L2 DU ECE & CMI EF, 2020 - 2021

Probabilités
Correction Contrôle N°1 du 20 octobre 2020

Exercice 1

1. (a) Un comité est une combinaison à 3 éléments de l'ensemble des $2n$ étudiants. Le nombre de comités possibles que l'on peut former est $\binom{2n}{3}$ **(1pt)**.

   (b) Pour former un tel comité, on choisit la classe qui doit contenir 2 étudiants ($\binom{2}{1}$ possibilités), pour chaque classe ainsi choisie, on choisit 2 étudiants dans la classe ($\binom{n}{2}$ possibilités), pour chaque choix ainsi fait, on choisit un étudiant dans l'autre classe ($\binom{n}{1}$ possibilités). Le nombre de comités que l'on peut ainsi former est $\binom{2}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{1} = 2n\frac{n!}{2!(n-2)!} = n^2(n-1)$ **(1.5pts)**.

   (c) Dans ce cas, il reste à choisir le 3ème étudiant parmi les $2n-2$ étudiants restants ($\binom{2n-2}{1}$ possibilités). Le nombre de comités possibles que l'on peut former dans ce cas est $\binom{2n-2}{1} = 2n-2$ **(1.5pts)**.

2. Chaque groupe aura 19 étudiants. Une répartition se fait en choisissant 19 étudiants parmi les 38 ($\binom{38}{19}$ possibilités) pour former un groupe, et pour chacun de ces choix, le reste des 19 étudiants forme l'autre groupe (une possibilité). Ainsi, il y a $\binom{38}{19}$ possibilités de former de tels groupes. **(2pts)**

Exercice 2

Soit $E = \{b_1, \cdots, b_n\}$ l'ensemble des n boules.

1. (a) C'est l'ensemble des combinaisons à p éléments de E. Le nombre de tirages possibles est $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$. **(0.5pt)**

   (b) Un tel tirage s'obtient en prélevant simultanément b_1 et b_2 (1 possibilité) et $p-2$ boules parmi les $n-2$ autres boules ($\begin{pmatrix} n-2 \\ p-2 \end{pmatrix}$ possibilités). Le nombre de tels tirages est $\begin{pmatrix} n-2 \\ p-2 \end{pmatrix}$. **(1.5pt)**

2. (a) Un résultat est une p-listes d'éléments de E. Donc, il y a n^p résultats possibles. **(1pt)**

   L'univers des possibles Ω est alors l'ensemble des p-listes d'éléments de E. Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = n^p$; on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$; et comme le tirage s'effectue au hasard, il y a équiprobabilité.

   (b) Soit l'événement A : "on n'obtient pas la boule b_1". Un élément de A s'obtient en effectuant le tirage dans les boules autres que b_1 ; donc $\text{Card}(A) = (n-1)^p$. D'où $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}) = \frac{(n-1)^p}{n^p}$. **(1.5pts)**

   (c) Soit l'événement B : "on obtient au moins une des boules b_1 ou b_2". $\overline{\text{B}}$ est l'événement : "on n'obtient aucune des boules b_1 et b_2". Un élément de $\overline{\text{B}}$ s'obtient en effectuant le tirage dans les boules autres que b_1 et b_2 ; donc $\text{Card}(\overline{\text{B}}) = (n-2)^p$ et $P(\overline{\text{B}}) = \frac{\text{Card}(\overline{\text{B}})}{\text{Card}(\Omega)}) = \frac{(n-2)^p}{n^p}$. D'où $P(B) = 1 - P(\overline{\text{B}}) = 1 - \frac{(n-2)^p}{n^p}$. **(2pts)**

Exercice 3

1. (a) $\mathrm{B}_1 = \bigcup_{k \geq 1} A_k$. **(0.5pt)**

   (b) $\mathrm{C}_n = \overline{A}_1 \cap \cdots \overline{A}_{k-1} \cap A_n$. **(1pt)**

   (c) $\mathrm{D}_n = \bigcup_{k \geq n+1} A_k$. **(1pt)**

   (d) $\mathrm{E}_n = \bigcap_{k \geq n} A_k$. **(1pt)**

2. L'univers des possibles est $\Omega = \{1, 2, \cdots, 6\}$, $\mathrm{Card}(\Omega) = 6$. Comme le dé est équilibré, il y a équiprobabilité.

   (i) $A = \{1, 3, 5\}$ et $\mathrm{Card}(A) = 3$. D'où, $P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. **(0.5pt)**

   (ii) $B = \{3, 6\}$ et $\mathrm{Card}(B) = 2$. D'où, $P(B) = \frac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. **(0.5pt)**

   (iii) $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$ et $\mathrm{Card}(A \cup B) = 4$. D'où, $P(A \cup B) = \frac{\mathrm{Card}(A \cup B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. **(1pt)**

3. L'univers des possibles $\Omega = \{1, \cdots, 6\} \times \{1, \cdots, 6\}$; $\mathrm{Card}(\Omega) = 6 \times 6 = 36$. On prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$; et comme le dé est équilibré, il y a équiprobabilité.

   (a) $C = (\{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\}) \cup (\{2, 4, 6\} \times \{2, 4, 6\})$ (cette union est disjointe). Donc $\mathrm{Card}(C) = 3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$ et $P(C) = \frac{\mathrm{Card}(C)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. **(1,5pts)**

   (b) Désignons par S la somme des deux nombres obtenus. On a $P(S \leq 8) = 1 - P(S > 8)$ et $\{S > 8\} = \{(6, 6), (6, 5), (5, 6), (6, 4), (4, 6), (6, 3), (3, 6), (5, 5), (5, 4), (4, 5)\}$. Donc $\mathrm{Card}(\{S > 8\}) = 10$ et $P(S > 8) = \frac{\mathrm{Card}(\{S > 8\})}{\mathrm{Card}(\Omega)}) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$. D'où, $P(S \leq 8) = 1 - P(S > 4) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$. **(1.5pts)**