice, libre, base (existence : admise).
IV. Dimension : cardinalité des bases, somme direct ou non, rang d'une famille.

Chapitre 2. Application Linéaires.

I. Généralités : définition, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
II. Propriété : image de zéro, d'un S.E.V., composition des applications.
III. Noyau, caractérisation de l'injection.
IV. Image, caractérisation des familles libres et génératrices.
V. Rang d'une application linéaire, théorème du rang.

Chapitre 3. Matrice.

I. Généralités : définition, transposée, matrice carrée, diagonale, triangulaire.
II. Matrice associée à une application linéaire : image d'une base.
III. Opérations : isomorphisme entre algèbre des matrices et l'espace des morphismes.
IV. Matrices carrées : matrices inversibles, inverse d'un produit.
V. Changement de bases : matrice équivalentes et semblables.

Chapitre 4. Determinant.

I. Formes multilinéaires : Définition, alternées, antisymétrique.
II. Déterminant : théorème d'existence (admis), famille de vecteurs et matrice.
III. Règles de calcul : développement par rapport à une ligne ou à une colonne.
IV. Propriétés : déterminant d'un produit (admis), matrices semblables et inversibles.

Chapitre 5. Diagonalisation.

I. Vecteurs et valeurs propres : définition, sous-espaces propres, somme.
II. Recherche des valeurs propres : polynôme caractéristique, indépendance de la base, ordre de multiplicité d'une valeur propre, théorème de la dimension.
III. Théorème spectral : C.N.S. de diagonalisation.

Chapitre 6. Formes Quadratiques.

I. Formes Bilinéaires : Définition, représentation matricielle, noyau et rang.
II. Propriétés : formes polaires, Cauchy-Schwarz, signature.
III. Réduction d'une forme quadratique : théorème d'inertie de Sylvester (admis).
IV. Décomposition de Gauss : méthodes pratiques.

Partie II. Fonctions de plusieurs variables.

Chapitre 1. Généralités.

I. Courbes de niveau : définition, exemples.
II. Topologie dans $\mathbb{R}^2$: normes, distance, équivalences, ouverts, voisinages.
III. Limites et continuités : définitions, opérations, conditions nécessaires.
IV. Dérivées partielles : d'ordre n, théorème de Schwartz (admis), gradient.
V. Théorème des accroissements finis : rappel : n=1, puis n=2.
VI. Composition : dérivation "en chaîne".
VII. Différentiabilité : théorème fondamental (admis).

Chapitre 2. Fonctions Homogènes et Implicites.

I. Fonctions homogènes : définition, propriétés, fomule d'Euler.
II. Fonctions implicites : théorème (admis), énoncés dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, pour une équation, pour deux équations, pour un système d'équations, écriture matricielle.

Chapitre 3. Optimisations sans Contraintes.

I. Extremums locaux et globaux : conditions nécessaires.
II. Formules de Taylor : opérateur différentiel, théorème fondamental (admis).
III. Conditions suffisantes : théorème (admis) étude du signe des formes quadratiques.

Chapitre 4. Optimisations sous Contraintes.

I. Cas d'une seule contrainte : condition nécessaires, Lagrangien (démonstration pour 2 et 3 variables).
II. Cas de plusieurs contraintes : conditions nécessaires, Lagrangien (démonstration pour 5 variables et 3 contraintes, puis pour 3 variables et 5 contraintes).
III. Contraintes sous forme d'inégalités : relation d'exclusion, théorèmes (admis) de Kuhn et Tucker.

2 Travaux Dirigés.

2.1 Algèbre Linéaire.

Exercice 1. Soit $\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = ax + b \end{array} \right\}$ l'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Rappeler la structure du $\mathbb{R}$.e.v. de $(\mathcal{A}, =, +, \cdot)$.
2. Démontrer que $S = \{\varphi, \psi\} \subset \mathcal{A}$, avec

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi(x) = x \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \psi(x) = 1 \end{array}$$

   est une base de $\mathcal{A}$.
3. Démontrer que $\mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{rcl} l : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & l(x) = ax,\ a \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$ est une s.e.v. de $\mathcal{A}$.

Exercice 2. E et F deux $\mathbb{R}$.e.v., $\begin{array}{rcl} f : E & \to & F \\ \vec{u} & \mapsto & f(\vec{u}) \end{array}$. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in E, \forall \vec{v} \in E, \qquad f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in E, \forall \vec{v} \in E, \qquad f(\alpha \vec{u} + \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

Exercice 3. Démontrer que $\mathcal{L}(E, E)$ est stable pour la composition des applications, notée $\circ$.

Exercice 4. On considère $E = \mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{R}.e.v.$

1. Démontrer que l'application $\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi(x) = 3x \end{array}$ est linéaire.
2. Démontrer que l'application $\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \psi(x) = 3x + 1 \end{array}$ n'est pas linéaire.
3. Démontrer que $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi(x) = ax, a \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$. Au Feeling, $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = ?$.
4. A quelle condition l'application $x \mapsto \varphi(x) = ax$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-elle inversible ? Définir φ^{-1} son application réciproque. On choisit la base canonique de $\mathbb{R}$ à savoir $\{1\}$. Définir la matrice de φ puis celle de φ^{-1}. On pose $\det(a) = a$, justifier.

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{S} = \{\vec{u}_1, \cdot, \vec{u}_n\}$ une famille de n vecteurs de E. Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ lié $\stackrel{?}{\Longrightarrow}$ $\{f(\vec{u}_1), \cdots, f(\vec{u}_n)\}$ lié.
2. $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ libre $\stackrel{?}{\Longrightarrow}$ $\{f(\vec{u}_1), \cdots, f(\vec{u}_n)\}$ libre.

Exercice 6. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,n}}$ matrice carrée. On considère les écritures suivantes,

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}; \quad S' = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}; \quad tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}; \quad T = \sum_{1\leq i}\ \sum_{\leq j \leq n} a_{ij}; \quad T' = \sum_{1\leq j}\ \sum_{\leq i\leq n} a_{ij}$$

1. Donner du sens à ces écritures par des considérations "géométrique" sur la matrice A.
2. Trouver les relations qui lient ces cinq nombres dans le cas général puis dans le cas $A = A^t$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{M}(2,2)$ l'ensemble des matrices à deux lignes et deux colonnes.
Si $A \in \mathcal{M}(2,2)$ on note $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ou mieux, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}}$

1. (N.B. Vu en cours) Rappeler la structure du $\mathbb{R}$.e.v. de $(\mathcal{M}(2,2), =, +, \cdot)$
2. On dit que A est diagonale si $\forall i, \forall j, i \neq j \implies a_{ij} = 0$.
   Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}(2,2)$. $\mathcal{D}$ est-il un s.e.v. de $\mathcal{M}(2,2)$? Si oui quelle est sa dimension ? (feeling puis base)
3. On dit que A est symétrique si $\forall i, \forall j, a_{ij} = a_{ji}$.
   Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}(2,2)$. $\mathcal{S}$ est-il un s.e.v. de $\mathcal{M}(2,2)$? Si oui, quelle est sa dimension ? (feeling puis base)
4. On dit que A est antisymétrique si $\forall i, \forall j, a_{ij} = -a_{ji}$.
   Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétrique de $\mathcal{M}(2,2)$. $\mathcal{A}$ est-il un s.e.v. de $\mathcal{M}(2,2)$? Si oui quelle est sa dimension ? (feeling puis base)
5. Donner un exemple de matrice ni symétrique ni antisymétrique. Puis un exemple de matrice symétrique et antisymétrique. L'exemple $\mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ est-il un s.e.v. de $\mathcal{M}(2,2)$?
6. Si $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}}$ telle que $b_{ij} = a_{ji}$, on dit que B est la matrice transposée de A et on note $B = A^t$
   (a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ définir A^t puis $(A^t)^t$.
   (b) Si $A = A^t$ que peut-on dire de la matrice A ?
   Si $A = -A^t$ que peut-on dire de la matrice A ?
   (c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ calculer $S = \frac{1}{2}(A + A^t)$ puis $T = \frac{1}{2}(A - A^t)$ puis $S + T$.
7. (a) Montrer que $\forall A$ et $\forall B$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
   $$(A+B)^t = A^t + B^t$$
   $$(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$$
   $$(A^t)^t = A$$
   (b) Que peut-on dire de l'application φ, $\begin{array}{rl} \varphi : \mathcal{M}(2,2) & \to \mathcal{M}(2,2) \\ A & \mapsto A^t = \varphi(A) \end{array}$?
8. Déduire des résultats ci-dessus que : $\forall A \in \mathcal{M}(2,2)$,
   $$A = S + T, T \in \mathcal{S} \text{ et } T \in \mathcal{A}$$

9. Peut-on généraliser ce résultat à des matrices quelconques ? De quel types ?
10. **Définition.** D'après 5. et 8. on dit que les $\mathbb{R}$.e.v. $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires et écrit $\mathcal{M}(2,2) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$

Exercice 8. Soit la matrice ligne $X = [x_1\, x_2 \cdots x_n]$ et X^t la matrice transposée. Calculer XX^t et X^tX.

Exercice 9. Soit les matrices $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1. Calculer AB, BA, A^2, A^3, B^2, B^3.
2. En déduire A^n, B^n, $(A+B)^n$.

Exercice 10. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel a tel que $A = aI + B$. Calculer B^2 et B^3.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a^nI + na^{n-1}B + \dfrac{n(n-1)a^{n-2}}{2}B^2$
3. A l'aide de la formule du binôme de Newton, retrouver la valeur de A^n.

Exercice 10. (éléments de corrigé)

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Détermination de a :

$$A = aI + B \Leftrightarrow aI = A - B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I \Rightarrow a = 6$$

Après calcul on trouve,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 6 & -18 & 12 \\ 6 & -18 & 12 \\ 6 & -18 & 12 \end{pmatrix} \qquad B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : A^n = 6^nI + n6^{n-1}B + \frac{n(n-1)6^{n-2}}{2}B^2$.

• Initialisation : $n = 0$, on a d'une part $A^0 = I$ et d'autre part $6^0I + 0 \times 6^{0-1}B + \frac{0(0-1)6^{0-2}}{2}B^2 = I$ donc $A^0 = 6^0I + 0 \times 6^{0-1}B + \frac{0(0-1)6^{0-2}}{2}B^2$ et l'hypothèse $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

• Hérédité : supposons $(\mathcal{P}n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $A^n = 6^nI+n6^{n-1}B+\dfrac{n(n-1)6^{n-2}}{2}B^2$ et montrons que $A^{n+1} = 6^{n+1}I+(n+1)6^nB+\dfrac{n(n+1)6^{n-1}}{2}B^2$. En utilisant la question 1. ainsi que l'hypothèse de recurrence $(\mathcal{P}_n)$, on a,

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n \times A \\
&= (6^nI + n6^{n-1}B + \frac{n(n-1)6^{n-2}}{2}B^2)(6I+B) \\
&= 6^{n+1}\underbrace{I^2}_{=I} + n6^nBI + \frac{n(n-1)6^{n-1}}{2}B^2I + 6^nIB + n6^{n-1}B^2 + \frac{n(n-1)6^{n-2}}{2}\underbrace{B^3}_{=0} \\
&= 6^{n+1}I + n6^nB + \frac{n(n-1)6^{n-1}}{2}B^2 + 6^nB + n6^{n-1}B^2 \\
&= 6^{n+1}I + (n6^n + 6^n)B + \left(\frac{n(n-1)6^{n-1}}{2} + n6^{n-1}\right)B^2 \\
&= 6^{n+1}I + 6^n(n+1)B + n6^{n-1}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)B^2 \\
&= 6^{n+1}I + (n+1)6^nB + n6^{n-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)B^2
\end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

3. Les matrice B et $6I$ commutent, $(6I)B = B(6I)$. On peut alors appliquer la formule du binôme de Newton,

$$A^n = (6I+B)^n = (B+6I)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k(6I)^{n-k}$$

Puisque $B^k = 0$ pour $k \geq 3$, on a, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
A^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k(6I)^{n-k} &= \binom{n}{0}B^0(6I)^{n-0} + \binom{n}{1}B^1(6I)^{n-1} + \binom{n}{2}B^2(6I)^{n-2} \\
&= 6^nI + n6^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}6^{n-2}B^2
\end{aligned}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{3}{4}n + \frac{1}{12}n^2 + 1\right)6^n & -\frac{1}{4}n(n-5)6^n & \frac{1}{6}n(n-3)6^n \\ \frac{1}{12}n(n-5)6^n & \left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}n^2 + 1\right)6^n & \frac{1}{6}n(n+1)6^n \\ \frac{1}{12}n(n-3)6^n & -\frac{1}{4}n(n+1)6^n & \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{6}n^2 + 1\right)6^n \end{pmatrix}$$

Exercice 11. Démontrer dans le cas des matrices 2×2 les égalités suivantes,

1. $\det(A \times B)$=$\det A\times\det B$
2. $\det A$=$\det A^t$
3. $\det A\times\det A^{-1}$=1 (si A est inversible)

On admettra que ces résultats ce généralisent au cas des matrices $n \times n$.

Exercice 12. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, calculer $\mathrm{tr}(A \times A^t)$. Plus généralement expliciter $\mathrm{tr}(A \times A^t)$ dans le cas $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,n}}$. On rappelle que trace$A$=tr$(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exercice 13. Soit la matrice B telle que $B^3 + 2B^2 - 4B + \mathbf{1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ et $\mathbf{0}$ désignent respectivement la matrice unité et la matrice nulle de l'ensemble $\mathcal{M}(n,n)$. Calculer B^{-1} en fonction de B.

Exercice 14. Soit A une matrice carrée, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

On dit que A est symétrique si $A = A^t$.

On dit que A est antisymétrique si $A = -A^t$.

1. Donner des exemples de matrices symétriques, de matrices antisymétrique. Existe-t-il des matrices symétriques ET antisymétriques ?
2. La symétrie des matrices est-elle stable pour l'+ des matrices ? la $\cdot$ par un scalaire ? la $\times$ des matrices ?
3. Mêmes questions pour l'antisymétrique.

Exercice 15. Soit $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit inversible. Calculer dans ce cas A^{-1}.

Exercice 16. Soit A une matrice carrée quelconque. Développer la produit $(1 + A + A^2 + \cdots + A^n)(\mathbf{1} - A)$

1. En faisant $n = 3$, utiliser le résultat précédant pour obtenir une matrice "approchée" de $(\mathbf{1} - A)^{-1}$ dans le cas $A = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \end{bmatrix}$
2. Calculer A^{-1}.

Exercice 17. On désigne par $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canonique du $\mathbb{R}$.$e.v.$ $\mathbb{R}^3$. On considère les applications f et g de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ telles que, $f(x, y, z) = (z, x, y)$ et $g(x, y, z) = (y, z, x)$

1. Calculer $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)$. f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Déterminer Ker$f$. Déterminer Imf. Vérifier le théorème du rang.
2. Définir la matrice M de f et la matrice N de g par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer les matrices A^2, A^3, B^2, B^3 avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. En déduire les fonctions $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ g \circ g$.
5. Calculer les matrices A^{-1} et B^{-1}.

