Correction, Statistique et Probabilités, L2 MIASHS, Partiel
17/01/2018, Durée : deux heures

Exercice 1. Urne

1. $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

2. Il y a quatre couples $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tels que $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = 0$. Ils sont $(0, 0)$ $(1, 3)$ $(2, 2)$ et $(2, 3)$.

3. La loi du couple est la suivante.

X\Y	0	1	2	3
0	0	3/35	6/35	1/35
1	2/35	12/35	6/35	0
2	2/35	3/35	0	0

En faisant la convention $C_n^k = 0$ lorsque $k < 0$ ou $k > n$ on peut calculer les probabilités suivantes

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(\text{i bleues, j vertes, 3-i-j rouges}) = \frac{C_2^i C_3^j C_2^{3-i-j}}{C_7^3}.$$

4. $\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}((X, Y) \in \{(1, 0), (2, 0), (2, 1)\}) = \frac{2}{35} + \frac{2}{35} + \frac{3}{35} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$,
$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}((X, Y) \in \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}) = 0 + \frac{12}{35} + 0 = \frac{12}{35}$,
$\mathbb{P}(\text{2 rouges}) = \mathbb{P}(X + Y = 1) = \mathbb{P}((X, Y) \in \{(1, 0), (0, 1)\}) = \frac{2}{35} + \frac{3}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$.

Exercice 2. Bernoulli

1. $\alpha = \mathbb{P}(T \in \{0\} \,|H_0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0|p = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,
$\beta = \mathbb{P}(T \notin \{0\} \,|H_1) = 1 - \mathbb{P}(T = 0|H_1) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}$.

2. L'espace d'états est $E = \{a, -a\}$.
D'après la définition de Y_{n+1} on a
$\mathbb{P}(Y_{n+1} = a|Y_n = a) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = -a|Y_n = -a) = \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$
et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = -a|Y_n = a) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = a|Y_n = -a) = \mathbb{P}(X_n = 1) = p$.
Donc la matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$.

3. La mesure invariante est $\mu = (1/2, 1/2)^T$.

4. On a

$$\begin{aligned} L(p, y_1, \ldots, y_{n+1}) &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = y_{n+1}, \ldots, Y_1 = y_1) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_{i+1} = y_{i+1}|Y_i = y_i)\mathbb{P}(Y_1 = y_1 = a) \\ &= p^{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{y_i \neq y_{i+1}\}}(y_i, y_{i+1})}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{y_i = y_{i+1}\}}(y_i, y_{i+1})}, \end{aligned}$$

d'où vient l'expression dans l'énoncée.

5. Notons $m = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{y_i \neq y_{i+1}\}}(y_i, y_{i+1})$. La log-vraisemblance devient

$$H(p) = \log L(p) = m \log p + (n - m) \log(1 - p).$$

On a $H'(p) = \frac{m}{p} - \frac{n-m}{1-p} = 0 \iff p = \frac{m}{n}$, et $H''(p) = -\frac{m}{p^2} - \frac{n-m}{(1-p)^2} < 0$. L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{p}$ est donc $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{y_i \neq y_{i+1}\}}(y_i, y_{i+1})/n$.

Exercice 3. Couple aléatoire continu

1. Si $f(x,y)$ est la densité d'un couple de variables aléatoires réelles, elle doit vérifier $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$ et $f(x,y) \geq 0$. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = C\int_{-\theta}^{\theta}\int_{0}^{\infty} e^{-2x}dxdy = C\int_{-\theta}^{\theta}\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^{\infty} dy = C\int_{-\theta}^{\theta}\frac{1}{2}dy = \theta C = 1,$$

d'où vient $C = 1/\theta$. Comme $\theta > 0$, on a $C > 0$.

2. La densité marginale de X est

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\theta}^{\theta}\frac{1}{\theta}e^{-2x}\mathbb{I}_{\{x\geq 0\}}(x)dy = 2e^{-2x}, \quad x \geq 0.$$

Donc $X \sim \mathcal{E}(2)$.

La densité marginale de Y est

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{\infty}\frac{1}{\theta}e^{-2x}\mathbb{I}_{\{y\in[-\theta,\theta]\}}(y)dx = \frac{1}{\theta}\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\theta}, \quad y \in [-\theta,\theta].$$

Donc $Y \sim \mathcal{U}[-\theta,\theta]$.

Comme $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$, X et Y sont indépendantes.

3. Puisque $X \sim \mathcal{E}(2)$, $\mathbb{E}X = 1/2$. Puisque $Y \sim \mathcal{U}[-\theta,\theta]$, $\mathbb{E}Y = 0$. L'espérance du couple $\mathbb{E}(X,Y) = (\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y) = (1/2, 0)$.