Sujet A

1 Loi normale

On considère une suite$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$ et une suite $(X_1, \cdots, X_n)$ de variables aléatoires telles que $X_i = \theta * i + \varepsilon_i$, où θ est un paramètre réel.

1. Comme les $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ sont indépendants, les variables $(X_1, \cdots, X_n)$ le seront. Comme elle n'est pas la même espérance, elles ne peuvent pas être identiquement distribuées.
2. Comme $X_i \sim \mathcal{N}(\theta \times i, 1)$, la densité de X_i sera $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta i)^2}$, par indépendance des X_i, on en déduit la vraisemblance :
$$L_\theta(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i - \theta \times i)^2}$$
3. La log vraisemblance vaudra :
$$l_\theta(x_1, \cdots, x_n) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \theta \times i)^2$$
On cherche :
$$\frac{\partial}{\partial\theta} l_\theta(x_1, \cdots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n i \times x_i}{\sum_{i=1}^n i^2}$$
En vérifiant que
$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l_{\hat{\theta}}(x_1, \cdots, x_n) = -\sum_{i=1}^n i^2 < 0$$
4. On aura $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$ et $V\left(\hat{\theta}\right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n i^2}$.
5. Comme $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$ et $V\left(\hat{\theta}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, par une application immédiate de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on aura $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$.
6. On aura l'intervalle à 95% pour θ :
$$IC_{95\%} = \left[\hat{\theta} - 1.96\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n i^2}}; \hat{\theta} + 1.96\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n i^2}}\right]$$

2 Loi uniforme

On considère un échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ i.i.d., avec X_i, une variable aléatoire définie sur un ensemble Ω, qui suit la loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$. On pose $Z_n = \max_{i \in \{1,\cdots,n\}} X_i$.

1. Pour $0 < \varepsilon < 1$, on aura $P(Z_n \leq \varepsilon) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq \varepsilon) = \varepsilon^n = F_{Z_n}(\varepsilon)$. On aura de plus, si $\varepsilon \leq 0 : F(\varepsilon) = 0$ et si $\varepsilon \geq 1 : F(\varepsilon) = 1$.
2. On en déduit densité de Z_n $f_{Z_n}(z) = \frac{\partial}{\partial z} F_{Z_n}(z) = nz^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(z)$.
3. On aura $E(Z_n) = \int_0^1 nz^n dz = \frac{n}{n+1}$. De plus $E\left(Z_n^2\right) = \int_0^1 nz^{n+1}dz = \frac{n}{n+2}$, d'ou
$$V(Z_n) = \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}$$
4. On aura $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(\varepsilon) = \mathbf{1}_{\{1\}}(\varepsilon)$, on en déduit que la variable $Z = \lim_{n\to\infty} Z_n = 1$ (la variable constamment égale à 1).
5. On a $P(|Z_n - 1| > \varepsilon) = P(Z_n < 1 - \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n$, on en déduit que $\sum_{n=1}^\infty P(|Z_n - 1| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^\infty (1-\varepsilon)^n < \infty$ car $|1-\varepsilon| < 1$.

Sujet B

1 Loi normale

On considère une suite$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$ et une suite $(X_1, \cdots, X_n)$ de variables aléatoires telles que $X_i = \theta * \sqrt{i} + \varepsilon_i$, où θ est un paramètre réel.

1. Comme les $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ sont indépendants, les variables $(X_1, \cdots, X_n)$ le seront. Comme elle n'est pas la même espérance, elles ne peuvent pas être identiquement distribuées.

2. Comme $X_i \sim \mathcal{N}(\theta \times \sqrt{i}, 1)$, la densité de X_i sera $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(x-\theta\sqrt{i}\right)^2}$, par indépendance des X_i, on en déduit la vraisemblance :

$$L_\theta(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(x_i-\theta\times\sqrt{i}\right)^2}$$

3. La log vraisemblance vaudra :

$$l_\theta(x_1, \cdots, x_n) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \theta \times \sqrt{i}\right)^2$$

On cherche :

$$\frac{\partial}{\partial\theta} l_\theta(x_1, \cdots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \times x_i}{\sum_{i=1}^{n} i}$$

En vérifiant que

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l_{\hat{\theta}}(x_1, \cdots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} i < 0$$

4. On aura $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$ et $V\left(\hat{\theta}\right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} i}$.

5. Comme $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$ et $V\left(\hat{\theta}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, par une application immédiate de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on aura $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$.

6. On aura l'intervalle à 95% pour θ :

$$IC_{95\%} = \left[\hat{\theta} - 1.96\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} i}}; \hat{\theta} + 1.96\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} i}}\right]$$

2 Loi uniforme

1. Pour $0 < \varepsilon < 1$, on aura
$P(Z_n \leq \varepsilon) = 1 - P(Z_n > \varepsilon) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > \varepsilon) = 1 - (1-\varepsilon)^n = F_{Z_n}(\varepsilon)$. On aura de plus, si $\varepsilon \leq 0$: $F_{Z_n}(\varepsilon) = 0$ et si $\varepsilon \geq 1$: $F_{Z_n}(\varepsilon) = 1$.

2. On en déduit la densité de Z_n, $f_{Z_n}(z) = \frac{\partial}{\partial z} F_{Z_n}(z) = n(1-z)^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(z)$.

3. On aura

$$E(Z_n) = \int_0^1 zn(1-z)^{n-1}dz = \int_0^1 (1-u)nu^{n-1}du = \int_0^1 nu^{n-1}du - \int_0^1 nu^n du = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

De plus

$$E(Z_n^2) = \int_0^1 z^2 n(1-z)^{n-1}dz = \int_0^1 (1-u)^2 nu^{n-1}du = \int_0^1 nu^{n-1}du - \int_0^1 2nu^n du + \int_0^1 nu^{n+1}du = \frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

d'où $V(Z_n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} - (\frac{1}{n+1})^2 = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$.

4. On aura $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(\varepsilon) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(\varepsilon)$, on en déduit que la variable $Z = 0$ (la variable égale constamment à 0).
5. On a $P(|Z_n| > \varepsilon) = P(Z_n > \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n$, on en déduit que $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Z_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon)^n < \infty$ car $|1-\varepsilon| < 1$.