Corrections, Partiel, 01/2019

Exercice 1. Variables uniformes

1. Les densités de X et Y sont $f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[0,3]}(x)$. La densité du couple est $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{9}\mathbb{1}_{[0,3]^2}(x,y)$.

2. Puisque $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = 3/2$, l'espérance du couple est $(3/2, 3/2)$. On a $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = 3$, donc $\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{Var}\,(Y) = 3-(3/2)^2 = 3/4$. Par l'indépendance on a $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = 0$. La matrice de variance-covariance est

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

3. Le support de la loi de Z et $[0,6]$. La densité de Z est

$$f_Z(z) = \int f(x, z-x)dx = 1/9\int_0^3 \mathbb{1}_{[0,3]}(z-x)dx = \begin{cases} 1/9\int_0^z 1dx = z/9, & 0 \leq z \leq 3, \\ 1/9\int_{z-3}^3 1dx = (6-z)/9, & 3 < z \leq 6. \end{cases}$$

4. Le support de la loi de U et $[-3,3]$. La densité de U est

$$f_U(u) = \int f(x, x-u)dx = 1/9\int_0^3 \mathbb{1}_{[0,3]}(x-u)dx = \begin{cases} 1/9\int_0^{3+u} 1dx = (3+u)/9, & -3 \leq u \leq 0, \\ 1/9\int_u^3 1dx = (3-u)/9, & 0 < u \leq 3. \end{cases}$$

Exercice 2. Estimation paramétrique

1. La vraisemblance est

$$L(p) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) = (\frac{1}{p})^n \prod_{i=1}^n (1-\frac{1}{p})^{x_i-1} = (\frac{1}{p})^n (1-\frac{1}{p})^{\sum_{i=1}^n x_i - n}.$$

On calcule le log-vraisemblance

$$H(p) = \log L(p) = -n\log p + (\sum_{i=1}^n x_i - n)(\log(\text{p-1}) - \log p).$$

La première dérivée de $H(p)$ est $H'(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p(p-1)} - \frac{n}{p-1}$. On a $H'(p) = 0$ si $p = \sum_{i=1}^{n} x_i/n := \bar{x}$ et $H'(p) \begin{cases} > 0, & p < \bar{x} \\ < 0, & p > \bar{x} \end{cases}$. Donc $\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$.

2. Le biais est $b = \mathbb{E}(\hat{p}) - p = \mathbb{E}(X_i) - p = 0$. Le risque quadratique moyen est $RQM(\hat{p}) = \text{Var}\,(\hat{p}) + b^2 = \frac{\text{Var}\,(X_i)}{n} = \frac{p(p-1)}{n}$.

3. D'après la loi des grands nombres on a $(\sum_{i=1}^{n} X_i/n - p)/\sqrt{\frac{p(p-1)}{n}} \xrightarrow{Pr.} \mathcal{N}(0,1)$.

4. Pour n suffisamment grand la loi de $\hat{p}$ peut être approximée par la loi gaussienne d'espérance p et de variance $\frac{p(p-1)}{n}$. Donc pour q_α vérifiant $\mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| \leq q_\alpha) = \alpha$, on a $\mathbb{P}(|(\hat{p} - p)/\sqrt{\frac{p(p-1)}{n}}| \leq q_\alpha) = \alpha$. D'où vient $IC_\alpha = [\hat{p} - q_\alpha\sqrt{\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{n}}, \hat{p} + q_\alpha\sqrt{\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{n}}]$.

5. On a $\hat{p} = 3$, $n = 600$ et $\sqrt{\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{n}} = \sqrt{\frac{3\cdot 2}{600}} = \frac{1}{10}$. Par la symétrie de la densité de $\mathcal{N}(0,1)$, on a $\mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| \leq 1.64) = 0.9$, c.a.d. $q_\alpha = 1.64$. On obtient $IC_{0.9} = [3 - 1.64/10, 3 + 1.64/10] = [2.836, 3.164]$.

Exercice 3. Chaîne de Markov

1. récurrents : e_1, e_3, transitoire : e_2
2. $1/2 \cdot 1/2 \cdot 2/3 \cdot 2/5$
3. $(10/19, 0, 9/19)^T$