Partiel 2012

exo 1

1. D'après l'énoncé, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 120^2)$, $i=1,\cdots,n$, $X_1,\cdots,X_n$ sont i.i.d.

C'est un test gaussien sur l'espérance avec la variance connue.
C'est un test bilatéral.

On a $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{120^2}{100})$. Prenons la statistique

$$T = \frac{\overline{X}_n - 1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}}.$$

Sous H_0, $T \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Puisque c'est un test bilatéral, la région de rejet est définie par

$\mathbb{P}_{H_0}(|\hat{T}| \geq t) = \alpha$, où $\hat{T}$ est la valeur de T observée.

a) Sous H_0, $\mathbb{P}_{H_0}(|T| \geq 1{,}96) = 5\%$, c.a.d. $t = 1{,}96$.

$$\hat{T} = \frac{1570 - 1600}{\frac{120}{10}} = -2{,}5, \quad |\hat{T}| = 2{,}5 \geq t, \quad \hat{T} \in W = \{|\hat{T}| \geq t\}$$

On rejette $H_0 : \mu = 1600$.

b) Sous H_0, $\mathbb{P}_{H_0}(|T| \geq 2{,}58) = 1\%$, c.a.d. $t = 2{,}58$

$|\hat{T}| < t$, $\hat{T} \notin W$, On ne rejette pas $H_0 : \mu = 1600$.

2. Avec les notations précédentes, on a sous H_0

$$T = \frac{\overline{X}_n - 1600}{\frac{120}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

La valeur observée de T est $\hat{T} = \dfrac{1580 - 1600}{\frac{120}{\sqrt{n}}} = -\dfrac{\sqrt{n}}{6}$. Si au risque d'erreur de 5%, H_0 est rejeté, c'est que $|\hat{T}| \geq 1{,}96$, donc

$\frac{\sqrt{n}}{6} \geq 1{,}96$, $n \geq (1{,}96 \times 6)^2 \approx 138$.

exo 2.

méthode 1.

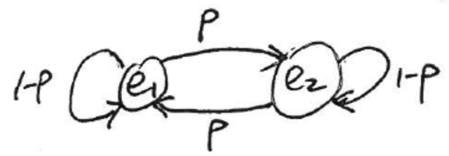
1. $\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_n=x_n, \cdots, X_0=x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_n=x_n)$

(L'évenement $\{X_{n+1}=x_{n+1}\} = \{U_{n+1}X_n = x_{n+1}\}$ ne dépend que X_n et U_{n+1}. Puisque $X_n = \prod_{i=1}^{n} U_i\, a$ et (U_n) sont indépendantes, U_{n+1} est indépendante de tout X_i pour $i \leq n$, c.a.d. U_{n+1} est indépendante de tous le passé $X_0, \cdots, X_n$. Donc méthode 2. $X_{n+1} = U_{n+1}X_n$ ne dépend que du passé immédiat X_n.)

2. $E=\{a, -a\}$. Notons $e_1=a$, $e_2=-a$, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=e_1 \mid X_n=e_1) = 1-p$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1}=e_2 \mid X_n=e_1) = p$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1}=e_1 \mid X_n=e_2) = p$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1}=e_2 \mid X_n=e_2) = 1-p$$

Donc $M = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$.



3. oui

4. $\mu = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $M\mu = \mu$, $\begin{cases} (1-p)u_1 + pu_2 = u_1 \\ pu_1 + (1-p)u_2 = u_2 \\ u_1 + u_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow u_1 = u_2 = \frac{1}{2}$

5. $L(p, x_0, \cdots, x_n) = \mathbb{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}) \mathbb{P}(X_0 = a)$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{x_i \neq x_{i-1}\}} (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{x_i = x_{i-1}\}}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{x_i \neq x_{i-1}\}} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{x_i \neq x_{i-1}\}}$$

6. $H(p) = \ln L(p) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i \neq x_{i-1}\}} \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i \neq x_{i-1}\}}\right) \ln(1-p)$

$$H'(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{x_i \neq x_{i-1}\}}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{x_i \neq x_{i-1}\}}{1-p} = 0 \Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{x_i \neq x_{i-1}\}}{n}$$

$$H''(p) = -\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i \neq x_{i-1}\}}\right) p^{-2} - \left(n - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{x_i \neq x_{i-1}\}\right)(1-p)^{-2} < 0$$

7. $\mathbb{E}(\hat{p}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{x_i \neq x_{i-1}\}}\right)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(x_i \neq x_{i-1})}{n} = \frac{np}{n} = p$

méthode 1.