Exercice 18. Déterminer l'espace de départ, l'espace d'arrivée, le rang, l'image et le noyau des applications linéaires suivantes et dire lesquelles sont injectives, surjectives.

1. $f(x, y, z) = (x + y - z, x - y, x + 3y - 2z)$
2. $f(x, y, z) = (x + 2y - z)$
3. $f(x, y) = (x + y, x - y)$
4. $f(x, y) = (x, y, x + y)$

Exercice 19. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que : $f(1, 0, 1) = (1, 2)$, $f(0, 1, 1) = (1, 0)$, $f(a, 0, 1) = (-1, 1)$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ ces relations définissent entièrement f et de manière unique ?
2. f peut-elle être injective ?
3. Déterminer f - en calculant $f(x, y, z)$ - le noyau de f et le rang de f lorsque $a = 0$.
4. On choisit la base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice M de f relativement à ces bases, toujours dans le cas $a = 0$.

Exercice 20. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer l'application linéaire f associé à M par rapport à la base canonique de l'ensemble de départ et à la base canonique de l'ensemble d'arrivé.
2. Déterminer l'application linéaire g associée à M par rapport aux bases $(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)$ et $\{(1, 2), (2, 1)\}$ respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 20. (éléments de corrigés)

1. Déterminons l'application linéaire f associée à M par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Soit $B = (e_j)_{1 \leq j \leq 2}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $C = (f_i)_{1 \leq i \leq 3}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après la représentation matricielle de f, il est clair que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, et par linéarité de f, on peut écrire pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$
$f(x, y, z) = f(xf_1 + yf_2 + zf_3) = xf(f_1) + yf(f_2) + zf(f_3)$ et comme,

$$M_{B,C} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(f_1) & f(f_2) & f(f_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

on a,

$$\begin{aligned} f(f_1) &= e_1 + 3e_2 \\ f(f_2) &= 2e_1 + e_2 \\ f(f_3) &= 3e_1 + e_2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xf(f_1) + yf(f_2) + zf(f_3) \\ &= x(e_1 + e_3) + y(2e_1 + e_2) + z(3e_1 + e_2) \\ &= (x + 2y + 3z)e_1 + (3x + y + z)e_2 \\ &= (x + 2y + 3z, 3x + y + z) \end{aligned}$$

2. Déterminons l'application linéaire g associée à M par rapport aux bases $V = (V_i)_{1\leq i\leq 3}$ où, $V_1 = (1,1,1), V_2 = (1,-1,1), V_3 = (1,1,-1)$ et $T = (T_j)_{1\leq j\leq 2}$ où, $T_1 = (1,2), T_2 = (2,1)$.
Soit $B = (e_j)_{1\leq j\leq 2}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $C = (f_i)_{1\leq i\leq 3}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
D'après la représentation matricielle de g, il est clair que $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, et par linéarité de g, on peut écrire pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$
$g(x,y,z) = g(xf_1 + yf_2 + zf_3) = xg(f_1) + yg(f_2) + zg(f_3)$ et comme,

$$M_{V,T} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(V_1) & g(V_2) & g(V_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ T_1 \\ T_2 \end{array}$$

on a,

$$\begin{aligned} g(V_1) &= T_1 + 3T_2 \\ g(V_2) &= 2T_1 + T_2 \\ g(V_3) &= 3T_1 + T_2 \end{aligned}$$

Exprimons maintenant les vecteurs de la base C en fonction des vecteurs de la base V,

$$\begin{cases} f_1 + f_2 + f_3 &= V_1 \\ f_1 - f_2 + f_3 &= V_2 \\ f_1 + f_2 - f_3 &= V_3 \end{cases} \iff \begin{cases} f_1 &= \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_3 \\ f_2 &= -\frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_1 \\ f_3 &= -\frac{1}{2}V_3 + \frac{1}{2}V_1 \end{cases} \tag{1}$$

Donc,

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= g(xf_1 + yf_2 + zf_3) \\ &= xg(f_1) + yg(f_2) + zg(f_3) \\ &= xg\left(\frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_3\right) + yg\left(-\frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_1\right) + zg\left(-\frac{1}{2}V_3 + \frac{1}{2}V_1\right) \\ &= x\left(g\left(\frac{1}{2}V_2\right) + g\left(\frac{1}{2}V_3\right)\right) + y\left(g\left(-\frac{1}{2}V_2\right) + g\left(\frac{1}{2}V_1\right)\right) + z\left(g\left(-\frac{1}{2}V_3\right) + g\left(\frac{1}{2}V_1\right)\right) \end{aligned}$$

On réécrit la derniere ligne avec (1), et on obtient après simplification,

$$= x\left(\frac{5}{2}T_1 + T_2\right) + y\left(-\frac{1}{2}T_1 + T_2\right) + z\left(-T_1 + T_2\right)$$

Or,

$$\begin{cases} T_1 &= e_1 + 2e_2 \\ T_2 &= 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x\left(\frac{5}{2}(e_1 + 2e_2) + (2e_1 + e_2)\right) + y\left(-\frac{1}{2}(e_1 + 2e_2) + (2e_1 + e_2)\right) + z\left(-(e_1 + 2e_2) + (2e_1 + \right. \\ &= e_1\left(\frac{9}{2}x + \frac{3}{2}y + z\right) + e_2\left(6x - z\right) \\ &= \left(\frac{9}{2}x + \frac{3}{2}y + z, 6x - z\right) \end{aligned}$$

Exercice 21. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,q \\ j=1,\dots,n}}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n, p, q, m pour que le produit $A \times B$ soit défini. Même question pour le produit BA, la somme $A + B$.
2. Démontrer que
   – $(A+B)^t = A^t + B^t$
   – $(A \times B)^t = B^t \times A^t$
   – $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Exercice 22. Soit $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ deux matrices colonnes composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans une base de $\mathbb{R}^2$.

On pose $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

1. Démontrer que l'application ($\vec{v}$ fixé), $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \vec{u} & \mapsto & \det(\vec{u}, \vec{v}) \end{array} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
2. De même pour l'application ($\vec{u}$ fixé), $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \vec{v} & \mapsto & \det(\vec{u}, \vec{v}) \end{array} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
3. Démontrer que $\det(\vec{u}, \vec{v})$=-$\det(\vec{v}, \vec{u})$.
4. Démontrer que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ libre $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

Exercice 23. Soit $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ telle que : $\vec{f}_1 = (1,0,1)$, $\vec{f}_2 = (0,1,1)$, $\vec{f}_3 = (1,1,1)$.

1. Calculer P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$ puis Q la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{E}$.
2. Calculer $P \times Q$ et $Q \times P$
3. En déduire la résolution des systèmes suivants,

$$(1)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & a \\ & & y & + & z & = & b \\ x & + & y & + & z & = & c \end{array}\right. ; \qquad (2)\left\{\begin{array}{ccccccc} & & -y & + & z & = & a' \\ -x & & & + & z & = & b' \\ x & + & y & - & z & = & c' \end{array}\right.$$

4. Soit $X_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathcal{E}}$ et $Y_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}_{\mathcal{F}}$ Calculer les coordonnées de X dans $\mathcal{F}$ et de Y dans $\mathcal{E}$.
5. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ telle que, $\vec{u} = (x, y, z) \mapsto \varphi(\vec{u}) = (y+z, x+z, x+y)$.
   (a) Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{E}$.
   (b) Calculer B la matrice de φ dans la base $\mathcal{F}$.
   (c) Calculer $\det A$ puis $\det B$. Commentaires.

Exercice 24. Pourquoi une matrice de passage est-elle toujours inversible ?

Exercice 25. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n\times n}$. Prouvez que si $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, alors $\mathrm{tr}(AB)$=$\mathrm{tr}(BA)$. En déduire que si $C \in \mathcal{M}_{n\times n}$ est une matrice inversible, alors $\mathrm{tr}(C^{-1}AC)$=$\mathrm{tr}(A)$.

Exercice 26. ** On se propose ici de donner le déterminant de la matrice de Vandermonde définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par, $V_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n$

1. Donner la dimension de la matrice $V_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, on la notera sous la forme $i \times j$ où i denote le nombre de lignes et j le nombre de colonnes.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, on rappelle que $\det(A)$=$\det(A^t)$ et si $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $C_i = aC_i'$ où C_i est la i-ème colonne de la matrice A alors, $\det(A) \equiv \det(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_n)$=$a\times$ $\det(C_1, \cdots, C_i', \cdots, C_n)$. En déduire que $\det(L_1, \cdots, aL_i', \cdots, L_n)$=$a\times$ $\det(L_1, \cdots, L_i', \cdots, L_n)$.
3. Montrer, à l'aide de combinaison linéaire sur chacune des colonnes, que,

$$|V_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n - \alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

4. A l'aide de 2., déduire que $\det(V_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n))$=$(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\cdots(\alpha_n-\alpha_1)\det(V_{n-1}(\alpha_2, \cdots, \alpha_n))$
5. En déduire que $\det(V_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) = \prod\limits_{1\leq i<j\leq n}^{n} (x_j - x_i)$.
6. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les x_i pour que $V_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ soit inversible.

Exercice 27. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3/2 \\ 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1. Soit $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ avec $\vec{f}_1$= $(1, 0, 0)$, $\vec{f}_2$= $(2, 2, 0)$, $\vec{f}_3$= $(0, 3, 2)$
   (a) Par le calcul d'un déterminant ad-hoc, montrer que $\mathcal{F}$ est un système libre et en déduire qu'il est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer D la matrice de φ dans $\mathcal{F}$.
   (c) En déduire que A est une matrice diagonalisable et donner sa matrice diagonale.
2. Calculer $\varphi(\vec{f}_1)$, $\varphi(\vec{f}_2)$, $\varphi(\vec{f}_3)$.
3. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 28. $\mathbb{R}^4$ étant muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de f
2. On considère les vecteurs

$$\epsilon_1 = e_1 + e_2, \quad \epsilon_2 = e_1 + e_2 + e_3, \quad \epsilon_3 = e_2 + e_3 + e_4, \quad \epsilon_4 = e_3 + e_4$$

   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ est libre. En déduire que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Calculer $f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), f(\epsilon_3), f(\epsilon_4)$. En déduire la matrice A' de f par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

   (c) Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

   (d) Calculer P^{-1}.
3. (a) Exprimer A en fonction de A', P et P^{-1}.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(PA'P^{-1})^n = PA'^nP^{-1}$.

   (c) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 29. Calculer, si elle existe, la matrice diagonale de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, puis calculer P matrice inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale.

Exercice 30. * Soit $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ des réels.

1. Démontrer que le polynôme en $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \mapsto P(\lambda) = \sum_{k=1}^{n}(a_k \times \lambda + b_k)^2$ s'annule au plus une fois.
2. En déduire l'inégalité de SCHWARZ

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

3. * Déduire de l'inégalité ci-dessus quand $b_i = 1, i = 1, \cdots, n$, l'inégalité

$$(tr(A))^2 \leq n \times tr(A^t A)$$

   où A est la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,p}}$

Exercice 30. (éléments de corrigé)

1. 2. Il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bunyakovski, $| < X|Y > | \leq ||X|| \cdot ||Y||$ pour le p.s. sur $\mathbb{R}^n$ tel que,

$$< X|Y >= X^T Y \text{ avec } X = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

2. Pour $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$, l'inégalité devient,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \tag{1}$$

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m,\\ j=1,\ldots,p}}$ $\mathrm{Tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$ la somme de tous les carrés des coefficients de la matrice.

$$\begin{aligned}
Tr(A^T A) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^2 \\
&\leq n \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 \quad \text{d'après (1)} \\
&\leq n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \quad \text{of course, on a rajouté des termes} \geq 0 \\
&\leq nTr(A^T A) \quad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

Exercice 31. Soit $\begin{array}{rccl} q: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & q(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2\alpha yz \end{array}$

1. Montrer qu'il existe une matrice $B = (b_{ij})$ telle que : $q(x,y,z) = X^t \times B \times X$ avec $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{C}$ la base canonique.
2. En déduire la forme bilinéaire B associée à la forme quadratique q. On calculera $\begin{array}{rccl} B: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & B(\vec{u}, \vec{v}) \end{array}$ avec $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}$
3. Trouver les valeurs propres de la matrice B et déterminer la base propre $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ associée. N.B. Traiter le cas $\alpha \neq \pm 3$ dans un premier temps.
4. A partir de la base propre ci-dessus, construire une base propre orthogonale. N.B. On rappelle le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$: $<\vec{u} \mid \vec{v}>= \sum_{i=1}^{3} u_i \cdot v_i$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ceux de la question 3.
5. En déduire A la matrice de B - on dira aussi de q - dans la base orthonormale θ, puis donner la forme réduite de q.
6. Donner suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}^+$, la nature de la forme quadratique q - définie positive, semi-définie positve ?... -.

Exercice 31. (éléments de corrigé)

1. $B(X,Y) = \frac{1}{4}[q(X+Y) - q(X-Y)]$

$B = (b_{ij})$ tel que $b_{ij} = \mathcal{B}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, d'où

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \end{bmatrix} \text{ dans la base canonique } \mathcal{C}$$

2. $B(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_1 + 4u_2v_2 + 4u_3v_3 + \alpha(u_2v_3 + u_3v_2)$
3. Valeurs propres : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4 + \alpha$, $\lambda_3 = 4 - \alpha$.
   Si $\alpha = 0$, B est diagonale. Soit donc $\alpha \neq 0$.
   cas : $\alpha \neq 3$ et $\alpha \neq -3$ où les trois valeurs propres sont distinctes,
   $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_1 = 1$
   $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_2 = 4 + \alpha$
   $\vec{v}_3 = (0, 1, -1)$ vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_2 = 4 - \alpha$
4. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ base orthogonale.
5. $P = P_{\theta \to \mathcal{C}}$ la matrice de passage de la base orthonormale $\theta = \left\{\vec{v}_1, \frac{\vec{v}_2}{\sqrt{2}}, \frac{\vec{v}_3}{\sqrt{2}}\right\}$ à $\mathcal{C}$, avec
   $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
   $P_{\mathcal{C} \to \theta} = P^{-1} = P$
   $A = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha \end{bmatrix}$
   $X_{\mathcal{C}} = PX_\theta$, $X_{\mathcal{C}}^T = X_\theta^T P^T$, $X_\theta = PX_{\mathcal{C}}$, d'où
   $$\begin{aligned} q(X, Y, Z) &= X_{\mathcal{C}}^T B X_{\mathcal{C}} = X_\theta^T P^T B P X_\theta = X_\theta^T A X_\theta \\ &= x^2 + (4+\alpha)\frac{(y+z)^2}{2} + (4-\alpha)\frac{(y-z)^2}{2} \qquad \text{forme réduite de } q \end{aligned}$$
6. q définie positive si $4 + \alpha > 0$ et $4 - \alpha < 0$

   cas $\alpha = 3$ et cas $\alpha = -3 \cdots$ etc $\cdots$

Exercice 32. Soit $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$; $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mapsto Q(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_4$

1. Calculer $\begin{array}{rcl} B : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & B(\vec{x}, \vec{y}) \end{array}$ telle que Q est la forme quadratique associée à B forme bilinéaire.
2. Déterminer $[B]$ la matrice B dans la base canonique. La forme bilinéaire B est-elle symétrique ? Est-elle définie positive ?

