L2 DU ECE & CMI EF, 2021 - 2022

Probabilités
Correction Contrôle N°2 du 23 novembre 2021

Exercice 1 (8pts)

1. (a) $\{\{b_1\},\{b_2,\cdots,b_n\}\}$, $\{\{b_1,b_2\},\{b_3,\cdots,b_n\}\}$; $\{\{b_2\},\{b_1,b_3\cdots,b_n\}\}$ **(1pt)**.
   (b) Soit $B=\{b_1,\cdots,b_{10}\}$ l'ensemble des 10 bonbons. Comme les individus sont indiscernables et que chacun doit avoir au moins un bonbon, une répartition est une partition en 2 parties de B (et réciproquement). Ainsi, le nombre de répartitions possibles est égal au nombre de partitions en deux parties de B et vaut $2^{10-1}-1=2^9-1$. **(2pts)**.

2. (a) Un comité est une combinaison à 3 éléments de l'ensemble des $2n$ étudiants. Le nombre de comités possibles que l'on peut former est $\binom{2n}{3}$ **(1pt)**.
   (b)
   - Avec chacune des classes, on peut former $\binom{n}{3}$ comités. Le nombre de comités que l'on peut former ne comportant que des étudiants de la même classe est donc $2\binom{n}{3}$ **(1pt)**.
   - Pour former un tel comité, on choisit la classe qui doit contenir 2 étudiants ($\binom{2}{1}$ possibilités), pour chaque classe ainsi choisie, on choisit 2 étudiants dans la classe ($\binom{n}{2}$ possibilités), pour chaque choix ainsi fait, on choisit un étudiant dans l'autre classe ($\binom{n}{1}$ possibilités). Le nombre de comités que l'on peut ainsi former est $\binom{2}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{1}=2n\frac{n!}{2!(n-2)!}=n^2(n-1)$ **(1,5pts)**.

   (c) Dans ce cas, il reste à choisir le 3ème étudiant parmi les $2n-2$ étudiants restants ($\binom{2n-2}{1}$ possibilités). Le nombre de comités possibles que l'on peut former dans ce cas est $\binom{2n-2}{1}=2n-2$ **(1.5pts)**.

Exercice 2 (4pts)

1. Soient les événements A (resp. B, C) : "la lampe provient du fournisseur A (resp. B, C)" et D : "la lampe possède la propriété P". $\{A,B,C\}$ forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales, on a :

   $$P(D)=P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)=0,7\times 0,2+0,4\times 0,3+0,3\times 0,5=0,41.$$

   (1pt)

2. Par la formule de Bayes, on a :

   $$P(A|D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(D|A)P(A)}{P(D)}=\frac{0,7\times 0,2}{0,41}=\frac{14}{41}\approx 0,34.\ \textbf{(1pt)}$$

3. Les événements A et B sont incompatibles. Donc, $P(A \cup B|D) = P(A|D) + P(B|D)$. On a $P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}3}{0{,}41} = \frac{12}{41}$. D'où $P(A \cup B|D) = \frac{14}{41} + \frac{12}{41} = \frac{26}{41} \approx 0,63$. **(2pt)**

Exercice 3 (9pts)

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de produits vendues en 30 min.
   (a) Pour une minute donné, considérons la vente de ce produit comme un succès et le contraire comme un échec. Alos, X est le nombre de succès obtenus au cours de n épreuves mutuellement indépendantes, avec pour chaque épreuve une probabilité de succès 0,01. Donc, $X \sim \mathcal{B}(30, 0, 01)$. **(2pts)**

   (b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{30}{0} 0,01^0 (1 - 0,01)^{30-0} \approx 0,260$. **(1pt)**

   (c) $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{30}{0} 0,01^0 (1 - 0,01)^{30-0} + \binom{30}{1} 0,01^1 (1 - 0,01)^{30-1} \approx 0,96$. **(1pts)**

2. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de produits vendues par jour. $Y \sim \mathcal{B}(450, 0, 1)$ et $E(Y) = 450 \times 0,01 = 4,5$ **(1.5pts)**

3. (a) Alors, $Z \sim \mathcal{B}(5, 0, 01)$. La fonction de répartition de Z est $F(x) = P(X \leq x)$, qui vaut :
   - pour $x < 0$, $F(x) = P(X \leq x) = 0$;
   - pour $x \in [0, 1[$, $F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = \binom{5}{0} 0,01^0 (1 - 0,01)^{5-0} = 0,95099$;
   - pour $x \in [1, 2[$, $F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq 0) + P(X = 1) = F(0) + \binom{5}{1} 0,01^1 (1 - 0,01)^{5-1} = 0.9990199$;
   - pour $x \in [2, 3[$, $F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq 1) + P(X = 2) = F(1) + \binom{5}{2} 0,01^2 (1 - 0,01)^{5-2} = 0.9999901$;
   - pour $x \in [3, 4[$, $F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq 2) + P(X = 3) = F(2) + \binom{5}{3} 0,01^3 (1 - 0,01)^{5-3} \approx 0.9999999$;
   - pour $x \in [4, 5[$, $F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq 3) + P(X = 4) = F(3) + \binom{5}{4} 0,01^4 (1 - 0,01)^{5-4} \approx 0.99999999$;
   - pour $x \geq 5$, $F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq 4) + P(X = 5) = F(4) + \binom{5}{5} 0,01^5 (1 - 0,01)^{5-5} = 1$.

   (2.5pts)

   (b) On a $P(Z \leq 3) = F(3) \approx 0.9999999$. **(1pt)**