Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Mémoire présenté par

Denis PENNEQUIN

pour l'obtention de
l'**Habilitation à Diriger des Recherches**

Spécialité : Mathématiques

Contributions aux oscillations multifréquentielles en temps discret et en temps continu

le 2 décembre 2014

Jury :
- M. Jan ANDRES, University Palacky, Olomouc
- M. Joël BLOT, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, Directeur de Recherche
- M. Toka DIAGANA, Howard University, Washington, Rapporteur
- M. Jean-Pierre FRANÇOISE, Université Pierre et Marie Curie, Rapporteur
- M. Georges HADDAD, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, Président du Jury
- M. Pascal LEFÈVRE, Université d'Artois
- M. Alexander PANKOV, Morgan State University, Baltimore
- M. Michel ZINSMEISTER, Université d'Orléans

Table des Matières

1 Les opérateurs de Nemytskii dans les cadres réguliers. 11
1.1 Cadre des fonctions Bohr-presque-périodiques. 11
1.1.1 Continuité de l'opérateur. 11
1.1.2 Différentiabilité de l'opérateur. 12
1.2 Cadre des fonctions Bohr-presque-périodiques jusqu'à l'ordre n. 13
1.3 Le cadre des fonctions asymptotiquement p.p. 14
1.4 Le cadre presqu'automorphe (a.a.) 14

2 Comparaison entre temps discret et temps continu pour les oscillations Stepanov-presque-périodiques. 17
2.1 Rappels sur les fonctions p.p. au sens de Stepanov. 18
2.2 Suites p.p. au sens de Stepanov. 18
2.3 Discrétisation. 20
2.4 Autour de la propriété de Bohl-Bohr. 21
2.4.1 Le théorème de Bohl-Bohr et ses conséquences. 21
2.4.2 Une équation à variables séparées. 22
2.4.3 Non-existence de solutions purement Stepanov p.p. : généralités. 23
2.4.4 Opérateurs de Nemytskii dans les espaces de Stepanov. 24
2.4.5 Non-existence de solutions purement p.p.: exemples. 26

3 Comparaison entre temps discret et temps continu pour les oscillations limites-périodiques. 27
3.1 Définitions et propriétés de base. 27
3.1.1 Suites semi-périodiques. 27
3.1.2 Fonctions continues semi-périodiques. 27
3.1.3 Liens entre suites et fonctions s.p. 30
3.2 Fonctions semi-périodiques uniformément en le paramètre. 30
3.3 Solutions semi-périodiques de système quasi-linéaires discrets et continus. 31
3.3.1 Solutions semi-périodiques de systèmes quasi-linéaires discrets. 31
3.3.2 Solutions semi-périodiques de systèmes quasi-linéaires continus. 31

4 Perturbations singulières de problèmes variationnels pour des oscillations quasi-périodiques. 33
4.1 Rappels. 33
4.2 Lemmes préliminaires. 35
4.3 Le problème. 36
4.3.1 Transformation en un problème sur le tore. 36
4.3.2 Hypothèses et exemples. 37
4.4 Résolution du problème. 38
4.4.1 Étude de l'équation perturbée. 38
4.4.2 Le passage à la limite. 38
4.5 Passage aux solutions p.p. 39

5 Notion de solution variationnelle faible en temps discret et en temps continu. 41
5.1 Technique pour des problèmes continus. 42
5.1.1 Le cadre. 42
5.1.2 Quelques exemples d'espaces. 42
5.1.3 Notion de solution variationnelle faible. 43
5.1.4 Hypothèses communes. 43
5.1.5 Un énoncé préparatoire : Newton. 43
5.1.6 Théorème d'existence et d'unicité dans H^1_G. 44
5.1.7 Existence et unicité dans $H^1_{G,0}$. 44
5.2 Le cadre discret. 45
5.2.1 Rappels sur le cas linéaire autonome. 45
5.2.2 Le premier théorème. 45
5.2.3 Extensions à un opérateur non isométrique. 47
5.2.4 Un cas d'unicité. 48

6 Solutions "mild" presque-périodiques ou pseudo-presque-automorphes d'équations aux dérivées partielles d'évolution. 49
6.1 Solutions pseudo-presque-automorphes. 49
6.1.1 Quelques rappels. 50
6.1.2 Une équation du type Volterra. 51
6.1.3 Solutions p.a.a. dans les espaces intermédiaires. 51
6.1.4 Solutions p.a.a. pour l'équation (6.4). 53
6.2 Solutions pseudo-presque-automorphes à poids. 54
6.2.1 Fonctions pseudo-presque-automorphes à poids. 55
6.2.2 Une équation d'évolution. 56
6.3 Solutions presque-périodiques jusqu'à l'ordre n. 56
6.3.1 Spectre uniforme d'une fonction dans $\mathrm{BC}(\mathbb{R}, E)$. 57
6.3.2 Une équation du type Volterra. 58
6.3.3 Applications aux équations d'évolution. 58

Le travail proposé dans ce mémoire est le résultat d'un long processus. Bien que participant largement aux activités d'enseignement (bien au delà du service) et aux activités administratives dès ma nomination, j'ai toujours continué grâce au soutien de certains collègues une activité de recherche.