Exercice 32. (éléments de corrigé)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1 > 0, \quad , Q\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = -4 < 0$$

Exercice 33. Soit $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ la forme bilinéaire associée dans la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, q la forme quadratique,

- Définir $B(\vec{u})$ et $q(\vec{u})$ si $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.
- Donner une conditon sur a, b, c pour que B soit semi-définie positive.
- Idem avec B définie positive.

Exercice 34. Soit $\vec{u}= (u_1, \cdots, u_n)$ et $\vec{v}= (v_1, \cdots, v_n)$, démontrer que $\begin{array}{rcl} B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & B(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^n u_i v_i \end{array}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (appelé produit scalaire euclidien. On le notera $B(\vec{u}, \vec{v}) =<\vec{u} \mid \vec{v}>$).

1. Définir la matrice de B dans la base canonique.
2. Définir la forme quadratique Q associée à B.
3. Dans le cas $\mathbb{R}^2$ et du plan euclidien, avec $\vec{u}=\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v}= 2\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$ calculer : $<\vec{u} \mid \vec{u}>$, $<\vec{u} \mid \vec{v}>$, $<\vec{v} \mid \vec{v}>$, $<\vec{i} \mid \vec{j}>$, la longueur du segment OA, la longueur du segment OB. Commentaires géométriques sur les longueurs et les angles.

Exercice 35. Soit $(\mathbb{R}^n, < \cdot|\cdot >)$ où $< \cdot|\cdot >$ désigne le produit scalaire euclidien tel que pour $\vec{u}= (u_1, \cdots, u_n)$ et $\vec{v}= (v_1, \cdots, v_n)$, $<\vec{u} \mid \vec{v}>= \sum_{i=1}^n u_i v_i$, et $|| \cdot ||$ la norme euclidienne telle que : $|| \vec{u} || = \sqrt{<\vec{u}, \vec{v}>}$. Démontrer les relations suivantes,

1. $| <\vec{u} \mid \vec{v}> | \leq || \vec{u} || \times || \vec{v} ||$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz) (cf exo 29)
2. $|| \vec{u} + \vec{v} || \leq || \vec{u} || + || \vec{v} ||$
3. $|| \vec{u} + \vec{v} ||^2 = || \vec{u} ||^2 + || \vec{v} ||^2 + 2 <\vec{u} \mid \vec{v}>$
4. $|| \vec{u} + \vec{v} ||^2 + || \vec{u} - \vec{v} ||^2 = 2(|| \vec{u} ||^2 + || \vec{v} ||^2)$
   Donner une interprétation géométrique de $2, 3, 4$ dans le cas de la géométrie euclidienne.

Exercice 36. Soit $\vec{u}= (1, -1, 2)$ et $\vec{v}= (-1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$

1. Construire un vecteur $\vec{w}\in \mathbb{R}^3$ tel que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$
3. On désigne par $\{\vec{u}\}^\perp = \{\vec{t}\in \mathbb{R}^3 / \ \vec{t} \perp \vec{u}\}$
   (a) Démontrer que $\{\vec{u}\}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Trouver une base de $\{\vec{u}\}^\perp$ dans le cas $\vec{u}= (1, -1, 2)$.

Exercice 36. (éléments de corrigé)

1. $< \vec{u} | \vec{v} >= \sum_{i=1}^{3} u_i v_i = 0_{\mathbb{R}}$ donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

$$\vec{w} = (x, y, z), \quad \left.\begin{array}{ll} \vec{w} \perp \vec{u} & \to x - y + 2z \quad = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} & \to -x + y + z \quad = 0 \end{array}\right\} \implies \begin{array}{c} x = y \\ \text{et} \\ z = 0 \end{array}$$

Soit par exemple $\vec{w} = (1, 1, 0)$ et $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ base orthogonale.

2. $||\vec{u}|| = \sqrt{6}$, $||\vec{v}|| = \sqrt{3}$, $||\vec{w}|| = \sqrt{2}$ d'où $\left\{ \frac{\vec{u}}{\sqrt{6}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{3}}, \frac{\vec{w}}{\sqrt{2}} \right\}$ base orthonormale.

3. (a) $\vec{0}_{\mathbb{R}^3} \in \{\vec{u}\}^{\perp} \implies \{\vec{u}\}^{\perp} \neq 0$. (1)

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{t_1} \in \{\vec{u}\}^{\perp} & \implies < \vec{t_1} | \vec{u} > \quad = 0_{\mathbb{R}} \\ \vec{t_2} \in \{\vec{u}\}^{\perp} & \implies < \vec{t_2} | \vec{u} > \quad = 0_{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \implies < \vec{t_1} + \vec{t_2} | \vec{u} > = < \vec{t_1} | \vec{u} > + < \vec{t_2} | \vec{u} > = 0_{\mathbb{R}}$$

$\implies \vec{t_1} + \vec{t_2} \in \{\vec{u}\}^{\perp}$. Donc $\{\vec{u}\}^{\perp}$ stable pour $+$. (2)

De même, mutatis mutandis, on montre $\{\vec{u}\}^{\perp}$ stable pour $\cdot$. (3)

(1), (2), (3) $\implies \{\vec{u}\}^{\perp}$ sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ base de $\{\vec{u}\}^{\perp}$

Exercice 37. Soit $\vec{u} = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose,

$$|| \vec{u} ||_1 = \sum_{i=1}^{n} | \vec{u}_i |, \qquad || \vec{u} ||_2 = \sqrt{< \vec{u} \mid \vec{u} >}, \qquad || \vec{u} ||_\infty = \max_i | \vec{u}_i |$$

1. Démontrer qu'il s'agit bien de trois normes.
2. Dessiner les boules ouvertes $B_1^{ř}(0,1)$, $B_2^{ř}(0,1)$, $B_3^{ř}(0,1)$ pour chacune de ces trois normes.
3. * Déterminer α et β deux nombres réels positif tel que :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \ \ \alpha || \vec{u} ||_\infty \leq || \vec{u} ||_1 \leq \beta || \vec{u} ||_\infty$$

NB. La norme 1 est dites norme Manhattan et la norme 2 norme euclidienne.

2.2 Fonctions de plusieurs variables.

Exercice 38. 1. Rappeler le sens des notations de f'_x, f'_y, f_{x^2}'', f_{xy}'', ... et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, ...

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes :
   $f(x,y) = x + y + xy$, $\quad f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $\quad f(x,y) = e^{2x+y}$
   $f(x,y) = \ln(x+y)$, $\quad f(x,y) = x^2y + 3yx^3$, $\quad f(x,y) = (x+y)^\alpha$, $\alpha > 0$.

Exercice 39. Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^y + y^x$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Expliciter les dérivées partielles $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$.
3. Définir $df(1,1) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, la forme linéaire appelée différentielle de f au point (1,1).

Exercice 40. Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^3 + y^2$

1. Calculer $f(1+h_1, 1+h_2)$.
2. En déduire $f(1+h_1, 1+h_2) = f(1,1) + df(1,1)(h_1,h_2) + ||(h_1,h_2)||\epsilon(h_1,h_2)$ où $df(1,1) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est la différentielle de f au point $(1,1)$ et $\epsilon(h_1,h_2) \xrightarrow[(h_1,h_2)\to \vec{0}_{\mathbb{R}^2}]{} 0_{\mathbb{R}}$
3. f est elle différentiable au point $(1,1)$?

Exercice 41. Soit f et g deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Déterminer la dérivée des fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à partir de f'_x, f'_y, g'_x, g'_y.

1. $t \mapsto F(t) = f(te^{2t}, \ln(1+t^2))$
2. $t \mapsto F(t) = f(g(t, t^{-1}), t^2)$
3. Même question pour $\begin{array}{ccc} G : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & G(x,y) \end{array}$ telle que $G(x,y) = f(xy, g(x,y))$.

Exercice 42. Les fonctions suivantes sont-elles homogènes ? Si oui, de quel degré ?

1. $(x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 + xy + y^2$
2. $(x,y) \mapsto f(x,y) = \dfrac{x}{y}$
3. $(x,y) \mapsto f(x,y) = \ln(xy)$

Exercice 43. Soit $(x,y) \mapsto f(x,y) = x^{1/2}y^{1/3} + 3x^{1/4}y^a$.

1. Pour quelle valeur de a, f est-elle homogène ? Déterminer alors le degré ?
2. Calculer les dérivées partielles de f. Pour quelle valeur de a sont-elles homogènes ? Déterminer alors le degré.

Exercice 44. Démontrer que si f est homogène de degré k, alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $(k-1)$.

Exercice 45. On considère la fonction $f(\cdot)$ qui à (x, y) associe $f(x, y) = x^{1/2}y^{1/2} + 2x^{2/3}y^{1/3}$.

1. Quel est le domaine de définition de cette fonction ?
2. Est-elle homogène ?
3. Déduire de la question 2. une relation entre les dérivées partielles de $f(\cdot)$.
4. Calculer les dérivées partielles de $f(\cdot)$.
5. On considère l'équation $f(x, y) = 3$.
6. Le couple (1,1) est-il solution de cette équation ?

   On suppose qu'il existe une fonction $h(\cdot)$, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, dérivable et telle que $h(1) = 1$ et $f(h(y), y) = 3$.

7. En dérivant la fonction qui à y associe $f(h(y), y)$, et en utilisant l'égalité : $f(h(y), y) = 3$, déduire l'expression de la dérivée de $h(\cdot)$ en fonction de $h(\cdot)$ et des dérivées partielles de $f(\cdot)$. Quelle est la valeur de cette dérivée pour $y = 1$?

8. De même manière qu'à la question précédente, on considère la fonction $k(\cdot)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable et telle que $k(1) = 1$ et $f(x, k(x)) = 3$. Calculer $k(1)$.
9. Quel est le lien entre les fonctions $h(\cdot)$ et $k(\cdot)$?

Exercice 45. (éléments de corrigé)

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$
2. Fonction homogène de degré 1.
3. La fonction est de classe $C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$ on peut donc écrire, $x\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f(x, y)$, il s'agit de la relation d'Euler.
4. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/2} + \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/3}$ et $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/2} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{2/3}$
5. $f(1, 1) = 3$
6. En dérivant par rapport à y et si $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \neq 0$ on obtient,
$$h'(y) = -\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}} = -\frac{\frac{7}{6}}{\frac{11}{6}} = -\frac{7}{11}$$
7. En dérivant par rapport à x et si $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \neq 0$ on obtient,
$$k'(y) = -\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} = -\frac{\frac{11}{6}}{\frac{7}{6}} = -\frac{11}{7}$$

8. Les fonctions $h(\cdot)$ et $k(\cdot)$ sont réciproques l'une de l'autre.

Exercice 46. Soit la fonction $f(\cdot)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ caractérisée par la formule suivante,

$$f(x, y) = y\check{s} + 2xy - 6x$$

1. Donner l'équation de la courbe de niveau définie par l'équation,

$$f(x, y) = f(2, 2) \tag{1}$$

2. Pourquoi peut-on affirmer que cette équation définit, au voisinage de (2,2), une fonction $g(\cdot)$ telle que $f(x, g(x)) = f(2, 2)$?
3. Déterminer $g'(2)$ et l'équation de la tangente en $x = 2$ à la courbe de niveau définie par (1).
4. En remarquant que $f(x, y)$ est un polynôme de degré 2 en y, déterminer $g(x)$ à partir de (1) ; donner son domaine de définition ; retrouver la valeur de $g'(2)$ trouvée en 3..

Exercice 46. (éléments de corrigé)

1. L'équation est $y^2 + 2xy - 6x = 0$.
2. $f(x, y)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y + 2x$, donc $\dfrac{\partial f(2, 2)}{\partial y} = 8 \neq 0$.
   Donc d'après le théorème de des fonctions implicites, $f(x, y) = 0$ définit au voisinage de $(2, 2)$, une fontion $g(\cdot)$ telle que $f(x, g(x)) = f(2, 2) = 0$.
3. Par application du théorème, $g'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} = \dfrac{2y - 6}{2y + 2x}$ donc $g'(2) = -\dfrac{\frac{\partial f(2,2)}{\partial x}}{\frac{\partial f(2,2)}{\partial y}} = 1/4$
   La tangente a pour équation $y = ax + b$, où $a = g'(2)$ et elle passe par $(2, 2)$, donc $b = 3/2$.
4. $\Delta = 4x^2 + 24x = 4(x^2 + 6x)$. Les solutions sont $y_1 = \frac{-2x+\Delta^{1/2}}{2}$ et $y_2 = \frac{-2x-\Delta^{1/2}}{2}$. En remplacant, $y_1 = -x + \sqrt{x^2 + 6x}$ et $y_2 = -x - \sqrt{x^2 + 6x}$. Or, $g(2) = 2$, donc la solution est $y_1 = -x + \sqrt{x^2 + 6x}$. On obtient donc,

$$g'(x) = -1 + \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x}}$$

   on retrouve bien, $g'(2) = 1/4$

Exercice 47. Soit la fonction $f(\cdot)$ définie par,

$$f(x, y) = xe^y - y$$

1. Donner l'équation de la courbe de niveau passant par le point (-1,0).
2. Soit $g(\cdot)$ la fonction implicite dont cette courbe est le graphe. Calculer $g'(-1)$.
3. Après avoir écrit $g'(x)$ à partir des dérivées partielles de $f(\cdot)$ en $(x, g(x))$, déterminer par dérivation de l'expression obtenue la valeur de $g''(-1)$. La fonction $g(\cdot)$ est-elle convexe ou concave en $x = -1$?

4. Donner le développement de Taylor d'ordre 2 de $g(\cdot)$ en x = -1.

Exercice 47. (éléments de corrigé)

1. L'équation de la courbe de niveau est $xe^y - y = -1$.
2. $g'(x) = -\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} = -\frac{e^y}{xe^y - 1}$, $g'(-1) = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$
3.
$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{\left(\frac{\partial^2 f(x,g(x))}{\partial x^2} + g'(x)\frac{\partial^2 f(x,g(x))}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial f(x,g(x))}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 f(x,g(x))}{\partial y \partial x} + g'(x)\frac{\partial^2 f(x,g(x))}{\partial y^2}\right)\frac{\partial f(x,g(x))}{\partial x}}{\left(\frac{\partial f(x,g(x))}{\partial y}\right)^2} \\ &= -\frac{(0 + g'(x)e^y)(xe^y - 1) - (e^y + g'(x)xe^y)e^y}{(xe^y - 1)^2} \\ &= -\frac{g'(x)e^y}{xe^y - 1} + \frac{e^{2y}(1 + g'(x)x)}{(xe^y - 1)^2} \end{aligned}$$

   $g''(-1) = 3/8$ donc g est convexe et elle admet un minimum en $x = -1$

4. $g(x) = \frac{(x+1)}{2} + \frac{3(x+1)^2}{16} + (x+1)^2\epsilon(x+1)$ avec $\lim \epsilon(x+1) = 0$

Exercice 48. On considère la fonction,

$$\begin{aligned} h : \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) \mapsto e^{x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - x_2 + 1} \end{aligned}$$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre un
2. Trouver les points critiques de h.
3. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2. Que remarque t'on pour $\dfrac{\partial^2 h(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$ et $\dfrac{\partial^2 h(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}$? A quel théorème du cours cela correspond t'il ?
4. Calculer le déterminant et la trace de H_f, où H_f est le hessien de f.
5. En déduire la nature de (x_1^*, x_2^*) déterminé à la question 2 ?

