Correction Partiel 2015-2016

Questions de cours

1. $\alpha = \mathbb{P}(T \in W \mid H_0)$ où W est la région de rejet. α est la probabilité de choisir H_1/rejeter H_0 sachant que H_0 est vraie.

2. $\beta = \mathbb{P}(T \notin W \mid H_1)$ où W est la région de rejet. β est la probabilité de choisir H_0 sachant que H_1 est vraie.

Exercice : Couple de variables aléatoires discrètes

1. Le nombre total de signatures Y est inférieur ou égal au nombre de personnes qu'il peut contacter X. Lorsque X est fixé, Y suit une loi binomiale. Donc on a $\mathbb{P}(Y = j \mid X = k) = \begin{cases} 0, & j > k, \\ C_k^j p^j (1-p)^{k-j}, & j \leq k. \end{cases}$

2. La loi jointe est $\mathbb{P}(X = k, Y = j) = \mathbb{P}(Y = j \mid X = k) \cdot \mathbb{P}(X = k) = C_k^j p^j (1-p)^{k-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $j \leq k$.

3. La loi de Y est $\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = j) = \frac{(\lambda p)^j}{j!} e^{-\lambda p}$, $Y \sim Pois(\lambda p)$.

X et Y ne sont pas indépendantes. Contre-exemple : $\mathbb{P}(X = 2, Y = 3) = 0$ mais $\mathbb{P}(X = 2) \cdot \mathbb{P}(Y = 3) \neq 0$.

Exercice : Chaîne de Markov

1. La mesure invariante est $\mu = (\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q})^T$.

2. a) La loi de X_2 est $\mathcal{L}(X_2) = M \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 1-q & p \\ q & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-q+p}{2} \\ \frac{1-p+q}{2} \end{pmatrix}$.

b) On calcule d'abord la loi jointe $\mathbb{P}(X_1 = e_1, X_2 = e_2) = \mathbb{P}(X_2 = e_2 \mid X_1 = e_1)\mathbb{P}(X_1 = e_1) = \frac{q}{2}$. D'après le résultat de la question a) on a la probabilité de $X_2 = e_2$, $\mathbb{P}(X_2 = e_2) = \frac{1-p+q}{2}$. Donc $\mathbb{P}(X_1 = e_1 \mid X_2 = e_2) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = e_1, X_2 = e_2)}{\mathbb{P}(X_2 = e_2)} = \frac{q}{1-p+q}$.

c) On en déduit la vraisemblance :

$$L(p,q) = \frac{1}{2} \times \prod_{i=1}^{n-1} (1-q)^{1\!\!1_{\{(e_1,e_1)\}}(x_{i+1},x_i)} \times q^{1\!\!1_{\{(e_2,e_1)\}}(x_{i+1},x_i)} \times p^{1\!\!1_{\{(e_1,e_2)\}}(x_{i+1},x_i)} \times (1-p)^{1\!\!1_{\{(e_2,e_2)\}}(x_{i+1},x_i)}.$$

La log-vraisemblance est

$$\begin{aligned} \log L(p,q) = & -\log 2 + \log(1-q) \times \sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!1_{\{(e_1,e_1)\}}(x_{i+1},x_i) + \log q \times \sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!1_{\{(e_2,e_1)\}}(x_{i+1},x_i) \\ & + \log p \times \sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!1_{\{(e_1,e_2)\}}(x_{i+1},x_i) + \log(1-p) \times \sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!1_{\{(e_2,e_2)\}}(x_{i+1},x_i). \end{aligned}$$

On cherche

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial p} \log L(p,q) = 0 & \Longleftrightarrow \quad p^{-1} \times \sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!1_{\{(e_1,e_2)\}}(x_{i+1},x_i) - (1-p)^{-1} \times \sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!1_{\{(e_2,e_2)\}}(x_{i+1},x_i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial q} \log L(p,q) = 0 & \Longleftrightarrow \quad -(1-q)^{-1} \times \sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!1_{\{(e_1,e_1)\}}(x_{i+1},x_i) + q^{-1} \times \sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!1_{\{(e_2,e_1)\}}(x_{i+1},x_i) = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!1_{\{(e_1,e_2)\}}(x_{i+1},x_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!1_{\{(e_1,e_2)\}}(x_{i+1},x_i) + \sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!1_{\{(e_2,e_2)\}}(x_{i+1},x_i)} \\ \hat{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!1_{\{(e_2,e_1)\}}(x_{i+1},x_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!1_{\{(e_1,e_1)\}}(x_{i+1},x_i) + \sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!1_{\{(e_2,e_1)\}}(x_{i+1},x_i)} \end{cases}$$