Le premier de ces collègues est Joël BLOT. Je l'ai profondément apprécié comme enseignant, alors élève de l'ENSAE, puis comme être humain. Alors que je me destinais à m'orienter vers l'analyse fonctionnelle ou vers les Equations aux Dérivées Partielles, la rencontre avec Joël BLOT a complètement chamboulé mes choix pour les raisons observées plus haut et jamais démenties. Joël a été en mesure de me proposer des sujets qui m'amusaient sur le plan mathématique, pertinents, et qui permettait d'exploiter mon intérêt à la fois pour les questions des mathématiques fondamentales que pour leurs motivations. Joël, au delà de ses qualités connues de tous, a eu l'immense mérite de supporter mes questionnements, mes doutes, nos discussions diverses, et cela depuis de nombreuses années. C'est pour moi un immense plaisir de présenter aujourd'hui cette HDR, que Joël voie que ses efforts ont porté leurs fruits. Bien entendu, cher Joël, je t'exprime un immense merci et espère que notre collaboration sera encore vivante pour longtemps.

Le deuxième de ces collègues a été Jan ANDRES. J'apprécie également énormément les qualités humaines de Jan. Grâce à Jan, j'ai pu orienter mon activité de recherche sur des questions différentes de celles abordées sous l'impulsion de Joël. Le lien discret-continu, qui m'a toujours hanté, a eu des retentissements incroyables sur des questions centrales des solutions Stepanov-presque-périodiques. J'espère que j'aurai encore largement l'occasion de travailler avec Jan. Notre mode de travail sur des questions pertinentes, avec plaisir et sans la pression du *publish or perish* m'a toujours convenu. Jan me fait le plaisir d'être parmi nous pour cette soutenance, j'en suis très ravi. Merci pour tout !

J'ai rencontré Jean-Pierre FRANCOISE il y a maintenant 20 ans de cela, alors qu'il enseignait avec Charles-Michel Marle l'analyse numérique en licence Paris VI. Mon suivi, alors 5/2 de ce cours a été malheureusement fort incomplet, mais chaque fois que j'ai pu m'y rendre, cet enseignement était un vrai plaisir. Plus tard, en tant que chercheur, je n'ai jamais eu l'occasion de travailler directement avec Jean-Pierre, même si j'ai participé à une ANR qu'il a intégralement montée et magistralement pilotée. Je suis plus que sensible à l'immense honneur que me fait Jean-Pierre d'avoir accepté de faire un rapport comme te l'a demandé la commission parisienne des thèses. Merci à toi.

J'ai eu plusieurs fois le plaisir à communiquer avec Toka DIAGANA, que je n'ai pas encore rencontré. Spécialiste de nombreuses questions tournant autour de la presque-périodicité et de ses extensions, je me fais un plaisir du début de collaboration qui se fera lors de sa venue à Paris en mai 2015. Dans l'attente, j'ai été très sensible à l'honneur qu'il me fait en acceptant de rapporter ce mémoire, comme lui a demandé la commission parisienne des thèses. Merci Toka !

Alexander PANKOV est un grand spécialiste des fonctions presque-périodiques. Son livre chez Kluwer fait partie des tous premiers que j'ai acquis. Je suis très sensible à l'immense honneur que me fait Alexander, que je n'ai pas eu encore le plaisir de rencontrer, de participer à ce jury.

J'ai rencontré Pascal LEFÈVRE lors du jury de l'agrégation de mathématiques. L'ambiance de travail avec Pascal a toujours été très sympathique, tout en restant consciencieuse. Cela me fait très plaisir que Pascal prenne de son temps pour lire ce mémoire et ait accepté de participer au jury. Merci à toi, Pascal.

J'ai également rencontré Michel ZINSMEISTER dans le cadre du jury de l'agrégation. J'ai davantage été amené à interroger avec Michel. L'ambiance a également été de qualité avec les franches rigolades et les partages de thés entre deux oraux, puis retour à un travail de qualité lors des interrogations. Michel a également accepté de prendre de son temps pour la lecture de ce mémoire, qu'il soit ici remercié sincèrement.

Enfin, j'ai été surpris et ravi que Georges HADDAD, dont j'avais pu apprécier l'excellent cours de DEA, ait accepté malgré ses nombreuses obligations de participer à ce jury d'HDR. Les discussions diverses avec Georges, mathématiques et autres, ont toujours été passionnantes. Merci à toi !

Bien entendu, ce travail n'aurait pas été possible sans appartenir à des laboratoires où il fait bon travailler. Jean-Bernard BAILLON, Marie COTTRELL et Jean-Marc BARDET ont tous contribué à ce que l'ambiance soit sympathique, et je les remercie chaleureusement pour leur intérêt constant pour notre bien-être. Ce bien-être est également assuré par l'excellente ambiance fournie par mes voisins avec qui je partage le bureau, Mohamed BACHIR et Bruno NAZARET. Les franches rigolades alternent avec les discussions plus mathématiques.

Je ne serai pas ici non plus sans l'excellence de Professeurs qui ont assuré la mission de service public d'enseignement. Mes rencontres avec Yann BLANCHARD en Première, Pierre LAMBERT en Terminale et Anne RAOULT en Spéciales M' ont été décisives. J'ai beaucoup apprécié aussi mes interventions dans la communauté mathématique dans le cadre de l'agrégation. Au delà de l'ensemble des collègues avec lesquels j'ai eu grandement plaisir à travailler, je souhaite remercier les excellents Présidents de Jury avec lesquels j'ai eu plaisir à travailler : Jacques MOISAN, Patrick FOULON puis Charles TOROSSIAN à l'externe, Robert CABANE puis Marc ROSSO à l'interne. Retrouver plus récemment Charles et Robert en dehors de l'agrégation a été également un grand plaisir.

Pour terminer, je salue bien entendu ma famille, mes amis, ainsi que Robert FONTAINE, mon maître ès clarinette.