Exercice 49. Soit la fonction f définie par,

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 2x - y + 6$$

Déterminer le(s) extrema(s) de f et le(s) caracteriser.

Exercice 49. (éléments de corrigé). La fonction est de classe C^∞ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynômiale, on peut donc déterminer son gradient et son hessien,

$$\bigtriangledown f(x, y) = (4x + 4y + 2, 6y + 4x - 1)$$

Résolvons $\bigtriangledown f(x,y) = (0,0)$ pour déterminer le(s) point(s) critique(s), $X^* = (x^*, y^*)$,

$$\begin{cases} 4x + 4y + 2 &= 0 \\ 4x + 6y - 1 &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, $X^* = (-2, 3/2)$. Déterminons maintenant la nature de ce point critique. Pour cela on écrit le hessien,

$$H(f,X) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice hessienne étant de taille 2×2 pour avoir le signe des valeurs propres il suffit de regarder son déterminant. Det(H)=8 donc les vaps sont de même signe et differentes de 0 et, tr(H)=10 donc les vaps sont positives strictement. On est donc en présence d'un minimum strict, et comme ces résultats ont été trouvé pour tout $X \in \mathbb{R}^2$ il s'agit d'un minimum global strict.

Exercice 50. Soit f la fonction définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par,

$$f(x,y) = (1-x)^n + (1-y)^n + (x+y)^n \qquad n \geq 2$$

.

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
2. En déduire que le seul point en lesquelles les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément est le point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
3. Démontrer que f présente un minimum local en ce point.

Exercice 50. (éléments de corrigé)

1. Il est clair que la fonction f est de classe C^2 sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ en tant que fonction polynômiale, on peut donc déterminer son gradient et sa matrice hessienne.
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -n(1-x)^{n-1} + n(x+y)^{n-1}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -n(1-y)^{n-1} + n(x+y)^{n-1}$
Ainsi,
$$\bigtriangledown f(X) = \left(-n(1-x)^{n-1} + n(x+y)^{n-1}, -n(1-y)^{n-1} + n(x+y)^{n-1}\right)$$
2. On résout directement le système, en tenant compte que $a^{n-1} = b^{n-1} \Leftrightarrow a = b$ lorsque a et b sont positifs (ce qui est le cas pour x et y), on a
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -n(1-x)^{n-1} + n(x+y)^{n-1} = 0 \\ -n(1-y)^{n-1} + n(x+y)^{n-1} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(1-x)^{n-1} + (x+y)^{n-1} = 0 \\ -(1-y)^{n-1} + (x+y)^{n-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^{n-1} = (x+y)^{n-1} \\ (1-y)^{n-1} = (x+y)^{n-1} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = x+y \\ 1-y = x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 1 \\ 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

3. Le point $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ étant un point critique de f (il annule les deux dérivées partielles d'ordre 1), et $]0,1[\times]0,1[$ étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on doit déterminer les dérivées partielles du second ordre au point $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = n(n-1)(1-x)^{n-2} + n(n-1)(x+y)^{n-2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = n(n-1)(x+y)^{n-2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = n(n-1)(1-y)^{n-2} + n(n-1)(x+y)^{n-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = 2n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = 2n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$H\left(f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right) = \begin{pmatrix} 2n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} & n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\ n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} & 2n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \end{pmatrix}$$

et donc,

$$\begin{aligned} Det(H\left(f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right)) &= \left[2n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]^2 - \left[n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]^2 \\ &= 4n^2(n-1)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-4} - n^2(n-1)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-4} \\ &= 3n^2(n-1)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-4} > 0 \end{aligned}$$

ce qui implique que le point $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ est un extrémum local de f sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$
Ensuite, $Tr\left(H\left(f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right)\right) = 4n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} > 0$ donc le point $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ est un minimum local de f sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$.

Exercice 51. Soit $g(x) = \ln\ln x$.

1. Donner le domaine de définition de g.
2. Montrer que g est concave sur son domaine de définition.
3. En déduire l'inégalité

$$\forall a > b > 1, \quad \ln\frac{a+b}{2} > \sqrt{\ln a \ln b}.$$

Exercice 51. (éléments de corrigé)

1. $D_g =]1, +\infty[$.
2. La fonction g est une composé de fonction ln elle est donc dérivable sur l'ouvert D_g et, $g'(x) = \frac{1}{x \ln x}$. $g''(x) = \frac{-(\ln(x)+1)}{(x \ln x)^2} < 0$ car $\ln(x) + 1 > 1 > 0$. Donc g est strictement concave sur $]1, +\infty[$.
3. Par concavité, on a $g\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{g(a)+g(b)}{2}$, autrement dit $\ln\left(\ln \frac{a+b}{2}\right) > \frac{\ln(\ln a)+\ln(\ln b)}{2} = \ln((\ln a \ln b)^{1/2})$. On prend l'exponentielle et on obtient $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) > (\ln a \ln b)^{1/2}$.

3 Annales.

3.1 Interrogations 1.

3.1.1 Interrogation du 23 février 2012 - A. FAUTH

Questions de Cours.

1. Donner la définition d'une application linéaire.
2. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel.

Exercice I.

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ définie par,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant et la trace de la matrice A.
2. Calculer A^{-1}, la matrice inverse de A.
3. Déterminer l'application linéaire f (on calculera $f(x, y, z)$) associée à A, sa matrice représentative dans la base canonique de départ et d'arrivée.
4. Déterminer le noyau, l'image et le rang de l'application f.
5. L'application f est elle injective, surjective, bijective ?
6. Sous quel critère l'application linéaire f admet-elle une application réciproque ? Si ce critère est vérifié, la déterminer explicitement.

Exercice II.

1. Montrer que si la famille de vecteurs $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est liée, alors $\{f(u_1), \cdots, f(u_n)\}$ avec f une application linéaire quelconque, est liée.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, en s'appuyant sur le théorème du rang, montrer que si $\dim(E) \neq \dim(F)$, alors f ne peut pas être bijective.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, montrer que pour tout $u, v \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si $f(\alpha u+v) = \alpha f(u)+f(v)$, alors $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$.

3.1.2 Interrogation du 23 février 2012 - Correction

Exercice I.

1. $\det(A) \equiv |A| = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(3 \times 1 - 2 \times 1) = 1$
   $\mathrm{tr}(A) = 1 + 3 + 1 = 4$
2. $|A| \neq 0$, donc la matrice A est inversible et $A^{-1} = |A|^{-1} C_A^t$, où C_A est la comatrice de A.
   $C_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C_A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{1} C_A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
   Remarque : On vérifie bien que $AA^{-1} = I_{3\times 3}$.

3. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors,
   $\begin{cases} f(e_1) & = e_1 \\ f(e_2) & = -5e_1 + 3e_3 + 2e_2 \\ f(e_3) & = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,0,0) & = (x,0,0) \\ f(0,y,0) & = (-5y, 3y, 2y) \\ f(0,0,z) & = (-z, z, z) \end{cases}$
   en sommant toutes les lignes, $f(x,y,z) = (x - 5y - z, 3y + z, 2y + z)$.

   De manière plus simple, on pouvait écrire, $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - 5y - z, 3y + z, 2y + z)$.
4. $\mathrm{Ker} f = \{(x,y,y) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (0,0,0)\}$, on cherche donc à resoudre le système,

   $$\begin{cases} x - 5y - z & = 0 \\ 3y + z & = 0 \\ 2y + z & = 0 \end{cases}$$

   on trouve, $x = y = z = 0$, ainsi, $\mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
   $\mathrm{Im} f = \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \{(1,0,0), (-5,3,2), (-1,1,1)\}$. Le théorème du rang nous indique que $\dim(\mathrm{Im} f) = 3$, donc le système est libre, pas besoin de vérifier.
5. Le noyau est de dimension zero, donc l'application est injective, l'image est de dimension 3, donc égale à l'espace de départ de l'application, donc surjective et donc bijective.
6. f admet une application réciproque si elle est bijective, ce qui a été montré à la question précédente. Déterminons simplement sa réciproque,

$$f^{-1}(x,y,z) = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + 3y - 2z, y - z, -2y + 3z)$$

Exercice II.

1. Fait en TD
2. Si f est une application linéaire de E dans F bijective, alors son noyau est de dimension 0 et la dimension de l'image est égale à la dimension de l'espace d'arrivée, dim(Imf)=dim(F). Le théorème du rang nous dit quant à lui que,

$$\dim(\mathrm{Ker}f)+\dim(\mathrm{Im}f)=\dim(E)$$

   donc dim(Imf)=dim(E) et dim(Imf)=dim(F), donc dim(E)=dim(F).
3. On sait que pour tout $u, v \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$, donc en particulier pour $v' = \beta v \in E$,

$$\begin{aligned} f(\alpha u + v') &= \alpha f(u) + f(v') \\ &= \alpha f(u) + f(\beta v) \\ &= \alpha f(u) + f(\beta v + 0_E) \\ &= \alpha f(u) + \beta f(v) + f(0_E) \end{aligned} \tag{3.1}$$

   de plus,

$$\begin{aligned} f(0_E) &= f(-1u + u) \\ &= -f(u) + f(u) \\ &= 0_F \end{aligned} \tag{3.2}$$

   donc en utilisant (1) et (2) on a bien l'implication, si $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$, alors $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$.

3.1.3 Interrogation du 14 mars 2011 - A. FAUTH

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer l'application linéaire f (on calculera $f(x, y, z)$) associée à A sa matrice dans la base canonique de départ et d'arrivée ainsi que son noyau et son image.
2. Après avoir rappelé, et vérifié, le critère d'existence de l'application réciproque de f, donner sa matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de départ et d'arrivée.

Exercice 2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (2x + y, x - z, x + z)$, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}$ la base définie par $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\} = \{(1, 1, 0), (2, 1, -1), (1, 2, 0)\}$. Définir la matrice $A_{\mathcal{E}}$ représentative de f dans la base $\mathcal{E}$ de départ et d'arrivée et $A_{\mathcal{F}}$ de f dans la base $\mathcal{F}$ de départ et d'arrivée. Expliquez toutes les étapes.

Exercice 3. *les questions sont indépendantes*

1. Qu'appelle-t-on polynôme caractéristique d'une matrice $n \times n$? D'une application linéaire de f ?

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. On suppose que quelque soit la valeur de λ, $P(\lambda)$, le polynôme caractéristique de f, ne s'annule pas. En expliquant votre raisonnement, que pouvez-vous en déduire sur la nature de f, injective, surjective, bijective ?
3. Soit g une application linéaire de E dans F. Quel lien existe-t-il entre $K = \{x \in E/g(x) = 0_F\}$ et $g^{-1}(\{0_F\})$?

3.1.4 Interrogation du 18 mars 2010 - A. FAUTH

Questions de cours.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ base de E, et $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ une famille de n vecteurs quelconques de F tel que $f(\vec{e}_i) = \vec{v}_i$, $i = 1, \cdots, n$.
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit surjective.
   (b) Démontrer que si f est surjective, alors $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ est générateur de F.

Exercice 1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = (-x+3z, -2x+y+3z, -x+y+2z) \end{array}$.

1. (a) Déterminer A la matrice représentative de f quand on choisi $\mathcal{B}$ la base canonique (départ et arrivée).
   (b) Calculer le déterminant de A. Définir Ker$f$, Imf. Quel est le rang de f ? f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. On considère les vecteurs $\vec{i} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{j} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{k} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Exprimer $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$ dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Déterminer A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ (départ et arrivée).
   (d) Déterminer P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   (e) Calculer P^{-1}, que représente cette matrice ?.
   (f) Déterminer à l'aide de la formule faisant intervenir les matrices P et P^{-1} la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ de l'espace de depart et $\mathcal{B}'$ de l'espace d'arrivé.

Exercice 2. (les trois questions sont indépendantes)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et A un endomorphisme sur E tel que Imf $\subseteq$Ker$f$. Montrer que rang$f \leq \frac{1}{2}$dim$E$
2. Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que, Ker$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 = 3x_3 \text{ et } x_2 = -x_4\}$. Montrer que T est surjective.
3. Soit f un isomorphisme. Montrer que $f(0) = 0$ en précisant la nature des "0".

3.1.5 Interrogation du 18 mars 2010 - Correction

Questions de cours.

1. (a) f est surjective si dimIm(f)=dim$F$.

   (b) Comme Imf=sev$\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$, on a Im$f = F$ si et seulement si $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n)$ est une famille génératrice de F.

Exercice 1.

1. (a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) det(A)=$-1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$$\begin{aligned} Kerf &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } f(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \left\{\begin{array}{ll} -x+3z & = 0 \\ -2x+y+3z & = 0 \\ -x+y+2z & = 0 \end{array}\right. \} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \left\{\begin{array}{ll} x & = 0 \\ y & = 0 \\ z & = 0 \end{array}\right. \} \end{aligned}$$

   Ker$f = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$, dimKer$f$=0, f injective.
   Théorème du rang, dimKer$f$+dimImf=dim$\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$ dimImf=rg$f$=3 et, f surjective.
   Imf=vec$\{(-1,-2,-1),(0,1,1),(3,3,2)\}$.
   f est bijective.

2. (a) $C = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $|C| = -1 \neq 0$, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) $\left\{\begin{array}{ll} f(\vec{i}) & = f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) \\ f(\vec{j}) & = f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) \\ f(\vec{k}) & = f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} f(\vec{i}) & = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ f(\vec{j}) & = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ f(\vec{k}) & = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \end{array}\right.$

   et comme,
   $\left\{\begin{array}{ll} \vec{i} & = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{j} & = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{k} & = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \vec{e}_1 & = \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{e}_2 & = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{e}_3 & = -\vec{i} + \vec{j} \end{array}\right.$

   on obtient, $\left\{\begin{array}{ll} f(\vec{i}) & = -\vec{i} \\ f(\vec{j}) & = 2\vec{j} \\ f(\vec{k}) & = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \end{array}\right.$

   (c) on en déduit directement que $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $|P| = -1 \neq 0$ donc P est inversible. $C_P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = C_P^t$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Il s'agit de la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

(f)
$$\begin{aligned} A' = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

Exercice 2.

