**L2 DU ECE & CMI EF, 2020 - 2021**

# Probabilités
# Correction Contrôle N°2 du 01 décembre 2020

**Exercice 1**

1. Soit B l'ensemble des boules et $T = \{t_1, \cdots, t_n\}$ l'ensemble des tiroirs.
   (a) Soit R l'ensemble des répartitions possibles. R représente l'ensemble des applications $f : B \mapsto T$ où $f(b_i)$ est le tiroir contenant la boule $b_i$. Ainsi, Card(R)=Card(T)$^{\text{Card(B)}} = n^r$. **(0,5pt)**
   (b) Soit $R_1$ l'ensemble des répartitions où $t_1$ n'est pas vide. Il y a $(n-1)^r$ répartitions où $t_1$ est vide (répartition de $r$ boules dans les tiroirs autre que $t_1$). Ainsi, $\text{Card}(R_1) = n^r - (n-1)^r$. **(1,5pts)**
   (c) Soit $R_2$ l'ensemble des répartitions où seuls $t_1$ et $t_2$ ne pas pas vides. Dans ce cas, on répartit les $r$ boules seulement dans les tiroirs $t_1$ et $t_2$ ($2^r$ possibilités) ; en excluant la répartition où toutes les boules sont dans $t_1$ ($t_2$ vide) et celle où toutes les boules sont dans $t_2$ ($t_1$ vide). Donc, $\text{Card}(R_2) = 2^r - 2$. **(2.5pts)**
   (d) On suppose que $r = 3$, $n = 2$ et que les boules sont identiques.
   On dénombre 4 répartitions dans ce cas. **(0.5pt)**

2. (a) Un résultat est une $p$-listes d'éléments de $E$. Donc, il y a $n^p$ résultats possibles. **(0.5pt)**

   L'univers des possibles $\Omega$ est alors l'ensemble des $p$-listes d'éléments de $E$. Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = n^p$ ; on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ; et comme le tirage s'effectue au hasard, il y a équiprobabilité.
   (b) Soit l'événement A : "on n'obtient pas la boule $b_1$". Un élément de A s'obtient en effectuant le tirage dans les boules autres que $b_1$ ; donc $\text{Card}(A) = (n-1)^p$. D'où $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}) = \frac{(n-1)^p}{n^p}$. **(1pt)**
   (c) Soit l'événement B : "on obtient au moins une des boules $b_1$ ou $b_2$". $\overline{\text{B}}$ est l'événement : "on n'obtient aucune des boules $b_1$ et $b_2$". Un élément de $\overline{\text{B}}$ s'obtient en effectuant le tirage dans les boules autres que $b_1$ et $b_2$ ; donc $\text{Card}(\overline{\text{B}}) = (n-2)^p$ et $P(\overline{\text{B}}) = \frac{\text{Card}(\overline{\text{B}})}{\text{Card}(\Omega)}) = \frac{(n-2)^p}{n^p}$.
   D'où $P(B) = 1 - P(\overline{\text{B}}) = 1 - \frac{(n-2)^p}{n^p}$. **(1.5pts)**

**Exercice 2**
Soient les événements A (resp. B, C) : "l'entreprise utilise le transporteur A (resp. B, C)" et D : "un colis se perd".

1. (A, B, C) forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales, on a $P(D) = P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C) = 0,01\times\frac{3}{4}+0,02\times\frac{1}{8}+0,03\times\frac{1}{8} = 0,01375$. **(1.5pts)**

2. $P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0,01\times\frac{3}{4}}{0,01375} \approx 0,545$. Le transporteur A est plus fiable que les autres. Cette probabilité élevée s'explique par le fait que A transporte beaucoup plus de colis que les autres. **(1.5pts + 1pt)**

**Exercice 3**

1. 
   - On a $P(X=0)=P(X\leq 0)=F(0)=0,2$.
   - $P(X=2)=P(0<X\leq 2)=F(2)-F(0)=0,45-0,2=0,25$. **(0,5pt + 0,5pt )**

2. On a $P(X=3)=P(2<X\leq 3)=F(3)-F(2)=0,75-0,45=0,3$. On calcule de même $P(X=4)$, $P(X=5)$ et on obtient le tableau ci-dessous.

| $k$ | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $0,20$ | $0,25$ | $0,30$ | $0,15$ | $0,10$ |

**(1pt)**

3. $P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-F(2)=1-0,45=0,55$. **(0,5pt)**

4. 
   - $E(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)=0\times P(X=0)+2\times P(X=2)+3\times P(X=3)+4\times P(X=4)+5\times P(X=5)=0+2\times 0,25+3\times 0,30+4\times 0,15+5\times 0,10=2,50$.
   - $E(X^2)=\sum_{x\in X(\Omega)} x^2P(X=x)=0+2^2\times 0,25+3^2\times 0,30+4^2\times 0,15+5^2\times 0,10=8,60$. Et $Var(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=8.60-2.50^2=2,35$.
   - $\sigma_X=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{2.35}\approx 1,53$.

   **(0,5pt + 1pt + 0,5pt )**

5. $E(\sqrt{X})=\sum_{x\in X(\Omega)}\sqrt{x}P(X=x)=\sqrt{0}\times P(X=0)+\sqrt{2}\times P(X=2)+\sqrt{3}\times P(X=3)+\sqrt{2}\times P(X=4)+\sqrt{5}\times P(X=5)=0+\sqrt{2}\times 0,25+\sqrt{3}\times 0,30+2\times 0,15+\sqrt{5}\times 0,10\approx 1,397$. **(1,5pts)**

6. On cherche le plus petit entier $a\in\mathbb{N}^*$ tel que $P(X>a)\leq 0,20$. $P(X>3)=0,25$, $P(X>4)=0,10$. Donc $a=4$. **(1,5pts)**

7. Soit l'événement $A_i$ : "on a rupture de stock le ième jour". Les $A_i$ $i=1,\cdots,6$ sont mutuellement indépendants et $P(A_i)=P(X>4)=P(X=5)=0,10$ pour tout $i=1,\cdots,6$. On a $P(\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_5\cap A_6)=P(\overline{A}_1)\times\cdots\times P(\overline{A}_5)\times P(A_6)=0,90^5\times 0,10\approx 0,06$. **(1,5pts)**