car
$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\log L(p,q) &= -\frac{1}{p^2}\times\sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!\mathrm{I}_{\{(e_1,e_2)\}}(x_{i+1},x_i) - \frac{1}{(1-p)^2}\times\sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!\mathrm{I}_{\{(e_2,e_2)\}}(x_{i+1},x_i) < 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial q^2}\log L(p,q) &= -\frac{1}{(1-q)^2}\times\sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!\mathrm{I}_{\{(e_1,e_1)\}}(x_{i+1},x_i) - \frac{1}{q^2}\times\sum_{i=1}^{n-1} 1\!\!\mathrm{I}_{\{(e_2,e_1)\}}(x_{i+1},x_i) < 0 \end{cases}$$
et $\frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\log L(p,q) = 0$.

Exercice : Estimation paramétrique

1. En utilisant l'intégration par partie on a
$\int_a^b (x-a)^n(b-x)dx = \int_a^b (b-x)d\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}(\left[(b-x)(x-a)^{n+1}\right]_a^b + \int_a^b (x-a)^{n+1}dx) = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

2. On a $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 6\int_a^b (x-a)(b-x)dx = (b-a)^3 = 1$ et $b > a$, donc $b = a+1$.

3. En utilisant la relation de la question 1, on a $\mathbb{E}(X_1 - a) = \int_{\mathbb{R}}(x-a)f(x)dx = 6\int_a^b (x-a)^2(b-x)dx = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}[(X_1-a)^2] = \int_{\mathbb{R}}(x-a)^2 f(x)dx = 6\int_a^b (x-a)^3(b-x)dx = \frac{3}{10}$.

Puisque $\mathbb{E}(X_1 - a) = \mathbb{E}X_1 - a$, $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}(X_1-a) + a = \frac{1}{2} + a$. On a ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\, X_1 &= \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}X_1)^2] \\ &= \mathbb{E}[(X_1 - \frac{1}{2} - a)^2] \\ &= \mathbb{E}[(X_1-a)^2 - (X_1 - a) + \frac{1}{4}] \\ &= \mathbb{E}[(X_1-a)^2] - \mathbb{E}(X_1-a) + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

4. Le biais est $b = \mathbb{E}\hat{a} - a = \mathbb{E}X_1 - \frac{1}{2} - a = 0$. Le risque quadratique moyen est $RQM(\hat{a}) = \mathrm{Var}\,\hat{a} + b^2 = \mathrm{Var}\,\hat{a} = \frac{1}{20n}$.

5. La vraisemblance est

$$\begin{aligned} L(a, x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{i=1}^n 6(x_i - a)(b - x_i)\mathbf{1\!I}_{[a,b]}(x_i) \\ &= 6^n \prod_{i=1}^n (x_i - a)(a+1-x_i)\mathbf{1\!I}_{[a,a+1]}(\max_{i=1,\ldots,n}(x_i))\mathbf{1\!I}_{[a,a+1]}(\min_{i=1,\ldots,n}(x_i)) \\ &= \begin{cases} 6^n \prod_{i=1}^n (x_i-a)(a+1-x_i), & \textbf{si } a+1 \geq \max_{i=1,\ldots,n}(x_i) \textbf{ et } a \leq \min_{i=1,\ldots,n}(x_i) \\ 0, & \textbf{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour maximiser la vraisemblance, a doit vérifier $\max_{i=1,\ldots,n}(x_i) - 1 \leq a \leq \min_{i=1,\ldots,n}(x_i)$. L'estimateur $\hat{a}$ peut être supérieur à $\min_{i=1,\ldots,n}(x_i)$ ou inférieur à $\max_{i=1,\ldots,n}(x_i) - 1$, donc il n'est pas l'estimateur du maximum de vraisemblance.