1. $\mathrm{Im}f \subseteq \mathrm{Ker}f \implies \dim\mathrm{Im}f \leq \dim\mathrm{Ker}f$, donc $\dim\mathrm{Ker}f + \dim\mathrm{Im}f \leq 2\dim\mathrm{Im}f$, et par le théorème du rang,
   $\dim\mathrm{Ker}f + \dim\mathrm{Im}f = \dim E \leq 2\ \dim\mathrm{Im}f = 2\mathrm{rg}f$.
2. $$\begin{aligned} \mathrm{Ker}T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 = 3x_3 \text{ et } x_2 = -x_4\} &= \{(x_1, x_2, \frac{2}{3}x_1, -x_2),\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{vec}\{(1, 0, \frac{2}{3}, 0), (0, 1, 0, -1)\} \end{aligned}.$$
   Donc $\dim\mathrm{Ker}T = 2$ et par le théorème du rang, $\dim\mathrm{Im}T = 2 = \dim\mathbb{R}^2$ et l'application est bien surjective.
3. f est un isomorphisme, donc linéaire et bijectif de E dans F et, pour tout $x \in E$, $f(0_E) = f(0_E \times x) = 0_F f(x) = 0_F$.

3.2 Interrogations 2.

3.2.1 Interrogation du 30 Avril 2011 - A. FAUTH, J. P. LECA

Exercice 1. $\begin{array}{rl} B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (X,Y) & \mapsto B(X,Y) \end{array}$ désigne une forme bilinéaire symétrique et $\begin{array}{rl} q : \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ X & \mapsto q(X) \end{array}$ désigne la forme quadratique associée à B.

Démontrer les égalités suivantes :

$$B(X,Y) = \frac{1}{4}[q(X+Y) - q(X-Y)] \tag{1}$$

$$q(X+Y) + q(X-Y) = 2q(X) + 2q(Y) \tag{2}$$

Exercice 2. Soit la forme quadratique $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définit par $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$.

1. Définir la matrice $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ représentative de q dans la base canonique.
2. Donner la forme bilinéaire $B(X,Y)$ associé à q avec $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
3. La forme quadratique est elle définie positive, semi-définie positive, etc. ?
4. Déterminer le degré d'homogénéité de q et vérifier le théorème d'Euler.

Exercice 3. Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui vérifie l'égalité (2) de l'exercice 1. et $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui vérifie l'égalité (1) de l'exercice 1.

1. Démontrer que,
   (a) $q(\vec{0}_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{R}}$
   (b) $q(X) = q(-X)$
   (c) $q(2X) = 4q(X)$
   (d) * $B(X+X', Y) = B(X,Y) + B(X',Y), \quad \forall X, X', Y \in \mathbb{R}^2$
2. B est-elle bilinéaire ? Symétrique ? Si non, que manque-t-il à q ?
3. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (et plus généralement $q : E \to \mathbb{R}$ où E est un $\mathbb{R}$.e.v.) soit la forme quadratique d'une forme bilinéaire symétrique

3.2.2 Interrogation du 15 mai 2010 - A. FAUTH

Question de cours. Soit B une forme bilinéaire symétrique sur le $\mathbb{R}$.*e.v.* E.

1. Donner la définition de
   (a) q forme quadratique associée à B.
   (b) q semi-définie positive.
   (c) q définie positive.
2. Soit $x \in E$, $y \in E$.
   (a) Trouver une relation entre $B(x, y)$ et $[q(x + y) - q(x - y)]$
   (b) Connaissant B, connait-on q ?
   (c) Connaissant q, connait-on B ?

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Pour $x = (x_1, x_2) \in E$, on considère la forme quadratique $q : E \to \mathbb{R}$ telle que $q(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2$.

1. Déterminer la matrice B représentative de q dans E.
2. La forme quadratique est-elle définie positive, semi-définie positive, définie négative, semi-définie négative ?
3. Diagonaliser la matrice B. En déduire la forme réduite de q.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Pour $x = (x_1, x_2) \in E$, on considère l'application $x \mapsto ||x|| = \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2}$ et la norme $||x||_3 = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

1. Rappeller les assertions que doivent vérifier $|| \cdot ||$ et $|| \cdot ||_3$ pour être des normes de E.
2. Montrer que $||x|| = \sqrt{< x|x >}$ où $< x|y >$ désigne un p.s. que l'on déterminera. En déduire que $x \mapsto ||x||$ est une norme (on ne demande pas de démonstration).
3. * Déterminer $m > 0$ et $M > 0$ tels que $m||x||_3 \leq ||x|| \leq M||x||_3$ pour $x \in E$. Que peut-on alors dire de $|| \cdot ||$ et $|| \cdot ||_3$?

Exercice 3. Soit la fonction $g : (x, y) \mapsto \exp(x^2 + 3y) + \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction g.
3. Déterminer le gradient de g.
4. Déterminer la matrice hessienne de g (préciser le domaine).
5. Cette matrice est-elle symétrique ? Justifier (on citera le théorème correspondant).

3.2.3 Interrogation du 15 mai 2010 - Correction

Il ne s'agit pas à proprement parlé d'une correction, mais juste de quelques commentaires faits aux étudiants ayant passé l'examen, ils vous seront certainement utiles.

Exercice 1.

1. $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
2. *Il suffisait de calculer le determinant et la trace pour obtenir la nature de la matrice.*
3. *La forme réduite est la forme factorisé en carré de q, il ne fallait donc pas la redevelopper. Soyez critique envers vos résultats, si une fois developpé vous ne trouvez pas le même résultat que dans l'ennoncé c'est qu'il y à un problème !*

Exercice 2.

1. *En général su, mais soyez plus rigoureux,* $||\vec{x}|| = 0 \implies \vec{x} = \underline{0_E\ \forall x \in E}$,... $\underline{\lambda \in \mathbb{R}...}$
2. $< x|x >=< (x_1, x_2), (x_1, x_2) >= (x_1|x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} (x_1, x_2)^t$ *et certainement pas* $(x_1, 2x_2)$ *comme TOUT le monde a écrit, cela n'a aucun sens !*
3. * $m = 1$, $M = \sqrt{5}$, *plutot simple non ? PERSONNE n'a trouvé...*

Exercice 3.

1. $D_g = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
2. $D_g = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, *c'est un* <u>*ouvert*</u>.
3. $\underline{\nabla f(x, y)} = \cdots$ *Apprenez les notations !*
4. <u>*préciser le domaine*</u>. *Vous ne savez pas lire ? presque personne n'a répondu ! ! il s'agissait tout simplement de* $D_g = D_{g'} = D_{g''}$
5. *Un "oui" ou "non" n'a aucun interet.*

3.2.4 Interrogation du 7 mai 2009 - A. FAUTH

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}=(e_1, e_2, e_3)$ est

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. f est elle injective, surjective, bijective ?
2. Montrer que $f(e_1) = e_1$, $f(e_1 + e_2) = 2(e_1 + e_2)$ et $f(e_1 + e_2 + e_3) = 3(e_1 + e_2 + e_3)$.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ où $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1 + e_2$ et $e_3' = e_1 + e_2 + e_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer les matrices de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et Q de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
5. Donner (de deux manières différentes si possible) la matrice $A_{\mathcal{B}'}$ représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Calculer $A_{\mathcal{B}}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Soit q une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $q(x, y, z) = 7x^2 + 25y^2 + 7z^2 + 48xz$.

1. Donner la matrice symétrique A associée telle que $q(X) = X^t AX$ avec $X \in \mathbb{R}^3$.
2. Donner la forme bilinéaire $b(X, Y)$ associée à la forme quadratique $q(X)$ où $X, Y \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.
4. Déterminer une matrice orthonormale P telle que $P^t AP$ soit diagonale.
5. Donner la forme réduite de q.
6. La forme quadratique q est-elle définie positive, négative, semi-définie postive, négative, indéfinie ?

Exercice 3 (facultatif). Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\det(\lambda A)=\lambda\det(A)$.
2. Si un endomorphisme n'a pas de valeur propre, alors il est inversible.
3. Si f et g sont deux formes linéaires, alors $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire.

3.3 Partiels.

3.3.1 Partiel du 9 mai 2012 - J. P. LECA

Soit $(\mathcal{M}(2,2),=,+,\cdot)$ le $\mathbb{R}$ev des matrices 2×2 à coefficient dans $\mathbb{R}$. On notera $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots 2}$, ou plus simplement $A=(a_{ij})$ ou encore $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ les éléments de $\mathcal{M}(2,2)$. A l'aide des notions vues en cours on va définir une norme sur $\mathcal{M}(2,2)$ puis se poser la question : 'soit A une matrice, quelle est, si elle existe, la matrice diagonale D 'la plus proche de A' au sens de cette norme ?'

Partie I. Préliminaires : les applications φ (transposition) et ψ (trace).

1. Soit $\begin{array}{rl} \varphi : \mathcal{M}(2,2) & \to \mathcal{M}(2,2) \\ A & \mapsto \varphi(A) = A^T \end{array}$, la matrice transposée de A. Montrer que φ est linéaire.
2. Soit $\begin{array}{rl} \psi : \mathcal{M}(2,2) & \to \mathbb{R} \\ A=(a_{ij}) & \mapsto \psi(A) = a_{11}+a_{22} \end{array}$, la trace de A.
   (a) Montrer que ψ est linéaire.
   (b) Montrer que ψ est surjective.
   (c) Via le théorème du rang, calculer dim Ker ψ.
   (d) Montrer que $\psi(A)=\psi(A^T)$.

Partie II. Produit Scalaire sur $\mathcal{M}(2,2)$.

Soit $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}(2,2)$, on définit l'application $\mathcal{B}$ des variables A et B telle que :

$$\begin{array}{rl} \mathcal{B} : \mathcal{M}(2,2)\times\mathcal{M}(2,2) & \to \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto \mathcal{B}(A,B) = \mathrm{trace}(A^T\times B) \end{array}$$

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0\end{pmatrix}$, calculer, $\mathcal{B}(A,B)$, $\mathcal{B}(B,A)$, $\mathcal{B}(B,C)$, $\mathcal{B}(A,A)$.
2. Soit A,B,C trois matrices de $\mathcal{M}(2,2)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Démontrer les égalités suivantes à partir des résultats de la partie I.
   (a) $\mathcal{B}(A,B+C)=\mathcal{B}(A,B)+\mathcal{B}(A,C)$.
   (b) $\mathcal{B}(A,\lambda B)=\lambda\mathcal{B}(A,B)$.
   (c) $\mathcal{B}(A,B)=\mathcal{B}(B,A)$.
3. En déduire que $\mathcal{B}$ est une forme bilinéaire symétrique.
4. Soit $A=(a_{ij})$, calculer $\mathcal{B}(A,A)$.
5. En déduire que $\mathcal{B}$ est définie positive.
6. Conclure que $\mathcal{B}$ est un produit scalaire et dire pourquoi.

Partie III. Norme sur $\mathcal{M}(2,2)$.

On note désormais $\mathcal{B}(A,B) =< A|B >$ le produit scalaire $\mathcal{B}$ et $||A|| = \sqrt{< A|B >}$ la norme de la matrice A. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, une matrice diagonale quelconque de $\mathcal{M}(2,2)$. On introduit f, l'application :

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto f(x,y) = ||A-D||^2 \end{aligned}$$

1. Montrer que $f(x,y) = (1-x)^2 + (4-y)^2 + 13$.
2. Déterminer le(s) extremum(s) de f, min, max, local, gobal, strict, non strict ?
3. En déduire que $\forall D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ matrice diagonale,

$$||A - D_*|| \leq ||A - D|| \quad \text{où } D_* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

D_* est-elle bien la matrice cherchée : 'diagonale et la plus proche de A au sens de la norme' ?

Partie IV. Diagonalisation.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que A est 'diagonalisable' au sens de l'algèbre linéaire et définir ses valeurs propres.
2. Comparer la matrice 'diagonale' de l'algèbre linéaire avec la matrice D_* de la partie III trouvée.

Partie V. Commentaires.

'Diagonaliser' une matrice A au sens de l'algèbre linéaire n'a rien à voir avec trouver la matrice diagonale 'la plus proche' de A au sens d'une norme issue d'un produit scalaire.

Vrai ou Faux ? Vos commentaires ! Voire des questions qui vous interpellent sur le sujet !

3.3.2 Partiel du 9 mai 2012 - Correction

Partie I. Préliminaires : les applications φ (transposition) et ψ (trace).

1. $\varphi(A+\lambda B) = (A+\lambda B)^T = A^T + (\lambda B)^T = A^T + \lambda B^T = \varphi(A) + \lambda B^T$ d'où $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(2,2), \mathcal{M}(2,2))$.
2. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$
   (a)
$$\begin{aligned}\psi(A+\lambda B) &= \psi((a_{ij}) + \lambda(b_{ij}))\\ &= \psi(a_{ij} + \lambda b_{ij})\\ &= a_{11} + \lambda b_{11} + a_{22} + \lambda b_{22}\\ &= (a_{11} + a_{22} + \lambda(b_{11} + b_{22}))\\ &= \psi(A) + \lambda\psi(B)\end{aligned}$$
   d'où $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(2,2), \mathbb{R})$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}$, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $\psi(A) = x$, d'où ψ surjective.
   (c) Le théorème du rang dit : dimψE+dim KerψE=dim E, ici $E = \mathcal{M}(2,2)$, dim$E$=4, $\psi(E) = \mathbb{R}$ d'après (b), et dim$\mathbb{R} = 1$ d'où dim Kerψ=4-1=3.
   (d) Les matrices A et A^T ont la même diagonale d'où $\psi(A) = \psi(A^T)$

Partie II. Produit Scalaire sur $\mathcal{M}(2,2)$.

1. $\mathcal{B}(A,B) = 27, \mathcal{B}(B,A) = 27, \mathcal{B}(B,C) = 0_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(A,A) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$
2. (a)
$$\begin{aligned}\mathcal{B}(A, B+C) &= \mathrm{tr}(A^T \times (B+C))\\ &= \psi(A^T \times (B+C))\\ &= \psi(A^T \times B + A^T \times C)\\ &= \psi(A^T \times B) + \psi(A^T \times C)\\ &= \mathcal{B}(A,B) + \mathcal{B}(A,C)\end{aligned}$$
   (b)
$$\begin{aligned}\mathcal{B}(A, \lambda B) &= \psi(A^T \times \lambda B) = \psi(\lambda A^T B)\\ &= \lambda\psi(A^T \times B) = \lambda\mathcal{B}(A,B)\end{aligned}$$
   (c)
$$\begin{aligned}\mathcal{B}(A,B) &= \psi(A^T \times B)\\ &= \psi((A^T \times B)^T)\\ &= \psi(B^T \times A) = \mathcal{B}(B,A)\end{aligned}$$
3. $\mathcal{B}$ est symétrique (2. (c)), linéaire par rapport à la deuxième variable (2. (a) et (b)), donc linéaire aussi par rapport à la première variable. Conclusion, $\mathcal{B}$ est bilinéaire.
4. $\mathcal{B}(A,A) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2$
5. On déduit de l'égalité ci-dessus : $\forall A = (a_{ij})$, $\mathcal{B}(A,A) \geq 0_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{B}(A,A) = 0_{\mathbb{R}} \implies a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} \implies A = 0_{\mathcal{M}(2,2)}$

6. $\mathcal{B}$ forme bilinéaire définie positive est donc un produit scalaire et $(\mathcal{M}(2,2), =, +, \dot{}\ <\dot{}\ ;\dot{}>)$ est un $\mathbb{R}$e.v. euclidien avec $||\dot{}||$ et $\perp$.