Lors de ma thèse de doctorat [99], je métais intéressé à plusieurs aspects relatifs aux fonctions (et suites) presque-périodiques (p.p.) au sens de Bohr et au sens de Besicovitch. Rappelons que les définitions de fonctions p.p. $f : \mathbb{R} \to E$ (où E est un espace de Banach) font intervenir trois notions, une norme $\|.\|$ étant choisie sur un espace de fonctions de $\mathbb{R}$ vers E :

- les presque-périodes : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\ell > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un[1] $\tau \in [a, a + \ell]$ de sorte que $\|f(. + \tau) - f(.)\| \leq \varepsilon$.
- la propriété de Bochner : de toute suite de translatées $(f(. + s_n))_n$, on peut extraire une sous-suite convergente pour la norme $\|.\|$;
- la propriété d'approximation : on peut trouver une suite de polynôme trigonométriques $(P_n)_n$ (i.e. $P_n(t) = \sum_{k=1}^{N_n} a_{k,n} e^{i\lambda_{n,k}t}$) convergeant vers f pour la norme $\|.\|$).

Ces notions étendent la périodicité. Dans la première situation, si f est périodique de période T, prenant $\ell > T$ on aura dans $[a, a + \ell]$ au moins un kT ($k \in \mathbb{Z}$) pour lequel la relation est vraie avec égalité à 0. Pour la seconde, on peut toujours réduire les s_n modulo T ce qui fera une suite bornée, puis raisonner par compacité. Enfin, le troisième est liée au théorème de Féjer. Selon les normes que l'on prend, on obtient différentes notions (par exemple Bohr correspond à la norme uniforme), et ces propriétés peuvent ou non être équivalentes.

Nous avions regardé dans la thèse le formalisme quasi-périodique (q.p.) à module de fréquence fixé. Cette classe forme une sous-classe des fonctions p.p. (cf plus bas). Dans ce cadre, une idée du physicien Percival permet de remplacer la recherche de solutions quasi-périodiques en la recherche de solutions périodiques à plusieurs variables d'EDP. Ce formalisme a été développé par Berger et Zhang et par Joël Blot et moi-même. Malheureusement on tombe sur des EDP qui présentent des absences de compacité et des EDP dégénérées (du fait que l'on ne dérive que dans une direction), par conséquent il a été assez naturel de proposer une technique de régularisation par une méthode de perturbations singulières. Ce travail est donc un prolongement direct de la thèse, a donné lieu à une publication et est l'objet du chapitre 4.

Lors de ma thèse, j'avais commencé à développer une notion de solution variationnelle faible. Nous avons poussé la généralité de la technique un peu plus loin, corrigé une erreur. Ce travail a donné lieu à 2 publications et est présenté dans le chapitre 6.

Nous avons également souhaité pousser plus loin l'étude des opérateurs de Nemytskii. Ces opérateurs sont en effet les bons outils pour travailler dans un cadre fonctionnel adéquat. Une étude assez complète a été faite dans un cadre régulier et est présenté dans le chapitre 1 (une publication), mais nous verrons également apparaître, souvent de manière décisive, ces opérateurs dans les autres chapitres.

Cependant, curieusement, les autres directions qui ont été prises par mes travaux se sont franchement éloignées de celles que j'avais initialement imaginées. La rencontre avec G. N'Guérékata m'a fait étudier quelques problèmes d'évolution dans des extensions diverses de la notion de presque-périodicité. La recherche de solutions "mild" de ces équations, après l'étude des espaces adéquats, a été faite dans 4 articles et est présentée dans le chapitre 6.

J'ai été très intéressé par le travail d'Andres, Bersani et Grande sur le défrichage des hiérarchies horizontales et verticales entre les différentes notions de presque-périodicité, et me suis mis à travailler avec Jan Andres sur ces questions. Par *hiérarchie horizontale*, on entend la comparaison des notions de presque-périodicité via les presque-périodes, via la propriété de Bochner et via les polynômes trigonométriques, une norme étant choisie. Par *hiérarchie verticale*, j'entend la comparaison de la même notion (par exemple via les presque-périodes), mais en changeant la norme sur les espaces de fonctions. Un autre aspect est pour d'importance, c'est la comparaison entre le discret et le continu. Qu'y a t-il d'identique, et plus intéressant encore, de différent ?

[1] appelé nombre d'$\varepsilon-$translation

Nous avons commencé à travailler à la construction d'une table des hiérarchies en discret. Celle-ci nous a paradoxalement permis de comprendre pourquoi en temps continu, et contrairement à ce que plusieurs chercheurs croyaient, la notion de solution Stepanov presque-périodique n'est pas si pertinente : les solutions p.p. au sens de Stepanov le seront au sens de Bohr. Il est intéressant de voir que c'est la compréhension du discret, et de son lien avec le continu, qui a permis d'obtenir ce résultat dans beaucoup de situations "usuelles", résultat qui n'était connu auparavant que dans le cadre de systèmes linéaires. Nous avons également commencé la table et la comparaison discret vs continu dans le cas des fonctions *limite-périodiques*. Ces travaux ont donné lieu à 3 publications et sont présentés dans les chapitres 2 et 3.

Description chapitre par chapitre.

Venons-en plus précisément à une vision rapide des outils, résultats, perspectives et publications de chaque chapitre :

Chapitre 1 :

- **Outils :** analyse fonctionnelle non linéaire.
- **Résultats :** étude relativement complète des opérateurs de Nemytskii (ou de superposition) dans les cadres réguliers.
- **Perspectives :** passage au cadre de Stepanov en utilisant la transformation de Bohr, passage aux diverses extensions possibles (presque-automorphes à poids, etc.).
- **Résultats publiés dans :** [36] en 2009 avec J. Blot, P. Cieutat, G. N'Guérékata.

