Aide TDs de Techniques de Calcul *

N. Jouvin, X. Bacon, A. Lucquiaud

Ce document donne des éléments de correction des exercices du fascicule non effectués en TD. Il vous permet de vérifier vos résultats si besoin. Pour cette raison, la rédaction n'est pas exhaustive, voire inexistante.

1 Semaine 1

[6] Tout est dit. Voir l'exercice 9 traité en TD si cela pose toujours problème.
[7] (a) $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$. (b) Que donne pour $n \in \mathbb{N}$ la quantité $S_{n+1} - S_n$? (c) Automatique. (d) Appliquer l'inégalité précédente n fois de suite. (e) On trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_2 + u_4 + \cdots + u_{2^n} = S_{2^{n+1}} - S_2$. (f) En réunissant tous les résultats établis, on a montré que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, et que la sous-suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par une suite tendant vers $+\infty$. Appliquer le théorème d'encadrement à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour déterminer sa limite, puis étendre ce résultat à $(S_n)_n$ en utilisant la croissance. [1]
[8] (1) Faux. (2) Faux. (3) Vrai. (4) Vrai. (5) Faux. (6) Vrai. (7) Vrai.

2 Semaine 2

[12] (e) Les solutions générales sont de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = w_0 2^n - 1 - n + 2^{(n-1)}n$ où w_0 parcourt $\mathbb{R}$. La solution satisfaisant la condition initiale est donnée par $w_0 = 0$. (f) Les solutions générales sont de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = w_0 4^n - \frac{1}{5}(-1)^n$ où w_0 parcourt $\mathbb{R}$. La solution

*fascicule de TD de M. Bachir

1. Pour voir un exemple d'apparition de cette suite, voir l'excellente vidéo de S. Tapie et J. Viola : `https://www.lebesgue.fr/video/5min/tapie-viola`.

satisfaisant la condition initiale est donnée par $w_0 = -\frac{4}{5}$. (g) Les solutions générales sont de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = w_0 4^n + \frac{1}{3}n - \frac{2}{9} - \frac{1}{5}(-1)^n$ où w_0 parcourt $\mathbb{R}$. La solution satisfaisant la condition initiale est donnée par $w_0 = \frac{109}{45}$.

3 Semaine 3

[16] (1) Les solutions générales sont de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu(-2)^n$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La solution satisfaisant les conditions initiales est donnée par $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. (2) Les solutions générales sont de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)3^n$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La solution satisfaisant les conditions initiales est donnée par $\lambda = 5$ et $\mu = -3$. (3) Les solutions générales sont de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(-3)^n + \mu 3^n$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La solution satisfaisant les conditions initiales est donnée par $\lambda = \frac{7}{3}$ et $\mu = \frac{8}{3}$. (4) Même que la (1)

4 Semaine 4 & 5

[22] (1) On étudie la fonction $\begin{array}{cccc} f & : & D_f & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x^2 - x^3} \end{array}$ définie sur

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x^3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2(1-x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\} =]-\infty; 1]$.

1. Continuité : f continue sur D_f comme composée de fonctions continues.
2. Dérivabilité : f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ comme composée de fonctions dérivables (attention à la dérivabilité de la racine en 0) et :

$$\forall x \in]-\infty; 1[, \quad f'(x) = \frac{x(2-3x)}{2\sqrt{x^2(1-x)}}$$

(2) On étudie la fonction $\begin{array}{cccc} g & : & D_g & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (x^2 - 1)\arccos(x^2) \end{array}$ définie sur :

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in [-1, 1]\} = [-1, 1]$$

1. Continuité : la fonction $x \mapsto \arccos(x^2)$ est continue sur D_g comme composée d'une fonction continue sur [-1,1] à valeurs dans [-1,1] (la

fonction $x \mapsto x^2$) par une fonction continue sur [-1,1] (la fonction arccos). Ainsi, g est continue sur D_g comme produit de cette fonction par une fonction polynomiale.

2. Dérivabilité : la fonction $x \mapsto \arccos(x^2)$ est dérivable sur $]-1,1[$ comme composée d'une fonction dérivable sur $]-1,1[$ à valeurs dans $]-1,1[$ (la fonction $x \mapsto x^2$) par une fonction dérivable sur $]-1,1[$ (la fonction arccos). Ainsi, g est dérivable sur $]-1,1[$ comme produit de cette fonction par une fonction polynomiale. Enfin :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad g'(x) = 2x\left[\arccos(x^2) - \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^4}}\right]$$

.