Partie III. Norme sur $\mathcal{M}(2,2)$.

1. $f(x,y) =< A-D, A-D >= \mathcal{B}(A-D, A-D)$ et $A-D = \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 4-y \end{pmatrix}$, d'où d'après II 4. (ou par simple calcul) : $f(x,y) = (1-x)^2 + 2^2 + 3^2 + (4-y)^2$.
2. $\frac{\partial f}{\partial x} = -2(1-x)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2(4-y)$ d'où (1,4) point candidat à l'extremum.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2} = 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

d'où la mtrice hessienne au point (1,4) : $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, matrice définie positive : conclusion, (1,4) est un minimum, c'est à dire :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(1,4) \leq f(x,y)$ et (1,4) est un minimum global.
3. $||A - D_*||^2 = 2^2 + 3^2 = f(1,4)$, $||A - D||^2 = f(x,y)$ d'où, d'après la question 2, $\forall D$ matrice diagonale de $\mathcal{M}(2,2)$, $||A - D_*||^2 \leq ||A - D||^2$ et enfin, $||A - D_*|| \leq ||A - D||$ car la norme $||\dot{}||$ est par définition positive et la fonction $\sqrt{}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Conclusion, D_* est bien la matrice cherchée, la plus proche de A.

Partie IV. Diagonalisation.

Le polynome caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $P_A(\lambda)$ =det$(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$ avec $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$. $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda_1 & = \frac{5+\sqrt{33}}{2} \\ \lambda_2 & = \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{matrix}$. $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ donc A est diagonalisable et sa matrice digonale est $D_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ qui n'a rien à voir avec sa matrice diagonale 'approchée' de la partie III.

Partie V. Commentaires.

Ces deux notions n'ont rien à voir.

3.3.3 Partiel du 22 juin 2012 - J. P. LECA

Partie Algèbre

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer les valeurs propres de A.
   (b) Définir $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ les vecteurs propres associés aux valeurs propres.
   (c) Montrer que A est diagonalisable et définir D sa matrice diagonale.
2. Soit $\mathcal{E} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ la base propre déterminée en 1. (a).
   (a) Définir P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$.
   (b) Définir la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{E}$.
   (c) Montrer que $A = PDP^{-1}$.
   (d) En déduire le calcul simple de A^n, $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Calculer D^{-1} la matrice inverse de D matrice diagonale trouvée en 1. (c).
   (b) En déduire, à partir de la relation $A = PDD^{-1}$, le calcul de A^{-1}, calcul que l'on explicitera.
4. En vous inspirant des résultats ci-dessus montrez qu'une matrice A est inversible si et seulement si A n'a pas de valeur propre nulle.

Partie Analyse.

$$\text{Soit} \quad \begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto f(x, y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2 \end{array}$$

1. Calculer toutes les dérivées partielles premières et secondes de f, que l'on notera $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, etc.
2. Où sont les min, max, si il y en a.

3.3.4 Partiel du 22 juin 2012 - Correction

Partie Algèbre

1. Valeurs propres : $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1$ et vecteurs propres respectifs, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, A diagonalisable car $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ ou bien car valeurs propres 'toutes simples' (Th. du cours). Enfin, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, matrice diagonale de A.
2. $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}$ et $P_{\mathcal{F}\to\mathcal{E}} = P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{E}$. Enfin, $A = PDP^{-1}$ comme cela est dit et démontré en cours ou encore vérification par le calcul pour les inquiets. On en déduit, $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   N.B. On profitera des vacances pour faire le calcul effectif de A^n.
3. $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$
4. Si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ matrice diagonale de A telle que $A = PDP^{-1}$ alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}A =& \mathrm{Det}P \times \mathrm{Det}D \times DetP^{-1} \\ =& a\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \times 1/a, \;\; a \neq 0 \text{ car } P \text{ inversible} \\ =& \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \Leftrightarrow \lambda_1 \neq 0 \text{ et } \lambda_2 \neq 0 \text{ et } \lambda_3 \neq 0 \end{aligned}$$

Partie Analyse.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2x - 6y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y - 6x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6$
2. Points candidats, $(x_0, y_0) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = & 0 \end{cases}$ d'où le système d'équation,

$$\left\{\begin{array}{rl} 4x^3+2x-6y= & 0 \\ 6y-6x= & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} y= & x \\ 4x^3+2x-6y= & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} y= & x \\ 4x^3-4x= & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} y= & x \\ 4x(x^2-1)= & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} y= & x \\ 4x(x-1)(x+1)= & 0 \end{array}\right.$$

d'où trois points candidats (x_0, y_0) :

$$A=(0,0),\;\; B=(1,1),\;\; C=(-1,-1)$$

Pour $A=(0,0)$, la matrice Hessienne est $H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$, det<0, tr>0, donc ni min ni max, il s'agit d'un point selle.
Pour $B=(1,1)$, la matrice Hessienne est $H_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$, det>0, tr>0, donc min.
Pour $C=(-1,-1)$, la matrice Hessienne est $H_{(-1,-1)} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$, det>0, tr>0, donc min.

3.3.5 Partiel du 10 mai 2011 - A. FAUTH, J. P. LECA

Problème I. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice, $J_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

Partie I. cas $\alpha = 1$

1. Déterminer le rang de la matrice J_1
2. Cette matrice J_1, est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ? (Donner les arguments précis)
3. Déterminer les valeurs propres de la matrice J_1.
4. Déterminer les valeurs propres associés.
5. Déduire de 4. et 5. que J_1 est diagonalisable.

Partie II. cas $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer J_α en fonction de J_1 et I_3, la matrice identité d'ordre 3.
2. En déduire les valeurs propres de J_α.
3. J_α est-elle diagonalisable ?
4. Expliciter sa matrice diagonale dans la base propre trouvée.

Problème II. Le West Texas Intermediate (WTI) est le baril de pétrole coté au New-York Mercantile Exchange (bourse des matières premières de New-York). Les variations de prix dépendent de nombreux facteurs, par exemple le taux de change €/\$, le cours du Brent (baril coté à la bourse londonienne), etc. Notons $y \in \mathbb{R}^+$ le prix du WTI d'aujourd'hui et, $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, respectivement le taux de change €/\$ et le prix du Brent d'aujourd'hui.

Partie I. Une manière d'écrire le prix du WTI en fonction du taux de change et du prix du Brent est,

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \tag{1}$$

On peut réecrire l'équation (1) sous forme matricielle, avec $\beta = (\beta_1, \beta_2)$,

$$y = \beta X^t \tag{2}$$

1. Expliciter l'équation (2).
2. Pour déterminer les β_i, $i = 1, 2$, on cherche à minimiser $f(\beta) = ||y - \beta X^t||_2^2$, avec $|| \cdot ||_2$ la norme euclidienne, on écrit ce problème $\mathcal{P}$ sous la forme,

$$\mathcal{P} : \quad \min_\beta ||y - \beta X^t||_2^2$$

   (a) Interpreter pourquoi les β sont déterminés en resolvant $\mathcal{P}$.
   (b) Montrer que la solution du problème $\mathcal{P}$, i.e. le β qui minimise $f(\beta)$, noté β^* est, $\beta^* = (X^tX)^{-1}X^ty$, vérifier qu'il s'agit bien d'un minimum (local, global, strict, non-strict ?).

3. Pour déterminer les β_i, $i = 1, 2$, on peut également resoudre le problème $\mathcal{P}'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\mathcal{P}' : \quad \min_{\beta}\{||y - \beta X^t||_2^2 + \lambda||\beta||_2^2\}$$

   (a) Résoudre le problème $\mathcal{P}'$.

   (b) * Il s'agit en fait du lagrangien d'un problème sous contrainte, quel est ce problème associé ?

Partie II.* On cherche à améliorer la qualité de notre modèle, on rajoute les variables macroéconomiques à la matrice X, on a donc $X = (1, x_1, x_2, \cdots, x_N)$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_N)$ et,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_N x_N \Longleftrightarrow y = \beta X^t \tag{3}$$

1. Bien sûr, toutes les variables macroéconomiques auxquelles on peut penser ne seront certainement pas toutes "utiles" pour ameliorer la qualité de notre modèle. En fait, nous n'avons jamais, $y = \beta X^t$ mais, $y = \beta X^t + \epsilon$ où ϵ est la partie non expliqué par le modèle, le terme d'erreur. On notera alors maintenant $\tilde{y} = \beta X^t$ pour bien faire la différence entre le résultat de notre modèle et la réalité. Une manière de déterminer la qualité du modèle est de faire le modèle (3) sur plusieurs jours, pour $t = 1, 2, \cdots, T$, avec $x_i(t)$ la variable x_i à l'instant t,

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}(1) \\ \tilde{y}(2) \\ \vdots \\ \tilde{y}(T) \end{pmatrix} = \beta_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_1(2) \\ \vdots \\ x_1(T) \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} x_2(1) \\ x_2(2) \\ \vdots \\ x_2(T) \end{pmatrix} + \cdots + \beta_N \begin{pmatrix} x_N(1) \\ x_N(2) \\ \vdots \\ x_N(T) \end{pmatrix}$$

   et de calculer le coefficient de détermination, R^2, définit par,

$$R^2 = \frac{||\tilde{Y} - \bar{Y}||_2^2}{||Y - \bar{Y}||_2^2}, \qquad \text{avec } \bar{Y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y(t), \text{ la moyenne des } y(t)$$

   (a) Dans quel cas a-t-on $R^2 = 0$? Interpreter.

   (b) Dans quel cas a-t-on $R^2 = 1$? Interpreter.

2. Proposer une variable macroéconomique susceptible d'expliquer une partie du cours du WTI.

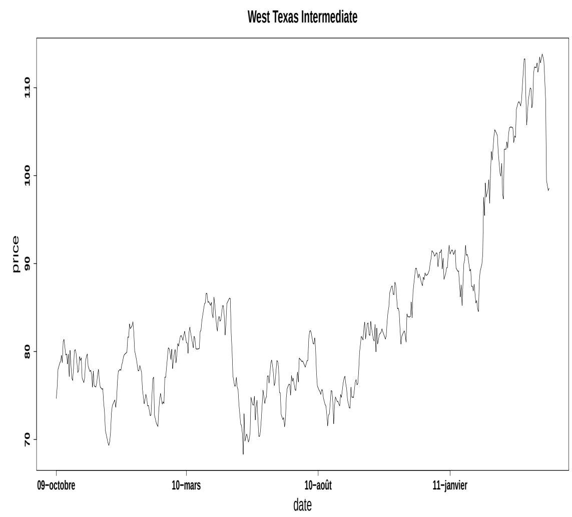


FIGURE 1 – Cours journalier du WTI à la cloture des marchés, du 13 octobre 2009 au 9 mai 2011.

3.3.6 Partiel du 10 mai 2011 - Correction

Problème II.

Partie I.

1. y=$(\beta_1, \beta_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
2. (a) Une norme est une distance, on essaye donc de minimiser la distance entre le prix du WTI et le résultat du modèle.

   (b) On cherche donc à minimiser sous β, $f(\beta) = ||y - \beta X^t||_2^2 = \left(\sqrt{(y-\beta X^t)^2}\right)^2 = (y - \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)^2$. La première étape est de résoudre $\nabla f(\beta_1, \beta_2) = (0,0)$,

$$\begin{array}{lrl} \Leftrightarrow & \nabla f(\beta_1,\beta_2) = & (0,0) \\ \Leftrightarrow & (-2x_1(y-\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2), -2x_2(y-\beta_1 x_1-\beta_2 x_2)) = & (0,0) \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcc} (y-\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2) & = & 0 \\ (y-\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2) & = & 0 \end{array} \right. & \\ \Leftrightarrow & y - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 = & 0 \\ \Leftrightarrow & \beta_1 = & \dfrac{y-\beta_2 x_2}{x_1} \end{array}$$

   donc l'ensemble des solutions est $S = \{(\frac{y-\beta_2 x_2}{x_1}, \beta_2), \beta_2 \in \mathbb{R}\}$, d'autre part on avait $\beta^* = (X^t X)^{-1} X^t y = (\frac{yx_1}{x_1^2+x_2^2}, \frac{yx_2}{x_1^2+x_2^2})$, donc en posant comme solution particulière $\beta_2^* = \frac{yx_2}{x_1^2+x_2^2}$ on trouvait bien $\beta_1^* = \frac{yx_1}{x_1^2+x_2^2}$.

   Pour déterminer la nature de β^* on détermine la nature de la matrice hessienne de f,

$$H_f = \begin{pmatrix} 4x_1^2 & 2x_1x_2 \\ 2x_1x_2 & 4x_2^2 \end{pmatrix}$$

comme c'est une matrice 2×2 on peut se contenter de regarder son déterminant est sa trace, $\det(H_f) = 16x_1^2x_2^2 - 4x_1^2x_2^2 = 12x_1^2x_2^2 \geq 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{+2}$, donc les valeurs propres sont de même signe, de plus $\mathrm{tr}(H_f) = 4x_1^2 + 4x_2^2 \geq 0$, donc les valeurs propres sont positives si au moins une des valeurs propres est différente de 0, nul sinon. Donc matrice définie positive si au moins un des x_i est positif, semi-définie positive sinon. On a donc un minimum global (car $\forall(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$) et strict si au moins un des x_i est positif, non strict sinon (en fait, on a bien entendu définie positive car le taux de change ou le Brent ne peuvent pas être égaux à 0)...

3. (a) Je propose une autre manière de résoudre ce problème que celle utilisée précédement, on pouvait bien sur faire pareil pour $\mathcal{P}$ et avoir la solution en juste quelques lignes...

$$\begin{aligned}
\min_\beta\{||y - \beta X^t||_2^2 + \lambda||\beta||_2^2\} &\Leftrightarrow \min_\beta\{(y - \beta X^t)^2 + \lambda(\beta)^2\} \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial\{(y - \beta X^t)^2 + \lambda(\beta)^2\}}{\partial\beta} = 0_{\mathbb{R}^2} \\
&\Leftrightarrow -2X^t(y - \beta X^t) - 2\lambda\beta = 0_{\mathbb{R}^2} \\
&\Leftrightarrow \beta^* = (X^tX - \lambda I)^{-1}X^ty
\end{aligned}$$

Puis pareil, on calcule la hessienne...

(b) * Une solution acceptée est,

$$\begin{cases} \min_\beta ||y - \beta X^t||_2^2 \\ \quad s.c.\ ||\beta||_2^2 \leq 0 \end{cases}$$

Partie II.*

1. (a) $R^2 = \frac{||\tilde{Y} - \bar{Y}||_2^2}{||Y - \bar{Y}||_2^2} = 0 \Leftrightarrow ||\tilde{Y} - \bar{Y}||_2^2 = 0$, comme $||\cdot||_2$ est une norme, par définition on a, $||X||_2 = 0 \implies X = 0$, donc $\tilde{Y} - \bar{Y} = 0 \Leftrightarrow \tilde{Y} = \bar{Y}$. Le modèle n'arrive pas expliquer plus que la moyenne du prix du WTI pour $t = 1, \cdots, T$.