Chapitre 2 :

- **Outils :** théorie des fonctions p.p., théorie des É.D.O. dans des espaces de Banach.
- **Résultats :** étude de la notion de presque-périodicité au sens de Stepanov dans le cadre discret (dont on a montré qu'elle équivaut à la notion de Bohr), étude du lien discret et continu, non existence de solutions p.p. au sens de Stepanov mais pas au sens de Bohr dans des cadres raisonnables. Le rôle de l'opérateur de Nemytskii s'est révélé crucial pour ces questions et donc on en a commencé une étude dans le cadre de Stepanov.
- **Classes d'équations considérées :** $x'(t) = A(t)F_1(x(t)) + F_2(t, X(t))$.
- **Perspectives :** compléter l'étude des opérateurs de Nemytskii dans le cadre de Stepanov permettra d'élargir la classe d'équations n'admettant pas de solutions p.p. au sens de Stepanov et non de Bohr.
- **Résultats publiés dans :** [10, 11] en 2012 avec J. Andres.

Chapitre 3 :

- **Outils :** théorie des fonctions p.p., analyse de Fourier, théorie des É.D.O. dans des espaces de Banach.
- **Résultats :** le premier but a été de compléter l'étude des suites et fonctions semi-périodiques, également appelées limites-périodiques. Nous avons adapté aux Banach les premières définitions, fait une caractérisation en terme d'analyse de Fourier. Comme dans le cadre q.p., on regarde une sous classe des fonctions ou suites Bohr p.p., au lieu de l'élargir comme on le fait lorsqu'on travaille dans le cadre de Stepanov. Encore une fois, nous avons été intéressé par le lien entre discret et continu, et les spécificités de chacun. Typiquement, l'opérateur de Nemytskii se comporte différemment en discret et continu. Les techniques de résolutions proposées sont alors différentes.

- **Classes d'équations considérées :** $x'(t) + Ax(t) = f(t, x(t))$ et $x_{t+1} + Ax_t = f(t, x_t)$.
- **Perspectives :** il y a eu pas mal de publications sur les solutions semi-périodiques. En même temps, il nous semble que la hiérarchie et la comparaison discret-continu (qui donne des résultats très différents ici) mérite amplement d'être développée.
- **Résultats publiés dans :** [12] en 2012 avec J. Andres.

Chapitre 4 :

- **Outils :** méthodes variationnelles dans des espaces du type de Sobolev, analyse convexe, méthodes des perturbations singulières.
- **Résultats :** on donne des résultats d'existence de solutions q.p. à module de fréquences fixées et de solutions p.p. en régularisant des problèmes.
- **Classes d'équations considérées :** les équations contiennent en particulier des équations du type $q''(t) = \varphi(t)f'(q(t)) + \psi(t)$ avec f convexe.
- **Perspectives :** la méthode demande à être appliquée dans beaucoup de situations.
- **Résultats publiés dans :** [41] en 2006 avec J. Blot.

Chapitre 5 :

- **Outils :** formulation variationnelle des E.D.P., méthode de Newton.
- **Résultats :** on définit une notion de solution variationnelle faible adaptée des techniques de formulation variationnelle des EDP elliptiques linéaires. Le formalisme est assez général, mais distingue tout de même clairement des situations type "discret" ou "continu". Cependant il est écrit pour des opérateurs qui ne sont pas nécessairement la dérivation ou le schift.
- **Classes d'équations considérées :** $u''(t) = F(t, u(t), u'(t))$ et en discret $A(t, x_t, \dots, x_{t+p}) = 0$ (avec à chaque fois un "terme dominant").
- **Perspectives :** pour l'instant les hypothèses sont très fortes et je ne doute pas de la possibilité de retravailler plus finement les choses. En plus le retour des solutions variationnelles faibles aux solutions faibles n'est pas systématique (et peut être faux) et ceci mérite également une étude.
- **Résultats publiés dans :** [102] et [103] en 2013 et 2014.

Chapitre 6 :

- **Outils :** théorie des semi-groupes pour des EDP paraboliques, théorie des fonctions p.p., analyse fonctionnelle non linéaire.
- **Résultats :** nous obtenons des résultats d'existence pour des équations de Volterra et pour des équations d'évolution dans des cadres de fonctions pseudo-presque automorphes (éventuellement à poids) et dans un cadre C^n-presque-périodiques.
- **Classes d'équations considérées :** des équations du type de Volterra et des équations de la forme $\frac{d}{dt}[u(t) + f(t, u(t))] = Au(t) + g(t, u(t))]$ avec en général $f = 0$
- **Perspectives :** les techniques étant souvent proches, il me semble qu'il serait intéressant d'établir un énoncé tout à fait général.
- **Résultats publiés dans :** [13, 38, 37, 96].

Quelques rappels et notations.

Nous indiquons ici quelques rappels ainsi que les notations de base communes à plusieurs chapitres. Les notations spécifiques à un chapitre seront introduites dans le chapitre en question.

Dans tout le mémoire E, F désignent des espaces de Banach. Afin d'éviter d'alourdir les notations relatives aux normes, nous réserverons la notation $\|.\|$ aux espaces de fonctions, notant alors $|.|_E$ la norme dans E (notation similaire pour F). H désigne un espace de Hilbert, de produit scalaire $\langle .,.\rangle_H$.

