Correction CC1 2015-2016

Exercice : Vecteurs aléatoires discrets

Sujet A

1. Les conditions pour que la loi soit bien définie sont $\sum_{n=0}^{\infty} pq^n = 1$ et $p, q > 0$. On en déduit que $p + q = 1$ et $p, q > 0$.

2. $\mathbb{P}(S = 0) = p$.

$\mathbb{P}(S \geq 20) = 1 - p\frac{1-q^{20}}{1-q} = \frac{pq^{20}}{1-q} = q^{20}$.

3. $\mathbb{P}(X = k|S = n)$ est la probabilité que Jane engendre k femelles si elle a n enfants au total. Le paramètre a est la probabilité qu'un lapin engendré par Jane est femelle. Le paramètre b est la probabilité qu'un lapin engendré par Jane est mâle.

$\mathbb{P}(X = k|S = n) = 0, \ \ n < k$.

4. $\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = k|S = n)\mathbb{P}(S = n) = (\frac{aq}{1-bq})^k \frac{p}{1-bq}$.

5. $\mathbb{P}(Y = k) = (\frac{bq}{1-aq})^k \frac{p}{1-aq}$.

6. $\mathbb{P}(X = i, Y = j|S = n) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = i|S = n) = C_n^i a^i b^{n-i}, & n = i + j, \\ 0, & n \neq i + j. \end{cases}$

$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i, S = i + j) = \mathbb{P}(X = i|S = i + j)\mathbb{P}(S = i + j) = pC_{i+j}^i (aq)^i (bq)^j$.

X et Y ne sont pas indépendantes.

Sujet B

1. Les conditions pour que la loi soit bien définie sont $\sum_{k=0}^{\infty} p^k q = 1$ et $p, q > 0$. On en déduit que $p + q = 1$ et $p, q > 0$.

2. $\mathbb{P}(S = 0) = q$.

$\mathbb{P}(S \geq 10) = 1 - q\frac{1-p^{10}}{1-p} = \frac{p^{10}q}{1-p} = p^{10}$.

3. $\mathbb{P}(X = x|S = k)$ est la probabilité que Jane engendre x mâles si elle a k enfants au total. Le paramètre s est la probabilité qu'un lapin engendré par Jane est mâle. Le paramètre t est la probabilité qu'un lapin engendré par Jane est femelle.

$\mathbb{P}(X = x|S = k) = 0, \ \ k < x$.

4. $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{k=x}^{\infty} \mathbb{P}(X = x|S = k)\mathbb{P}(S = k) = (\frac{sp}{1-tp})^x \frac{q}{1-tp}$.

5. $\mathbb{P}(Y = y) = (\frac{tp}{1-sp})^y \frac{q}{1-sp}$.

6. $\mathbb{P}(X = x, Y = y|S = k) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x|S = k) = C_k^x s^x t^{k-x}, & k = x + y, \\ 0, & k \neq x + y. \end{cases}$

$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x, S = x + y) = \mathbb{P}(X = x|S = x + y)\mathbb{P}(S = x + y) = qC_{x+y}^x (sp)^x (tp)^y$.

X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice : Chaîne de Markov

$C=0,\ \ X_0=2,\ \ e_n\in\{0,2\}\,,\ \ \mathbb{P}(e_1=0)=1/3$

1. $\mathbb{P}(X_{n+1}|X_n,\dots,X_0)=\mathbb{P}(X_{n+1}|X_n)$ car X_{n+1} ne dépend que de X_n et e_n qui sont indépendantes.
2. Les états possibles sont $0,1,2$.
Récurrents : $0,1$; transitoires : 2.
3. $M=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$.
4. $\mu=(1/3,2/3,0)^T$.
On n'a pas la convergence car il y a l'état transitoire.
5. Deux trajectoires sont possibles 22221 et 21111. La probabilité vaut $(2/3)^3/3\times 2=(2/3)^4$.

$C=1,\ \ X_0=0,\ \ e_n\in\{1,3\}\,,\ \ \mathbb{P}(e_1=1)=1/3$

1. $\mathbb{P}(X_{n+1}|X_n,\dots,X_0)=\mathbb{P}(X_{n+1}|X_n)$ car X_{n+1} ne dépend que de X_n et e_n qui sont indépendantes.
2. Les états possibles sont $0,1,2$.
Récurrents : $1,2$; transitoires : 0.
3. $M=\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.
4. $\mu=(0,1/3,2/3)^T$.
On n'a pas la convergence car il y a l'état transitoire.
5. Deux trajectoires sont possibles 00001 et 01111. La probabilité vaut $(1/3)^3\times 2/3\times 2=(1/3)^3\times 4/3$.