   (b) $R^2 = \frac{||\tilde{Y} - \bar{Y}||_2^2}{||Y - \bar{Y}||_2^2} = 1 \Leftrightarrow ||\tilde{Y} - \bar{Y}||_2^2 = ||Y - \bar{Y}||_2^2$, donc $\tilde{Y} - \bar{Y} = Y - \bar{Y} \Leftrightarrow \tilde{Y} = Y$. Dans ce cas, le modèle colle donc parfaitement à la réalité (ce qui n'est jamais le cas en pratique pour ce type de problème !).

2. Plusieurs réponses étaient acceptées, le prix du baril dépend de l'offre et de la demande, donc pour le coté offre on peut citer le volume des réserves restantes, le climat géopolitique des pays de l'OPEP, etc. Pour le côté demande, on peut penser au PIB de pays gros consommateurs, la masse de voiture en circulation, etc. D'un point vue plus financier, on pouvait penser également aux variations de différents indices, comme le CAC 40 (indice français), le FTSE (indice anglais), le S&P 500 (indice américain), le NIKKEI (indice japonais), etc..

3.3.7 Partiel du 9 juin 2010 - J. P. LECA

Première partie. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, forme quadratique telle que

$$\vec{u} = (x, y, z) \mapsto q(\vec{u}) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz$$

On veut savoir si :

a/ q définie positive ?
b/ q semi-définie positive ?
c/ q définie négative ?
d/ q semi-définie négative ?

1. Calculer $q(1, 1, 1)$. Répondre par "oui", "non", "wait and see", aux quatre questions ci-dessus.
   Par exemple a/ "oui", b/ "wait and see"... etc.
2. Définir B la matrice de q dans la base canonique. Après avoir cité le théorème du cours ad Hoc, répondre aux quatre questions a/...d/.
3. Démontrer que $B = P \times D \times P^{-1}$ où D est une matrice diagonale et P une matrice de passage, matrices que l'on explicitera. Répondre aux quatre questions a/...d/ en citant le théorème utilisé.
4. On considère le trinome du second degré $x \mapsto p(x) = x^2 - \beta x + \gamma$ avec $\beta = y + z, \gamma = y^2 + z^2 - yz$ où y et z sont des constantes.
   Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, p(x) \geq 0$. Répondre aux quatre questions a/...d/.
5. Développer l'expression - dite décomposition de Gauss de la forme quadratique -

$$(x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z)^2 + \frac{3}{4}(y - z)^2$$

   Répondre aux quatre questions a/...d/.

Deuxième partie. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre un et deux : $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \cdots, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \cdots$
2. Déterminer les points (x_0, y_0, z_0) candidats extremum de f.
3. Définir H la matrice Hessienne de f, calculer $\det H$.
4. Commentaires.

Question de cours. E et F deux $\mathbb{R}.e.v.$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Citer le "théorème du rang".
2. Démontrer que
   (a) $[\dim E = \dim F] \implies [f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}]$
   (b) Etudier la réciproque.

3.3.8 Partiel du 9 juin 2010 - Correction

Première Partie.

1. $q(1,1,1)=0$ donc les réponses à (a), (b), (c), (d) sont (non), (wait and see), (non), (wait and see).
2. $B=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ et en calculant les déterminants des sous-matrices det[2]>0, $\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} > 0$ et det $[B]$=0.

   Réponses : (non), (oui), (non), (non). (voir rappel ci-après, vu en cours).
3. $B=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

   $0, 3/2$ (double) sont les valeurs propres de B associées aux vecteurs propres $\vec{v}_1=(1,1,1), \vec{v}_2=(1,0,-1), \vec{v}_3=(0,1,-1)$.

   Réponse : les valeurs propres sont toutes ≥ 0 donc (non), (oui), (non), (non).
4. $p(x)=x^2-\beta x+\gamma$, $\Delta=-3(y-z)^2\leq 0$ le trinome $p(x)$ a donc un signe constant $\forall x\in\mathbb{R}$. Par ailleur, $p(x)\to+\infty$ et donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $p(x)\geq 0$. Or $p(x)=q(x,y,z)$ qui s'annule pour $\Delta=0$.

   Réponse : (non), (oui), (non), (non).
5. $(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z)^2+\frac{3}{4}(y-z)^2=q(x,y,z)$. D'où $q(x,y,z)\geq 0$ et nul pour $x=y=z$.
   Réponse : (non), (oui), (non), (non).

Deuxième Partie.

Que du très classique ! les points candidats extremum sont $x_0=y_0=z_0$ et la matrice Hessienne de f est $B\times 2$ où B est la matrice de la forme quadratique.

Commentaire : Tiens ! Tiens !... VENI, VIDI, (VICI ?)

Question de Cours.

1. Théorème du rang,
$$\dim \text{ Ker } \varphi + \dim \text{ Im } \varphi = \dim E$$
2. (a) Soit dim $E=$ dim F (1), alors :

$$\begin{aligned} \bullet\ \varphi \text{ injective } &\Longrightarrow \dim \text{ Ker } \varphi = 0 \\ &\Longrightarrow \dim \text{ Im } \varphi = \dim E = \dim F \text{ (théorème du rang + hypothèse (1))} \\ &\Longrightarrow \dim \text{ Im } \varphi = \dim F \\ &\Longrightarrow \varphi \text{ surjective.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ \varphi \text{ surjective } &\Longrightarrow \dim \text{ Im } \varphi = \dim F = \dim E \text{ (hypothèse (1))} \\ &\Longrightarrow \dim \text{ Ker}\varphi = 0 \text{ (théorème du rang)} \\ &\Longrightarrow \varphi \text{ injective.} \end{aligned}$$

(b) La réciproque est fausse. En effet, soit, $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(\vec{u}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$, $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$. φ n'est ni injective, ni surjective donc la proposition [φ injective $\Leftrightarrow$ φ surjective] est vraie (cf livre, chap 1), la proposition [$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2$] est fausse. Sachant que $A \implies B$ est faux pour A vrai et B faux, la réciproque de l'implication démontrée question (a) est donc fausse.

Rappel (vu en cours). **Matrice semi-définie positive est définie positive.**

Définition. On dit que A est semi-définie positive ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \phi_A(x,x) = X^T A X \geq 0$$

On dit que A est définie positive ssi

$$\forall x \neq (0, \cdots, 0), \phi_A(x,x) > 0 \text{ et } \phi_A(x,x) = 0 \implies x = (0, \cdots, 0)$$

1. **Méthodes pour prouver qu'une matrice symétrique est semi-définie positive.**
   (a) Déterminer les valeurs propres de A et montrer qu'elles sont toutes positives ou nulles.
   (b) Réduire la matrice A en utilisant la méthode de Gauss et vérifier que les termes diagonaux de la matrice réduite $\tilde{A}$ sont tous positifs ou nuls.
2. **Méthodes pour prouver qu'une matrice symétrique est définie positive.**
   (a) Déterminer les valeurs propres de A et montrer qu'elles sont toutes strictement positives.
   (b) Réduire la matrice A en utilisant la méthode de Gauss et vérifier que les termes diagonaux de la matrice réduite $\tilde{A}$ sont tous strictement positifs.
   (c) Soit $\forall p = 1, \cdots, n$, $A_p = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$. A est définie positive ssi $\det(A_p)>0$ pour tout $p = 1, \cdots, n$.

3.3.9 Partiel du 11 septembre 2010 - A. FAUTH

Les questions notées * *sont plus délicates, il vous est donc conseillé de les traiter en dernier.*

Questions de cours.

1. Soit E un espace quelconque de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de E dans E. Rappeler la signification de $f \in C^1(E)$. Qu'est ce que cela implique comme condition sur E ?
2. Donner la définition d'une fonction homogène de degré $k \in \mathbb{N}$. Par la même occasion, rappeler la formule d'Euler correspondante.

Exercice 1. Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

1. Donner la forme quadratique q associée à la matrice B dans la base canonique.
2. La forme quadratique q est-elle définie positive, semi-définie positive... ?
3. Déterminer une matrice de passage P et D une matrice diagonale tel que $B = P^{-1}DP$ (naturellement vous calculerez P^{-1}).
4. Définir Q la matrice orthonormale de P.
5. Donner la forme réduite de la forme quadratique q.

Exercice 2. Soit $f(x, y, z) = 4x^2 + 4xz + 4y^2 + z^2$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Déterminer le(s) point(s) extremum de f ainsi que leur(s) nature(s) (max, min, strict, non strict, global, local).
2. Donner la différentielle de f au point $(2, 3)$.

Exercice 3. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Déterminer les dérivées partielles de la fonction $F(x, y) \in \mathbb{R}$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en fonction des dérivées partielles premières de f définie par,

$$F(x, y) = f(xye^{y^2}, ln(2x^3))$$

Exercice 4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et f est de classe $C^2(E)$. Le laplacien de f est l'équation aux dérivées partielles notée Δf définit dans E par,

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

La fonction f est dite harmonique si et seulement si son laplacien est nul en tout point de E. On définie enfin $H(E)$ l'ensemble des fonctions harmoniques.

1. * Montrer que $H(E)$ est un sous-espace vectoriel de $C^2(E)$
2. Montrer que la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ est harmonique.
3. * Déterminer l'espace vectoriel décrit par $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ soit harmonique.

3.3.10 Partiel du 9 juin 2009 - J. P. LECA

Questions de Cours.

1. Qu'appelle t'on norme sur le R.e.v. $\mathbb{R}^2$?
2. Donner deux exemples de norme que vous connaissez sur $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $\vec{u}_n = (x_n, y_n)$ et $\vec{u} = (a, b)$. Quand dit-on que la suite de vecteurs $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers le vecteur $\vec{u} = (a, b)$ pour $n \to +\infty$.

Exercice 1. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ telle que,

$$(x, y, z) \mapsto \varphi(x, y, z) = (x, -x + y, x + y + z)$$

1. Définir A la matrice de φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. On pose $B = A - I_3$ où I_3 est la matrice unité de $\mathcal{M}(3 \times 3)$.
   (a) Calculer B, B^2, B^3 puis B^n pour $n > 3$.
   (b) A partir de $B^3 = (A - I_3)^3$ démontrer que $A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = \theta$ où θ est la matrice nulle de $\mathcal{M}(3 \times 3)$.
   (c) En déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

Exercice 2. Soit la matrice A définie par,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1. Calculer $\det(A)$.
2. Déterminer les valeurs propres de A.
3. Déterminer une matrice P de passage et D une matrice diagonale telle que $A = P^{-1}DP$.
4. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. Soit l'application f telle que,

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.
2. (a) Définir $df(a, b) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, la différentielle de f au point $(a, b) \neq (0, 0)$.
   (b) f est-elle différentiable en tout point $(a, b) \neq (0, 0)$? (on pourra citer un théorème ou bien donner la condition nécessaire et suffisante de différentiabilité).
3. (a) Démontrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$ (on pourra calculer $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{t}{n}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$)
   (b) f est elle différentiable en $(0, 0)$?
4. Démontrer que f n'admet pas de dérivées partielles premières en $(0, 0)$.

3.3.11 Partiel du 9 juin 2009 - Correction

Exercice 1.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. (a) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^3 = \theta,$ et $B^n = \theta \quad \forall n > 3$

   (b) D'après les règles de calcul de l'algèbre des matrices, sachant que $A \times I_3 = I_3 \times A$, on a, $B^3 = (A - I_3)^3 = A^3 + 3A - 3A^2 - I_3 = \theta$

   (c) $A(A^2 - 3A + 3I_3) = I_3$ d'où $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 2.

1. det(A)=0

2. λ_1=0, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^n \\ (-1)^{n+1} & 0 & (-1)^n \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} & 2 \times (-1)^n \end{bmatrix}$

Exercice 3. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $f(0,0) = 0$.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2}$

2. (a)
$$\begin{array}{rccl} df(a,b): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (h_1,h_2) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)h_2 \\ & & & = \dfrac{4ab^2}{(a^2+b^2)^2}h_1 + \dfrac{-4ba^2}{(a^2+b^2)^2}h_2 \end{array}$$

   (b) f est différentiable (et même C^∞) sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ car fonction rationnelle, ce qui signifie,
$$f(a+h_1, b+h_2) = f(a,b) + \frac{4ab^2}{(a^2+b^2)^2}h_1 + \frac{-4ba^2}{(a^2+b^2)^2}h_2 + ||(h_1,h_2)|| \cdot \epsilon(h_1,h_2)$$
avec $\epsilon(h_1,h_2) \longrightarrow_{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0$

3. (a) $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{t}{n}\right) \longrightarrow_{n\to+\infty} (0,0)$ et $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{t}{n}\right) \longrightarrow_{n\to+\infty} \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ limite qui dépend du chemin choisi donc pas de limite en $(0,0)$.

(b) Différentiable en $(0,0) \implies$ continue en $(0,0)$. Donc $\neg$(continue en (0,0)) $\implies \neg$ (différentiable en (0,0))

4. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}[f(h,0) - f(0,0)] = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}[1-0]$ limite qui n'existe pas.

3.3.12 Partiel du 7 septembre 2009 - J. P. LECA et A. FAUTH

Questions de Cours. On désigne par $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire du $\mathbb{R}.e.v.$ E dans le $\mathbb{R}.e.v.F$, par $Ker\varphi$ le noyau de φ, par $\varphi(E)$ l'ensemble image de E par φ.

1. Les ensembles $Ker\varphi$ et $\varphi(E)$ sont-ils des $\mathbb{R}.e.v.$, et si oui de quels $\mathbb{R}.e.v.$ sont-s'ils les sous-$\mathbb{R}.e.v.$? (on ne demande pas de démonstration).
2. Citer le théorème du rang.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit injective.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit surjective.

Problème 1. Soit la fonction f qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$.

1. La fonction f est-elle homogène ? Si oui, de quel degré ?
2. Déterminer, si elles existent, les dérivées partielles de f du premier ordre.
3. Déduire de la question 1. une relation entre les dérivées partielles de f et f.
4. Déterminer les derivées partielles du second ordre de f.
5. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f.
6. Quelle est la nature de ce(s) point(s) critique(s) ?

   Considérons maintenant l'équation $f(x, y) = 6$

7. Le couple $(1, 1)$ est-il solution de cette équation ?

   Soit $\begin{array}{rl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longrightarrow h(y) = x \end{array}$ telle que $f(h(y), y) = 6$ et $h(1) = 1$.