① L'estimateur du maximum de vraisemblance est consistant, donc

$$\hat{p} \xrightarrow[n \to \infty]{} p.$$

méthode 2.

② Notons $Y_i = \mathbb{1}\{x_i \neq x_{i-1}\}$. $Y_1, \cdots Y_n$ sont les variables aléatoires i.i.d. de loi Bernoulli de paramètre p. Donc $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \overline{Y_n}$.

Par la loi des grands nombres, $\overline{Y_n} \to \mathbb{E} Y_1 = p$.

méthode 3.

$V(\hat{p}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \frac{p(1-p)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, par l'inégalité de B.T. $\hat{p} \xrightarrow{P} p$.

exo3.

1. $G(u) = \mathbb{P}(U \leq u) = \mathbb{P}(\min(X_1, \cdots, X_n) \leq u) = 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, \cdots, X_n) > u)$

$= 1 - (\mathbb{P}(X_1 > u))^n = 1 - (1 - F(u))^n$

$H(v) = \mathbb{P}(V \leq v) = \mathbb{P}(\max(X_1, \cdots, X_n) \leq v) = (\mathbb{P}(X_1 \leq v))^n = (F(v))^n$

2. $g(u) = G'(u) = -n(1-F(u))^{n-1} \times (-F'(u)) = nf(u)(1-F(u))^{n-1}$

$h(v) = H'(v) = n F(v)^{n-1} \times F'(v) = nf(v) F(v)^{n-1}$

3. $\{V \leq v\} = \{V \leq v, U \leq u\} \cup \{V \leq v, U > u\}$ (1)

et $\{V \leq v, U \leq u\} \cap \{V \leq v, U > u\} = \phi$ (2)

D'après (1) et (2), on a $\mathbb{P}(V \leq v) = \mathbb{P}(V \leq v, U \leq u) + \mathbb{P}(V \leq v, U > u)$

d'où vient $\mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) = \mathbb{P}(V \leq v) - \mathbb{P}(U > u, V \leq v)$.

4. $\mathbb{P}(U > u, V \leq v) = \mathbb{P}(\min(X_1, \cdots, X_n) > u, \max(X_1, \cdots, X_n) \leq v)$

$= \mathbb{P}(u < X_1 \leq v, u < X_2 \leq v, \cdots, u < X_n \leq v)$

$= (\mathbb{P}(u < X_1 \leq v))^n$

$= (\mathbb{P}(X_1 \leq v) - \mathbb{P}(X_1 \leq u))^n$

$= (F(v) - F(u))^n$

5. $F_{(U,V)}(u, v) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) = \mathbb{P}(V \leq v) - \mathbb{P}(U > u, V \leq v)$

$= F_V(v) - (F(v) - F(u))^n$

$= F(v)^n - (F(v) - F(u))^n$

6. $f_{(U,V)}(u, v) = \dfrac{\partial^2 F_{(U,V)}(u, v)}{\partial u \, \partial v}$

$\dfrac{\partial F_{(U,V)}}{\partial u} = -n(F(v) - F(u))^{n-1} \times (-F'(u)) = nf(u)(F(v) - F(u))^{n-1}$

$\dfrac{\partial^2 F_{(U,V)}}{\partial u \, \partial v} = n(n-1) f(u)(F(v) - F(u))^{n-2} \times F'(v) = n(n-1) f(u) f(v) (F(v) - F(u))^{n-2}$

Exo 3

3. méthode 2.

$$\mathbb{P}(U\le u, V\le v) = \mathbb{P}(U\le u \mid V\le v)\,\mathbb{P}(V\le v)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(U\le u, V\le v)}{\mathbb{P}(V\le v)} = \mathbb{P}(U\le u \mid V\le v)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(U\le u, V\le v)}{\mathbb{P}(V\le v)} = 1-\mathbb{P}(U> u \mid V\le v)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(U\le u, V\le v) = \mathbb{P}(V\le v) - \mathbb{P}(U> u, V\le v)$$