On note $\mathrm{C}(X,Y)$ ou $\mathrm{C}^0(X,Y)$ (X et Y étant deux espaces métriques) l'espace des fonctions continues de X dans Y, et $\mathrm{BC}(X,Y)$ ou $\mathrm{BC}^0(X,Y)$ le sous-espace des fonctions continues bornées de X dans Y. Lorsque $X=\mathbb{R}$, on pourra abréger les notations en $\mathrm{C}(Y)$, etc. On note $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R},E)$ (le 0 et le $\mathbb{R}$ pouvant être omis) l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr, c'est-à-dire qui vérifient l'une des conditions équivalentes indiquées plus haut lorsque la norme choisie est la norme $\|.\|_\infty$. On rappelle que $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R},E)$ est un sous-espace de Banach de $\mathrm{BC}^0(\mathbb{R},E)$, qui peut être vu également comme l'espace des fonctions continues sur le compactifié de Bohr $b\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ (un groupe topologique compact dans lequel $\mathbb{R}$ s'injecte de manière dense).

Toute fonction Bohr-p.p. admet une moyenne :

$$\mathcal{M}\{f\}=\mathcal{M}\{f(t)\}_t=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

et un développement en série de Fourier-Bohr :

$$f\sim\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}a_\lambda(f)e_\lambda,$$

où $e_\lambda(t)=e^{i\lambda t}$ et $a_\lambda(f)=\mathcal{M}\{f(t)e_{-\lambda}(t)\}_t$. On a convergence en moyenne quadratique, ainsi que la relation de Parseval :

$$\mathcal{M}\{|f(t)|_E^2\}_t=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}|a_\lambda(f)|_E^2.$$

La synthèse harmonique est réalisée lorsque $E=H$ dans un espace plus général, qui est l'espace des fonctions p.p. au sens de Besicovitch. Ces espaces jouent le rôle d'espace L^2, et ainsi J. Blot a défini une notion de dérivée faible dans ces espaces, permettant d'avoir un formalisme type espaces de Sobolev.

On sait que l'ensemble

$$\Lambda(f)=\{\lambda\in\mathbb{R},a_\lambda(f)\neq 0\}$$

est au plus dénombrable (on notera qu'il est inclus dans un $\frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}$ si et seulement si f est $T-$périodique). On note $\mathrm{M}od(f)$ le module qu'il engendre sur $\mathbb{Z}$. Par définition, une fonction est quasi-périodique (q.p.) lorsque $\mathrm{M}od(f)$ est libre de type fini, c'est-à-dire lorsqu'il existe un entier $N\geq 1$ et une liste $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_N)$ de N réels linéairement indépendants tels que :

$$\mathrm{M}od(f)=\mathbb{Z}\omega_1+\ldots+\mathbb{Z}\omega_N.$$

On note $QP^0(\mathbb{R},E)$ l'espace des fonctions Bohr-q.p., et $QP^0_\omega(\mathbb{R},E)$ celles pour lesquelles $\mathrm{M}od(f)\subset\mathbb{Z}\omega_1+\ldots+\mathbb{Z}\omega_N$.

Liste des publications de l'auteur de l'Habilitation à diriger des recherches :

- **présentées dans ce mémoire :** [10, 11, 12, 13, 36, 37, 38, 41, 96, 102, 103] ;
- **non présentées dans ce mémoire :** [39, 40, 100, 101].

Chapitre 1

Les opérateurs de Nemytskii dans les cadres réguliers.

Étant donnés deux ensembles X et Y et une fonction $f : \mathbb{R} \times X \longrightarrow Y$, l'opérateur de superposition (ou de Nemytskii) construit sur f est :

$$\mathcal{N}_f : [t \mapsto u(t)] \longmapsto [t \mapsto f(t, u(t))].$$

Cet opérateur est un ingrédient de base lorsqu'on veut utiliser des méthodes d'analyse fonctionnelle non linéaire. En effet, on souhaite transformer notre problème en la recherche de zéro ou de point fixe d'opérateurs qui doivent être alors correctement définis entre espaces. L'opérateur de Nemytskii permet de prendre en compte une sorte de composition "non autonome".

On est alors à la recherche d'hypothèses assurant que cet opérateur envoie un espace de fonctions précis dans un espace de fonctions précis. Typiquement, ici nous sommes intéressés par la stabilité d'espaces de fonctions presque-périodiques divers, et d'extensions d'espaces de fonctions presque-automorphes.

1.1 Cadre des fonctions Bohr-presque-périodiques.

1.1.1 Continuité de l'opérateur.

Dans cette section, X et Y sont des espaces métriques. Les hypothèses assurant que le Nemytskii envoie un espace de fonctions p.p. AP^0 dans un espace du même type sont bien connues : la condition suffisante est que f soit p.p. uniformément en le paramètre. Elle a été introduite par Yoshisawa [121]. Rappelons cette notion :

Définition 1.1.1 *On appelle* $\mathrm{APU}(\mathbb{R} \times X, Y)$ *l'espace des fonctions* $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ *continues telles que pour toute partie* K *compacte de* X *(*$K \in \mathcal{P}_c(X)$*) et tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\ell = \ell(K, \epsilon) > 0$ *t.q. pour tout* $r \in \mathbb{R}$*, il existe* $\tau \in [r, r + \ell]$ *satisfaisant :*

$$\sup_{(t,x) \in \mathbb{R} \times K} d_Y(f(t + \tau, x), f(t, x)) \leq \epsilon.$$

cf [121] Definition 2.1 p. 5-6., [35], [39], [15], [79], [129] Section 3.4 dans Chapter 3 p. 175. On notera qu'une fonction continue de x et ne dépendant pas de t satisfait cette hypothèse ; une fonction p.p. en t et ne dépendant pas de x également.

