Corrections Partiel 2015

1. Table de la loi normale

Dans cet exercice, on note $Y = \frac{X-8}{4}$ qui suit la loi normale centrée réduite, c'est à dire que $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathrm{Var}(Y) = 1$. Tous les probabilités et quantiles de la v.a. Y peuvent être trouvés dans la table.

1) $\mathbb{P}(X < 18) = \mathbb{P}(\frac{X-8}{4} < \frac{18-8}{4}) = \mathbb{P}(Y < 2,5) = 0,9938$.

2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(-4 \leq X < 9,2) &= \mathbb{P}(\frac{-4-8}{4} \leq \frac{X-8}{4} < \frac{9,2-8}{4}) \\
&= \mathbb{P}(-3 \leq Y < 0,3) = \mathbb{P}(Y < 0,3) - \mathbb{P}(Y < -3) \\
&= \mathbb{P}(Y < 0,3) - (1 - \mathbb{P}(Y < 3)) = 0,6179 - (1 - 0,9987) \\
&= 0,6166.
\end{aligned}$$

3) D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(\frac{X-8}{4} > \frac{x-8}{4}) = \mathbb{P}(Y > \frac{x-8}{4}) = 0,5596$. Dans la table, on peut trouver $\mathbb{P}(Y < 0,15) = 0,5596$. On en déduit que $\mathbb{P}(Y > -0,15) = 0,5596$. Ainsi on a $\frac{x-8}{4} = -0,15$ qui donne $x = 7,4$.

2. Variables à densité

1) La densité doit vérifier la condition $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, on a donc

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-b} \frac{1}{a}x^{-4}dx + \int_{-b}^{b} \frac{1}{ab^4}dx + \int_{b}^{\infty} \frac{1}{a}x^{-4}dx \\
&= 2\int_{b}^{\infty} \frac{1}{a}x^{-4}dx + \int_{-b}^{b} \frac{1}{ab^4}dx = \frac{8}{3b^3a} = 1.
\end{aligned}$$

2.a) La définition de la fonction de répartition est $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Puisque $f(x)$ est définie par morceaux, on doit calculer $F(x)$ par morceaux aussi.

Pour $x < -2$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{a}t^{-4}dt = -\frac{1}{3ax^3} = -\frac{1}{x^3}$.

Pour $|x| \leq 2$, on a $F(x) = F(-2) + \int_{-2}^{x} \frac{1}{ab^4}dt = \frac{1}{2} + \frac{3}{16}x$.

Pour $x > 2$, on a

$$\begin{aligned}
F(x) &= F(2) + \int_{2}^{x} \frac{1}{a}t^{-4}dt \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \int_{2}^{x} \frac{1}{a}t^{-4}dt \\
&= 1 - \frac{1}{x^3}.
\end{aligned}$$

2.b) Comme la fonction de densité est symétrique par rapport à 0, on a $\mathbb{E}(X) = 0$.

2.c) Puisque $\mathbb{E}(X) = 0$, on a

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = 4.$$

3. Chaîne de Markov

1) Comme tous les coefficients de la matrice de transition sont positifs, tous les points de l'ensemble E sont récurrents. La mesure invariante $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ vérifie

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_1 = \mu_2 \quad \text{et} \quad \mu_1 + \mu_2 = 1$$

donc $\mu_1 + \mu_2 = 0,5$.

2.a) L'évènement que les X_i sont tous égaux est l'ensemble des deux évènements élémentaires $\{(e, e_1, e_1, e_1, e_1), (e_2, e_2, e_2, e_2, e_2)\}$. Cet évènement a pour probabilité

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_5) &= \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_5 = e_1) + \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_5 = e_2) \\ &= 0,5 \times 0,7^4 + 0,5 \times 0,7^4 \\ &= 0,7^4 = 0,24. \end{aligned}$$

2.b) Si les X_i sont tous égaux sauf un cet évènement est la réunion des trois évènements

$$\begin{aligned} A &= \{\text{tous égaux mais différents de } X_1\} \\ B &= \{\text{tous égaux mais différents de } X_5\} \\ C &= \{\text{tous égaux mais différents d'un } X_i, i \neq 1,5\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B) = 0,3 \times 0,7^3 \\ \mathbb{P}(C) &= 0,3^2 \times 0,7^2 \times 3 \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 0,3 \times 0,7^3 \times 2 + 0,3^2 \times 0,7^2 \times 3 = 0,338.$$

