Correction CC2 2015-2016

Exercice : Lecture de la table (3 p)

n est pair, $\mathbb{E}(X) = 1$.
1. $\mathbb{P}(X < -1,5) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) < -1,25) = 1 - 0,8944$.
2. $\mathbb{P}(-3,2 \leq X < 3,2) = \mathbb{P}(-2,1 \leq \mathcal{N}(0,1) < 1,1) = 0,8643 - (1 - 0,9821)$.
3. $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > -0,09) = 0,5359$, $\frac{x-1}{2} = -0,09$, $x = 1 - 0,18$.

n est impair, $\mathbb{E}(X) = -1$.
1. $\mathbb{P}(X < -1,5) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) < -0,25) = 1 - 0,5987$.
2. $\mathbb{P}(-3,2 \leq X < 3,2) = \mathbb{P}(-1,1 \leq \mathcal{N}(0,1) < 2,1) = 0,9821 - (1 - 0,8643)$.
3. $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > -0,09) = 0,5359$, $\frac{x+1}{2} = -0,09$, $x = -1 - 0,18$.

Exercice : Couple de variables continues (8 p)

n est pair, $a = 0$, $b > 0$.
1. $\int_0^b \int_0^b 4x(b-y)dxdy = b^4 = 1$, $b = 1$.
2. $f_X(x) = \int_0^1 4x(1-y)dy = 2x\mathbb{1}_{\{[0,1]\}}(x)$.
$f_Y(y) = \int_0^1 4x(1-y)dx = 2(1-y)\mathbb{1}_{\{[0,1]\}}(y)$.
X et Y sont indépendantes.
3. $f_Z(z) = \int_0^1 f(x, z-x)dx = \begin{cases} \int_0^z 4x(1-z+x)dx = \frac{2}{3}z^2(3-z), & z \in [0,1], \\ \int_{z-1}^1 4x(1-z+x)dx = \frac{2}{3}((z-1)^3 - 3(z-1) + 2), & z \in (1,2]. \end{cases}$

n est impair, $a = -1$, $b > -1$.
1. $\int_{-1}^b \int_{-1}^b 4(x+1)(b-y)dxdy = (b+1)^4 = 1$, $b = 0$.
2. $f_X(x) = \int_{-1}^0 -4(x+1)ydy = 2(x+1)\mathbb{1}_{\{[-1,0]\}}(x)$.
$f_Y(y) = \int_{-1}^0 -4(x+1)ydx = -2y\mathbb{1}_{\{[-1,0]\}}(y)$.
X et Y sont indépendantes.
3. $f_Z(z) = \int_{-1}^0 f(x, z-x)dx = \begin{cases} \int_{-1}^{z+1} -4(x+1)(z-x)dx = \frac{2}{3}(z+2)^2(1-z), & z \in [-2,-1], \\ \int_z^0 -4(x+1)(z-x)dx = \frac{2}{3}((z+1)^3 - 3(z+1) + 2), & z \in (-1,0]. \end{cases}$

Exercice : Loi de Paréto (9 p)

Sujet A
1. $\mathbb{E}(\ln X_1) = \int_1^\infty \ln x \cdot \frac{1}{k} \cdot x^{-\frac{1}{k}-1}dx = -\int_1^\infty \ln x dx^{-\frac{1}{k}} = k$.
$\mathbb{E}((\ln X_1)^2) = \int_1^\infty (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{k} \cdot x^{-\frac{1}{k}-1}dx = -\int_1^\infty (\ln x)^2 dx^{-\frac{1}{k}} = 2k^2$, $\mathbf{Var}\,(\ln X_1) = k^2$.
2. $L(k) = \prod_{i=1}^n k^{-1}x_i^{-\frac{1}{k}-1} = k^{-n}\prod x_i^{-\frac{1}{k}-1}$, $H(k) = \ln L(k) = -n\ln k - \frac{1}{k}\sum \ln x_i - \sum \ln x_i$,
$H'(k) = -\frac{n}{k} + \frac{1}{k^2}\sum \ln x_i = 0$, $\hat{k} = \frac{1}{n}\sum \ln x_i$, $H''(\hat{k}) < 0$.
3. D'après les résultats de la question 1, on a $\mathbb{E}(\hat{k}) = k$ et $\mathrm{Var}\,(\hat{k}) = \frac{k^2}{n}$.
4. D'après la loi des grands nombres, on a $\hat{k} = \frac{1}{n}\sum \ln X_i \to \mathbb{E}\ln X_i = k$.
5. En utilisant l'approximation gaussienne, on a la loi de $\hat{k}$ qui est $\mathcal{N}(k, \frac{k^2}{n})$. L'intervalle de confiance à 95% est $[\hat{k} - 1,96\frac{\hat{k}}{\sqrt{n}}, \hat{k} + 1,96\frac{\hat{k}}{\sqrt{n}}]$.

Sujet B
1. $\mathbb{E}(\ln X_1) = \int_1^\infty \ln x \cdot \frac{1}{\theta} \cdot x^{-\frac{1}{\theta}-1}dx = -\int_1^\infty \ln x dx^{-\frac{1}{\theta}} = \theta$.
$\mathbb{E}((\ln X_1)^2) = \int_1^\infty (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{\theta} \cdot x^{-\frac{1}{\theta}-1}dx = -\int_1^\infty (\ln x)^2 dx^{-\frac{1}{\theta}} = 2\theta^2$, $\mathbf{Var}\,(\ln X_1) = \theta^2$.

2. $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \theta^{-1} x_i^{-\frac{1}{\theta}-1} = \theta^{-n} \prod x_i^{-\frac{1}{\theta}-1}$, $H(\theta) = \ln L(\theta) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum \ln x_i - \sum \ln x_i$, $H'(\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum \ln x_i = 0$, $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum \ln x_i$, $H''(\hat{\theta}) < 0$.

3. D'après les résultats de la question 1, on a $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$ et $\mathrm{Var}\,(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{n}$.

4. D'après la loi des grands nombres, on a $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum \ln X_i \to \mathbb{E} \ln X_i = \theta$.

5. En utilisant l'approximation gaussienne, on a la loi de $\hat{\theta}$ qui est $\mathcal{N}(\theta, \frac{\theta^2}{n})$. L'intervalle de confiance à 95% est $[\hat{\theta} - 1,96 \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{n}}, \hat{\theta} + 1,96 \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{n}}]$.