8. Citer le nom du théorème qui permet d'assurer l'existence de h, localement autour de $y = 1$.
9. En dérivant la fonction qui à y associe $f(h(y), y)$, et en utilisant l'égalité : $f(h(y), y) = 6$, déduire l'expression de la dérivée de $h(\cdot)$ en fonction de $h(\cdot)$ et des dérivées partielles de $f(\cdot)$. Quelles est la valeur de cette dérivée pour $y = 1$?
10. A l'aide de l'expression de $h'(y)$ avec les dérivées partielles de $f(\cdot)$ en $(h(y), y)$, déterminer par dérivation de l'expression la forme de $h''(y)$. La fonction $h(\cdot)$ est-elle concave ou convexe en $y = 1$?
11. Par un dessin, donner l'allure de h au voisinage de $y = 1$ (tangente et courbure).
12. Expliciter $h(y)$ en fonction de y.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caracteristique de A.
2. En déduire les valeurs propres puis les vecteurs propres de A
3. Diagonaliser A

3.3.13 Partiel du 25 mai 2007 - J. P. LECA

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Première partie.

1. La matrice A est-elle inversible ? Si oui $\twoheadrightarrow$
2. Définir A^{-1}, la matrice inverse de A.
3. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ dont la matrice est A quand on choisi la base canonique pour l'ensemble de départ et pour l'ensemble d'arrivée de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Calculer $\varphi(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer $\varphi^{-1}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ où φ^{-1} désigne l'application réciproque de φ.
   (c) Définir B la matrice de φ quand on choisit la base $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ pour l'ensemble de départ et d'arrivée de $\mathbb{R}^3$, avec $\vec{v}_1 = (0, 1, 1), \vec{v}_2 = (1, 0, 0), \vec{v}_3 = (0, 1, -1)$
   N.B. On commencera par vérifier que v est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Diagonaliser la matrice A. (On précisera les valeurs propres et les vecteurs propres respectifs, on évitera tout calcul technique inutile). On notera D la matrice diagonale de A.

Deuxième partie. Soit B la forme bilinéaire et Q la forme quadratique associées à la matrice A quand on choisit la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $B(\vec{u}, \vec{v})$ pour $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$, en déduire $Q(\vec{u})$.
   La forme bilinéaire $\mathcal{B}$ est-elle symétrique ?
2. Soit $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ la base introduite à la question 3. c. Partie I.
   (a) Montrer que $\mathcal{V}$ est une base orthogonale pour le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $< \vec{u} | \vec{v} >$.
   (b) En déduire $\mathcal{O} = \{\vec{o}_1, \vec{o}_2, \vec{o}_3\}$ base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Définir P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{O}$.
   (d) Comparer les matrices P^T et P^{-1}.
3. Calculer $Q(\vec{u})$ pour $\vec{u} = (x, y, z)$ en utilisant D la matrice diagonale de A.
4. La forme quadratique Q est-elle définie positive ?

Troisième partie. Soit $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto f(x, y) = x \cdot ln(y) + y \cdot ln(x) \end{array}$

1. Domaine de définition de f ?
2. Calculer les dérivées partielles f'_x et f'_y.
3. En déduire $df(1, 1) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ la différentielle de f au point (1,1).

3.3.14 Partiel du 25 mai 2007 - Correction

Première partie.

1. det(A)=$7 \neq 0 \implies A$ inversible.
2. $A^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$
3. (a) $\varphi(x,y,z) = (x, 4y+3z, 3y+4z)$
   (b) $\varphi^{-1}(x,y,z) = \frac{1}{7}(7x, 4y-3z, -3y+4z)$
   (c) $\mathcal{V}$ système libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc base de $\mathbb{R}^3$. $B = D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
   (d) D est la matrice diagonale de A, valeurs propres : 7, 1, 1 ; vecteurs propres : $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.

Deuxième partie.

1. B est symétrique car la matrice A est symétrique
   $B(\vec{u},\vec{v}) = xx' + 4(yy' + zz') + 3(y'z + yz')$, $Q(\vec{u}) = x^2 + 4(y^2+z^2) + 6yz$.
2. (a) $< \vec{u}_i, \vec{v}_j >= 0$ pour $i \neq j$, $||\vec{v}_1|| = \sqrt{2}$, $||\vec{v}_2|| = 1$, $||\vec{v}_3|| = \sqrt{2}$.
   (b) $\vec{o}_1 = \dfrac{\vec{v}_1}{\sqrt{2}}$, $\vec{o}_2 = \vec{v}_2$, $\vec{o}_3 = \dfrac{\vec{v}_3}{\sqrt{2}}$.
   (c) $P = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{O}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
   (d) $P^{-1} = P^T$
3. $\vec{u} = (x,y,z)$ donc $\vec{u} \to \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{E}} \to \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathcal{O}}$ et $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\frac{y+z}{\sqrt{2}} \\ x \\ \frac{y-z}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

   d'où $\begin{aligned} Q(\vec{u}) = &\quad x^2 + 7\frac{(y+z)^2}{2} + \frac{(y-z)^2}{2} \quad (1) \\ = &\quad x^2 + 4(y^2+z^2) + 6yz \end{aligned}$
4. A, B, C sont définies positives d'après (1).

Troisième partie.

1. $D_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$
2. $f'_x(x,y) = ln(y) + \dfrac{y}{x}$, $f'_y(x,y) = \dfrac{x}{y} + ln(x)$
3. $df(1,1) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \quad \begin{aligned} (h_1,h_2) \mapsto \quad & f'_x(1,1)h_1 + f'_y(1,1)h_2 \\ & = h_1 + h_2 \\ & = df(1,1)(h_1,h_2) \end{aligned}$.

3.3.15 Partiel septembre 2007 - J. P. LECA

Question de cours : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on désigne par $\mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des applications
linéaires de E dans E.

1. Rappeler la définition de $\varphi \in \mathcal{L}(E,E)$, où φ désigne donc une application linéaire.
2. Démontrer que $\mathcal{L}(E,E)$ est stable pour la composition des fonctions, notée $\circ$
3. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,E)$ et $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ une base de E.
   (a) Si $\{\varphi(\vec{u}_1), \cdots, \varphi(\vec{u}_n)\}$ est encore une base de E, peut-on en déduire φ injective ? φ surjective ? φ bijective ?
   (b) On désigne par Kerφ le noyau de φ, Imφ l'ensemble image noté $\varphi(E)$, énoncer le "Théorème des dimensions" en donnant la relation entre dim$E$, dimφ, dim Kerφ où dim est l'abréviation de dimension.

Exercice 1. On considère les matrices A et B : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1. Calculer AB, BA, A^2, A^3, B^2, B^3.
2. En déduire A^n, B^n, $(A+B)^n$

Exercice 2. On considère la matrice A, $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer D la matrice diagonale de A.
3. Calculer P et P^{-1} des matrices de passage telles que $P \times D \times P^{-1} = A$.

Exercice 3. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y) = xln(y^2) + yln(x^2)$.

1. Domaine de définition de f ?
2. Calculer $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$.
3. Définir $df(1,1) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ la forme linéaire appelée différentielle de f au point (1,1).

3.3.16 Partiel du 21 juin 2006 - J. P. LECA

Exercice 1. On choisit trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et on définit,

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \overrightarrow{a}= (x,y,z) & \mapsto & \varphi(\overrightarrow{a}) = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} \end{array}$$

1. Démontrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
2. φ peut-elle être injective ?
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit surjective.
4. Soit $\overrightarrow{u} = (1,2)$, $\overrightarrow{v} = (3,4)$, $\overrightarrow{w} = (5,6)$. Déterminer rang$\varphi$, Im$\varphi$, Ker$\varphi$, dimKer$\varphi$.
5. Rappeler le "théorème du rang" - on dit aussi théorème des dimensions - et vérifiez-le dans cet exemple.
6. On choisit la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ainsi que de $\mathbb{R}^3$. Définir A la matrice de φ relativement à ces base où $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont les vecteurs de la question 4.

Exercice 2. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{C} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & a \\ 0 & a & 4 \end{bmatrix}$,

($a \in \mathbb{R}^*$), la matrice de φ relativement à $\mathcal{C}$ choisie au départ et à l'arrivée.

1. Définir le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ et calculer les valeurs propres de A.
2. On se place dans le cas $a \in \mathbb{R}^* \backslash \{-3, 3\}$.
   (a) Donner une condition suffisante permettant d'affirmer que, dans ce cas, A est diagonalisable.
   (b) Pour chacune des valeurs propres λ de A, donner une base du sous-espace propre E_λ associé.
3. En déduire la matrice D diagonale de A, et $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ la base des vecteurs propres.
4. On pose $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$, $\mathcal{C} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$.
   (a) Définir P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{V}$ et calculer P^{-1} la matrice inverse de P.
   (b) Calculer $P \times D \times P^{-1}$. Commentaires.
   (c) En déduire $A^n, n \in \mathbb{N}$.

3.3.17 Partiel du 21 juin 2006 - Correction

Exercice 1.

1. O.K.
2. Non, car trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$, images par φ d'une base de $\mathbb{R}^3$, ne peuvent être libres.
3. Soit $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,
$$\begin{array}{rcl} \varphi \text{ surjective} & \Leftrightarrow & \{\varphi(\overrightarrow{i}), \varphi(\overrightarrow{j}), \varphi(\overrightarrow{k})\} \quad \text{est de rang } 2 \\ & \Leftrightarrow & \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\} \quad \text{est de rang } 2 \\ & \Leftrightarrow & \text{rang}\varphi = 2 \end{array}$$
4. rangφ=2, Imφ=$\mathbb{R}^2$, Kerφ=$\{\overrightarrow{n} = z(1, -2, 1),\ z \in \mathbb{R}\}$ et dim Kerφ=1.
5. $\begin{array}{ccccc} \dim Im\varphi & + & \dim Ker\varphi & = & \dim \mathbb{R}^3 \\ 2 & + & 1 & = & 3 \end{array}$
6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Exercice 2.

1. $P(\lambda) = (1-\lambda)[(4-\lambda)^2 - a^2]$, $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & 1 \\ \lambda & = & 4-a \\ \lambda & = & 4+a \end{array} \right.$ qui sont les valeurs propres de la matrice A.
2. – $\lambda = 1$, $E_{\lambda=1} = \{\overrightarrow{n} = \alpha \cdot \overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} = (1, 0, 0)\}$
   – $\lambda = 4-a$, $E_{\lambda=4-a} = \{\overrightarrow{n} = \alpha \cdot (\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}), \overrightarrow{j} = (0, 1, 0), \overrightarrow{k} = (0, 0, 1)\}$
   – $\lambda = 4+a$, $E_{\lambda=4+a} = \{\overrightarrow{n} = \alpha \cdot (\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}), \overrightarrow{j} = (0, 1, 0), \overrightarrow{k} = (0, 0, 1)\}$
3. D est la matrice de φ dans la base $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-a & 0 \\ 0 & 0 & 4+a \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \quad \begin{array}{rcl} \overrightarrow{v}_1 & = & (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{v}_2 & = & (0, 1, -1) \\ \overrightarrow{v}_3 & = & (0, 1, 1) \end{array}$$
   (a)
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   (b) $P \times D \times P^{-1} = A$ (Résultat du cours sur les matrices semblables).
   (c) $A^n = P \times D^n \times P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & (4-a)^n + (4+a)^n & (4+a)^n - (4-a)^n \\ 0 & (4+a)^n - (4-a)^n & (4-a)^n + (4+a)^n \end{bmatrix}$

3.3.18 Partiel du 1er septembre 2006 - J. P. LECA

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}^3 = \{\overrightarrow{u} = (x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et $\{\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \varphi(\vec{k})\}$

sa base canonique : $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$. On considère les applications f et g de

$\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{u} = (x, y, z) & \mapsto & f(\overrightarrow{u}) = (z, x, y) \\ \overrightarrow{u} = (x, y, z) & \mapsto & g(\overrightarrow{u}) = (y, z, x) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire. On admettra que, pour les mêmes raisons, g est linéaire.
2. Calculer $f(\overrightarrow{i})$, $f(\overrightarrow{j})$, $f(\overrightarrow{k})$. En déduire si f est injective ? Surjective ? Bijective ? Déterminer Ker$f$, le noyau de f.
3. Déterminer M la matrice de f et N la matrice de g relativement à la base canonique choisie dans l'ensemble de départ et dans l'ensemble d'arrivée.
4. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Calculer les matrices A^2, A^3, B^2, B^3.
5. Calculer les matrices inverses A^{-1}, B^{-1}.
6. D'après les questions précédentes que peut-on dire des fonctions $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ g \circ g$?

Exercice 2. On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

1. Quelles sont les matrices ci-dessus diagonalisables ?
2. Définir D la matrice diagonalisable de A et déterminer P matrice dite de passage telle que $A = P^{-1} \times D \times P$.
3. Calculer $A^n, n \in \mathbb{N}$

3.3.19 Partiel du 1er septembre 2006 - Correction

Exercice 1.

1. f et g linéaires, O.K.
2. $f(\overrightarrow{i}) = (0,1,0) = \overrightarrow{j}$
   $f(\overrightarrow{j}) = (0,0,1) = \overrightarrow{k}$
   $f(\overrightarrow{k}) = (1,0,0) = \overrightarrow{i}$
   Base de $\mathbb{R}^3$, donc f bijective et $\mathrm{Ker} f\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^3}\}$
3. $$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
4. $A^2 = N$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$, $B^2 = M$, $B^3 = I_3$
5. $A^2 \times A = I_3 \implies A^{-1} = A^2$
   $B^2 \times B \implies B^{-1} = B^2$
6. D'après les résultats de 4., $f \circ f = g$, $f \circ f \circ f = I_d$, $g \circ g = f$, $g \circ g \circ g = I_d$

Exercice 2.

1. A et C diagonalisables, B non.
2. $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, vecteur propre : $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \overrightarrow{v}_1$, $\lambda_2 = 5$, vecteur propre : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \overrightarrow{v}_1$
   $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
3. $A^n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \times (-1)^n + 5^n & 2 \times (-1)^{n+1} + 2 \times 5^n \\ (-1)^{n+1} + 5^n & (-1)^n + 2 \times 5^n \end{bmatrix}$

4 Bibliographie.

– *Mathématiques pour l'Economie*, Naïla HAYEK et Jean-Pierre LECA. 4^{ième} édition (400 pages) - DUNOD éditeur.
[Ce livre couvre TOUT le programme "analyse-algèbre" des années L1/L2 de la licence d'économie à Paris 1. De nombreux exercices sont proposés en fin de chapitre ainsi que leur correction.]

– *En 27 fiches, Mathématiques pour l'Economie*, Naïla HAYEK et Jean-Pierre LECA (150 pages) - DUNOD éditeur.
[Ce livre, bref résumé du précédent, est conçu en tant qu'outil de révision. Pour chaque fiche : rappel du cours et deux exercices types corrigés.]

– *Initiation aux Mathématiques*, Bernard GUERRIEN - ECONOMICA éditeur.
[Un vrai livre d'initiation à l'analyse, l'algèbre et la statistique.]

– *Mathématiques pour Economistes*, Carl P. SIMON et Laurence BLUME (1000 pages) - BLOECK UNIVERSITY édition, traduit de l'américain.
[Ce gros livre, niveau L1/L2 de la licence d'économie, traite de nombreux exemples d'applications des modèles mathématiques à l'économie. Il est très concret dans sa présentation, figures à l'appui.]