2.c) La aussi plusieurs cas possibles :

$$\begin{aligned} A &= \{X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont égaux au } e_1\} \\ A' &= \{X_4 \text{ et } X_5 \text{ sont égaux au } e_1\} \\ B &= \{X_1 \text{ est égal au } e_1, \text{mais pas } X_2 \text{ ni } X_5\} \\ B' &= \{X_5 \text{ est égal au } e_1, \text{mais pas } X_4 \text{ ni } X_1\} \\ C &= \{X_1 \text{ et } X_5 \text{ sont égaux au } e_1\} \\ C' &= \{X_1 \text{ et } X_5 \text{ sont égaux au } e_2 \text{ et les deux } X_i \text{ égaux au } e_1 \text{ sont consécutifs}\} \\ D &= \{X_1 \text{ et } X_5 \text{ sont égaux au } e_2 \text{ et les deux } X_i \text{ égaux au } e_1 \text{ ne sont pas consécutifs}\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A') = 0,5 \times 0,3 \times 0,7^3 \\
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B') = 0,5 \times 0,3^3 \times 0,7 \times 2 \\
\mathbb{P}(C) &= 0,5 \times 0,3^2 \times 0,7^2 \\
\mathbb{P}(C') &= 0,5 \times 0,3^2 \times 0,7^2 \times 2 \\
\mathbb{P}(D) &= 0,5 \times 0,3^4
\end{aligned}$$

donc

$$2\mathbb{P}(A)+2\mathbb{P}(B)+3\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(D) = 0,3\times 0,7^3+0,3^3\times 0,7\times 2+0,3^2\times 0,7^2\times 1,5+0,5\times 0,3^4 = 0,211.$$

4. Variables discrètes

1) On aura $\mathbb{E}(Y_i) = 3 - p$ et $\mathrm{Var}\,(Y_i) = p - p^2$.

2) Comme $3 - y_i = \begin{cases} 1, \text{ si } y_i = 2 \\ 0, \text{ si } y_i = 3 \end{cases}$, $y_i - 2 = \begin{cases} 1, \text{ si } y_i = 3 \\ 0, \text{ si } y_i = 2 \end{cases}$ et que les Y_i sont indépendants, on aura

$$L_p(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} p^{3-y_i}(1-p)^{y_i-2}.$$

3) La log vraisemblance vaudra :

$$l_p(y_1, \ldots, y_n) = \log(p) \sum_{i=1}^{n}(3 - y_i) + \log(1-p) \sum_{i=1}^{n}(y_i - 2).$$

On cherche

$$\frac{\partial}{\partial p} l_p(y_1, \ldots, y_n) = 0$$

soit

$$\hat{p} = 3 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

en vérifiant que

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} l_{\hat{p}}(x_1, \ldots, x_n) < 0.$$

4) L'espérance de $\hat{p}$ sera $\mathbb{E}(\hat{p}) = p$ et $\mathrm{Var}\,(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$.

5) Comme $\mathbb{E}(\hat{p}) = p$ et $\mathrm{Var}\,(\hat{p}) \to 0$, par une application immédiate de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on aura la convergence de $\hat{p}$ vers p en probabilité. On peut aussi la démontrer par la loi des grands nombres $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \to 3-p$ en probabilité, puisque $\mathbb{E}(Y_i) = 3-p$ et $\mathrm{Var}\,(Y_i) < \infty$.

6) On calcule la statistique du test,

$$\hat{T} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\text{Var}\,(\hat{p})}} = \frac{0,25 - 0,2,}{1/100} = 5.$$

D'après le théorème central limite, on a la loi approximative de $\hat{T}$ la loi normale centrée réduite pour n suffisamment grand. La région de rejet est $W = \left\{ |\hat{T}| > T_\alpha \right\}$ où $T_\alpha = 2,57$ ou $2,58$. On rejette donc l'hypothèse nulle.