On rappelle que lorsque $f \in \mathrm{APU}(\mathbb{R} \times X, Y)$ et $u \in \mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, X)$, on a ; $[t \mapsto f(t, u(t))] \in \mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, Y)$ (cf par exemple [53], Théorème de la section 2 , Chapitre 1, p. 7. Ce théorème ne nécessite pas X séparable et donc améliore celui de Yoshizawa. Ainsi, $\mathcal{N}_f$ envoie $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, X)$ dans $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, Y)$. On retrouve ainsi le cas particulier de la composition. On notera aussi que l'on établit que la condition proposée par Yoshisawa est également nécessaire.

Théorème 1.1.2 *Soit $f \in \mathrm{APU}(\mathbb{R}\times X, Y)$. Alors $\mathcal{N}_f$ est continu de $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, X)$ sur $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, Y)$. Réciproquement, si $\mathcal{N}_f$ est continu de $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, X)$ sur $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, Y)$, alors $f \in \mathrm{APU}(\mathbb{R} \times X, Y)$.*

Nous avons présenté trois démonstrations distinctes du sens direct de ce résultat. La première, due à P. Cieutat [53] se base le fait que la continuité équivaut à la continuité des restrictions aux parties compactes. La seconde utilise l'extension du théorème de Heine présentée dans les cours d'analyse de L. Schwartz :

Lemme 1.1.3 *Soit X et Y deux espaces métriques, K un compact de X et $f \in \mathrm{C}^0(X, Y)$. Alors :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (x, y) \in K \times X, \quad [d(x, y) < \delta] \Rightarrow [d(f(x), f(y)) < \varepsilon].$$

On notera que contrairement au lemme classique de Heine, il suffit que l'un des deux termes varie dans le compact pour avoir la conclusion. Typiquement, à moins d'être dans un e.v.n. de dimension finie, y ne variera pas dans un ensemble relativement compact. La troisième se ramène grâce à la compactification de Bohr au cadre continu, pour lequel nous avons :

Lemme 1.1.4 *Si A est un compact et $F : A \times X \to Y$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est continu $A \times X$.*

(ii) *L'opérateur de superposition $\mathcal{N}_F : \mathrm{C}^0(A, X) \to \mathrm{C}^0(A, Y)$ est correctement défini et continu.*

Pour le sens réciproque du théorème se démontre en plusieurs étapes. En appliquant $\mathcal{N}_f$ aux fonctions constantes, on démontre que $f(., x)$ est p.p. pour tout x. La continuité uniforme de $x \mapsto f(., x)$, obtenue par Heine et la composition, couplée au critère de Bochner, permet au final de récupérer la condition sur les presque-périodes. On montre enfin la continuité de f sur le produit en raisonnant sur des produits de compacts.

On récupère comme conséquence de la réciproque dans le cas autonome :

Corollaire 1.1.5 *Soit $\phi : X \to Y$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *ϕ est continu de X vers Y.*

(ii) *L'opérateur de superposition $u \mapsto \phi \circ u$ est continu de $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, X)$ sur $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, Y)$.*

Remarque 1.1.6 *Les résultats demeurent valables lorsqu'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^+$ ou par un groupe abélien localement compact.*

1.1.2 Différentiabilité de l'opérateur.

Ici, X et Y sont des espaces de Banach, que l'on notera E et F.

Théorème 1.1.7 *Soit $f \in \mathrm{APU}(\mathbb{R}\times E, F)$ telle que la Fréchet-différentielle partielle $D_x f(t, x)$ existe pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times E \times \mathbb{R}$. On suppose de plus que $D_x f \in \mathrm{APU}(\mathbb{R} \times E, \mathcal{L}(E, F))$. Alors $\mathcal{N}_f$ est de classe C^1 de $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, E)$ vers $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, F)$, et :*

$$\forall u, v \in \mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, E), \quad D\mathcal{N}_f(u).v = [t \mapsto D_x f(u(t), t).v(t)].$$

Le point crucial de la démonstration est l'utilisation de l'inégalité de la moyenne :

$$|f(t, u(t)+v(t)) - f(t, u(t)) - D_x f(t, u(t)).v(t)|_F \leq \sup_{\zeta \in]0;1[} \|D_x f(t, \zeta) - D_x f(t, u(t))\|_{\mathcal{L}(E,F)} |v(t)|_E.$$

Par récurrence, on obtient la version suivante :

Théorème 1.1.8 *Soit $f \in \mathrm{APU}(\mathbb{R} \times E, F)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la différentielle partielle $D_x^n f(t,x)$ existe pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times E$, et que $D_x^k f \in \mathrm{APU}(\mathbb{R} \times E, \mathcal{L}_k(E^k, F))$ Pour tout $k = 1, ..., n$. Alors $\mathcal{N}_f$ est de classe C^n de $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, E)$ vers $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, F)$, et de plus, pour tout $u, v_1, ..., v_n \in \mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, E)$ on a : $D^n\mathcal{N}_f(u).(v_1, ..., v_n) = [t \mapsto D_x^n f(t, u(t)).(v_1(t), ..., v_n(t)]$.*

On obtient bien entendu le corollaire suivant :

Corollaire 1.1.9 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\phi \in \mathrm{C}^n(E, F)$. Alors $u \mapsto \phi \circ u$ est de classe C^n de $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, E)$ vers $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, F)$, et pour tout $u, v_1, ..., v_n \in \mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, E)$, on a : $D^n\mathcal{N}_\phi(u).(v_1, ..., v_n) = [t \mapsto D^n\phi(u(t)).(v_1(t), ..., v_n(t))]$.*

On propose une illustration de ces opérateurs avec une application du théorème des fonctions implicites un problème de perturbation :

$$u'(t) = f_0(t, u(t)) + \epsilon.f_1(t, u(t)).$$

.

