L2 DU ECE & CMI EF, 2021 - 2022

Probabilités
Correction Contrôle N°1 du 19 octobre 2021

Exercice 1 (5pts)

1. (a) $\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$, $\{\{a,c\},\{b\},\{d\}\}$, $\{\{a,d\},\{b\},\{c\}\}$, $\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}$, $\{\{a\},\{b,d\},\{c\}\}$, $\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$. **(1pt)**

   (b) Il s'agit du nombre de combinaisons à trois éléments de E. Il vaut $\binom{4}{3} = 4$. **(1pt)**

2. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, désignons par $\mathbf{R}_k$ l'ensemble de tels entiers à k chiffres. Un élément de $\mathbf{R}_k$ est de la forme $x_1x_2\cdots x_k$ où $x_i \in \{1,2\}$; et peut être considéré comme une k-liste de $\{1,2\}$. Donc, $\text{Card}(\mathbf{R}_k) = 2^k$. **(1pt)**

   (b) Soit $\mathbf{R}$, l'ensemble de ces entiers ayant au plus n chiffres. La famille $(R_k)_{1\leq n}$ forme une partition de $\mathbf{R}$. D'où

$$\text{Card}(\mathbf{R}) = \sum_{k=1}^{n} \text{Card}(\mathbf{R}_k) = \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2\frac{2^n-1}{2-1} = 2^{n+1} - 2. \quad \textbf{(2pts)}$$

Exercice 2 (10pts)

1. (a) Soit R l'ensemble des résultats possibles. Un résultat est une combinaison à 3 éléments de l'ensemble des 7 boules. Le nombre de résultats possibles est alors $\text{Card}(R)=\binom{7}{3}$ **(1pt)**.

   (b) Soit R_k l'ensemble des tirages qui amènent exactement k boules blanches.
   - Si $k > 3$, $\text{Card}(R_k) = 0$.
   - Si $k \leq 3$; un tel résultat s'obtient en choisissant k boules parmi les 4 boules blanches ($\binom{4}{k}$ possibilités) et $3-k$ boules parmi les 3 boules noires ($\binom{3}{3-k}$ possibilités). Ainsi, $\text{Card}(R_k) = \binom{4}{k}\binom{3}{3-k}$ **(0,5pt + 1pt)**.

   (c) Soit A l'ensemble des tirages qui amènent au moins une boule blanche. $\overline{\text{A}}$ est l'ensemble des tirages qui n'amènent aucune boule blanche i.e. on obtient que des boules noires. $\text{Card}(\overline{\text{A}}) = \binom{3}{3} = 1$. D'où $\text{Card}(A) = \text{Card}(R) - \text{Card}(\overline{\text{A}}) = \binom{7}{3} - 1$ **(1,5pts)**.

   (d) Soit B l'ensemble des tirages qui amènent au moins deux boules de couleurs différentes. $\overline{\text{B}}$ est l'ensemble des tirages qui amènent des boules de même couleurs" i.e. soit toutes les boules sont blanches ($\binom{4}{3}$ possibilités) soit elles sont toutes noires ($\binom{3}{3}$ possibilités). Ainsi, $\text{Card}(\overline{\text{B}}) = \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 5$. D'où $\text{Card}(B) = \text{Card}(R) - \text{Card}(\overline{\text{B}}) = \binom{7}{3} - 5$ **(2pts)**.

2. Soit $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ l'ensemble de n boules.

(a) C'est l'ensemble des arrangements de p éléments de B. Le nombre de tirages possibles est A_n^p. **(1pt)**

(b) Un tel tirage est constitué de b_2 prélevée au premier tirage (1 possibilité) et d'un arrangement de $p-1$ boules prises parmi les $n-1$ autres boules (A_{n-1}^{p-1} possibilités). Le nombre de tels tirages est A_{n-1}^{p-1}. **(1pt)**

(c) C'est l'ensemble d'arrangements à p éléments de $\{b_1, b_2, b_3\}$. Le nombre de tels tirages est A_3^p. **(1pt)**

(d) On suppose $p = 2$. L'ensemble des résultats possibles dans ce cas est : $\{(b_1, b_3), (b_3, b_1), (b_2, b_3), (b_3, b_2)\}$. Il y a donc 4 tirages possibles dans ce cas. **(1pt)**

Exercice 3 (6pts)

1. L'univers des possibles est $\Omega = \{1, \cdots, 6\} \times \{1, \cdots, 6\}$; $\mathrm{Card}(\Omega) = 6 \times 6 = 36$. On prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$; et comme le dé est équilibré, il y a équiprobabilité. **(1pt)**

2.
   - $A = (\{1,3,5\} \times \{1,3,5\}) \cup (\{2,4,6\} \times \{2,4,6\})$ (cette union est disjointe). Donc $\mathrm{Card}(A) = 3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$ et $P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.
   - $\overline{\mathrm{B}}$ est l'événement "aucun des deux nombres n'est pair" i.e. les deux nombres sont impairs. Ainsi, $\overline{\mathrm{B}} = \{1,3,5\} \times \{1,3,5\}$ et $\mathrm{Card}(\overline{\mathrm{B}}) = 3 \times 3 = 9$. D'où $P(B) = 1 - P(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{3}{4}$.
   - $\overline{\mathrm{C}}$ est l'événement "les deux nombres sont impairs", i.e. l'événement $\overline{\mathrm{B}}$ ci-dessus. Donc, $P(C) = P(B) = \frac{3}{4}$. **(1pt + 1pt + 1pt)**

3. Soit l'événement D : "obtenir deux nombres différents". $\overline{\mathrm{D}}$ est l'événement "les deux nombres sont identiques". Ainsi, $\overline{\mathrm{D}} = \{(1,1), (2,2), \cdots, (6,6)\}$ et $\mathrm{Card}(\overline{\mathrm{D}}) = 6$. D'où $P(D) = 1 - P(\overline{\mathrm{D}}) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$. **(1pt)**

4. Soit l'événement E : "le premier nombre est supérieur ou égal au deuxième". On a $E = \{(i,j),\ 1 \le j \le i \le 6\}$. $\mathrm{Card}(E) = 21$ et $P(E) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$. **(1pt)**