On suppose que lorsque $\epsilon = 0$, cette équation a une solution $u_* \in \mathrm{AP}^1(\mathbb{R}, E)$, que la différentielle partielle de f_0 par rapport à x existe et que le problème linéarisé autour de u_* a une unique solution :

pour tout $b \in \mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, E)$ il existe une unique $v \in \mathrm{AP}^1(\mathbb{R}, E)$ t.q. $v'(t) = D_x f_0(t, u_*(t)).v(t) + b(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Philippe Cieutat donne dans [53] des exemples de conditions assurant cette propriété ; par exemple dans un espace de Hilbert H, une propriété du type :

$$\inf_{x \neq 0} \left[\frac{\langle D_x f_0(t, u_*(t))x, x \rangle_H}{|x|_H^2} \right] > 0$$

est suffisante. On peut alors obtenir :

Théorème 1.1.10 *On suppose que $f_0, f_1 \in \mathrm{APU}(\mathbb{R} \times E, E)$, que $D_x f_0$ et $D_x f$ existent partout et sont $\mathrm{APU}(\mathbb{R} \times E, \mathcal{L}(E, E))$. Sous les hypothèses précédentes, il existe $\epsilon_0 > 0$ et une fonction de classe C^1 $\epsilon \mapsto u_\epsilon$ de $]-\epsilon_0, \epsilon_0[$ vers $\mathrm{AP}^1(\mathbb{R}, E)$ t.q. pour tout $\epsilon \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[$, u_ϵ est une solution p.p. du problème perturbé.*

La démonstration consiste à appliquer le théorème des fonctions implicites à l'opérateur T défini par $T(u, \epsilon) := [t \mapsto u'(t) - f_0(u(t), t) - \epsilon.f_1(u(t), t)]$, qui fait clairement apparaître les opérateurs de superposition qui auront les propriétés requises.

1.2 Cadre des fonctions Bohr-presque-périodiques jusqu'à l'ordre n.

Par récurrence sur n, on établit :

Théorème 1.2.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathrm{APU}(\mathbb{R} \times E, F) \cap \mathrm{C}^n(\mathbb{R} \times E, F)$ t.q. $D^k f \in \mathrm{APU}(\mathbb{R} \times E, \mathcal{L}_k((\mathbb{R} \times E)^k, F))$ pour tout $k = 1, ..., n$. Alors $\mathcal{N}_f$ est bien défini et continu de $\mathrm{AP}^n(\mathbb{R}, E)$ vers $\mathrm{AP}^n(\mathbb{R}, F)$. Si de plus f est de classe C^{n+1}, alors $\mathcal{N}_f$ est de classe C^1, et*

$$D\mathcal{N}_f(u).v = [t \mapsto D_x f(t, u(t)).v(t)].$$

1.3 Le cadre des fonctions asymptotiquement p.p.

E étant un espace de Banach, $\mathrm{AAP}(\mathbb{R}^+, E)$ désigne l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^+$ vers E qui sont asymptotiquement presque-périodiques (cf. [122]). On rappelle que $u \in \mathrm{AAP}(\mathbb{R}^+, E)$ signifie que $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in \mathrm{AP}^0(\mathbb{R}^+, E)$ et $u_2 \in C_0^0(\mathbb{R}^+, E)$ (i.e. $u_2 \in C^0(\mathbb{R}^+, E)$ et a une limite nulle en $+\infty$). $\mathrm{AAP}(\mathbb{R}^+, E)$ est un sous espace de Banach de $BC^0(\mathbb{R}^+, E)$. Comme dans Zaidman, [71], une application $f : \mathbb{R}^+ \times E \to F$ sera dite *asymptotiquement p.p. en t uniformément en x* si f est continue et satisfait : pour tout $K \in \mathcal{P}_c(E)$, et tout $\epsilon > 0$, il existe $T = T(K, \epsilon) \geq 0$ et $\ell = \ell(K, \epsilon) > 0$ t.q., pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, il existe $\tau \in [r, r + \ell]$ satisfaisant $|f(t + \tau, x) - f(t, x)|_F \leq \epsilon$ pour tout $x \in K$ et tout $t \geq T$. Leur ensemble sera noté $\mathrm{AAPU}(\mathbb{R}^+ \times E, F)$.

Les lemmes cruciaux du cadre p.p. sont adaptables du fait que la partie perturbation tend vers 0 (uniformément sur tout compact). On peut donc également démontrer les lemmes centraux :

Lemme 1.3.1 *Soit $f \in AAPU(\mathbb{R}^+ \times E, F)$ et $K \in \mathcal{P}_c(E)$. Alors la restriction de f à $\mathbb{R}^+ \times K$ est uniformément continue.*

Lemme 1.3.2 *Soit $f \in \mathrm{AAPU}(\mathbb{R}^+ \times E, F)$. Alors pour tout $K \in \mathcal{P}_c(X)$ et $\epsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(K, \epsilon) > 0$ t.q., pour tout $x \in K$ et tout $z \in E$, si $|x - z|_E \leq \delta$ alors on a : $|f(t, x) - f(t, z)|_F \leq \epsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.*

Théorème 1.3.3 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \times E \to F$. Alors les deux assertions sont équivalentes.*

(i) *$f \in \mathrm{AAPU}(\mathbb{R}^+ \times E, F)$.*

(ii) *$\mathcal{N}_f$ est continu de $\mathrm{AAP}(\mathbb{R}^+, E)$ vers $\mathrm{AAP}(\mathbb{R}^+, F)$.*

1.4 Le cadre presqu'automorphe (a.a.)

Ici, X est un métrique et F est un Banach. Les fonctions presqu'automorphes (a.a.), introduites par Bochner [43], [44], [95], étendent la classe des fonctions p.p. On note leur ensemble $\mathrm{AA}(\mathbb{R}, X)$. On rappelle que $u \in \mathrm{AA}(\mathbb{R}, X)$ signifie que $u \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, X)$ et que de toute suite $(s'_n)_n$ on peut extraire une sous-suite $(s_n)_n$ t.q. $\lim_{m \to \infty} u(t - s_m)$ existe dans X pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \to \infty}(\lim_{m \to \infty} u(t - s_m + s_n)) = u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On introduit alors une nouvelle notion :

Définition 1.4.1 *On dit que $f : \mathbb{R} \times X \to F$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, est presqu'automorphe en t uniformément en x si :*

(1) pour tout $x \in X$, $f(., x) \in \mathrm{AA}(\mathbb{R}, F)$.

(2) pour tout $K \in \mathcal{P}_c(X)$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(K, \epsilon) > 0$ t.q. pour tous $x, z \in K$, si $d(x, z) \leq \delta$ alors $d(f(t, x), f(t, z)) \leq \epsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On note leur ensemble $\mathrm{AAU}(\mathbb{R} \times X, Y)$.

Remarque 1.4.2 *Comme dans le cadre classique, les deux conditions sont équivalentes au fait que $\Phi \in C^0(X, \mathrm{AA}(\mathbb{R}, Y))$, où $\Phi(x) := [t \mapsto f(t, x)]$.*

Le point crucial est le résultat d'approximation suivant, conséqunce du théorème d'approximation de Schauder (cf. Remarque 1, p. 90 dans [48] où p. 116-117 dans [67]).

Ici, X est un espace métrique complet et F un Banach.

Lemme 1.4.3 *Soit* $f \in \mathrm{AAU}(\mathbb{R} \times X, F)$*,* $K \in \mathcal{P}_c(X)$*, et* $n \in \mathbb{N}^*$*. Alors il existe* $N_n \in \mathbb{N}^*$*,* $c_j^n \in \mathrm{C}^0(K, \mathbb{R})$ *et* $a_j^n \in \mathrm{AA}(\mathbb{R}, F)$ *pour tout* $j = 1, ..., N_n$ *de sorte que pour tout* $x \in K$ *et* $t \in \mathbb{R}$*, on aie :*

$$\left| \sum_{j=1}^{N_n} c_j^n(x) a_j^n(t) - f(x,t) \right|_F \leq \frac{1}{n}.$$

Ce lemme permet de montrer que l'opérateur de superposition $\mathcal{N}_f$ est correctement défini de $\mathrm{AA}(\mathbb{R}, X)$ vers $\mathrm{AA}(\mathbb{R}, F)$ lorsque $f \in \mathrm{AAU}(\mathbb{R} \times X, F)$.

On en arrive au théorème central :

Théorème 1.4.4 *Soit* $f : \mathbb{R} \times X \to F$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in \mathrm{AAU}(\mathbb{R} \times X, F)$.

(ii) $\mathcal{N}_f$ *est continu de* $\mathrm{AA}(\mathbb{R}, X)$ *vers* $\mathrm{AA}(\mathbb{R}, F)$.

Et bien entendu, on peut démontrer comme dans le cadre p.p. :

Théorème 1.4.5 *Si* E *et* F *sont des Banach,* $f \in \mathrm{AAU}(\mathbb{R} \times E, F)$ *admet partout une différentielle partielle* $D_x f$ *appartenant à* $\mathrm{AAU}(\mathbb{R} \times E, \mathcal{L}(E, F))$*, alors* $\mathcal{N}_f$ *est Fréchet-dérivable de* $\mathrm{AA}(\mathbb{R}, E)$ *vers* $\mathrm{AA}(\mathbb{R}, F)$*, et on a:*

$$D\mathcal{N}_f(u).v = [t \mapsto D_x f(t, u(t)).v(t)].$$

Chapitre 2

Comparaison entre temps discret et temps continu pour les oscillations Stepanov-presque-périodiques.

Le travail présenté dans ce chapitre a été effectué avec Jan Andres et a donné lieu à deux publications [10], [11]. Nous étions intéressés par plusieurs aspects autour des solutions p.p. au sens de Stepanov, qui se sont avérés être davantage imbriqués que nous l'avions cru initialement :

- définir et étudier la notion de suite p.p. au sens de Stepanov, en vue notamment de faire une table de hiérarchies horizontales et verticales telle celle faite par Andres, Bersani, Grande [7] et [8] ;

- étudier le lien entre suites et fonctions p.p. au sens de Stepanov ;

- étudier le lien entre une solution d'un système en temps continu et ses discrétisées, problème déjà initié par Meisters, [89] ;

- étendre au cadre non linéaire le résultat de Tarallo [112], montrant que la notion de solution purement Stepanov-p.p. (i.e. Stepanov-p.p. mais pas Bohr-p.p.) n'est pas si pertinente.

De façon surprenante, c'est l'étude des systèmes discrets qui nous a mis sur la voie pour répondre de manière élémentaire à la dernière question. Un point important est le fait que la notion de suite p.p. au sens de Stepanov n'est en fait pas pertinente ; en effet, elle est identique à la notion de Bohr pour les suites. Un autre point essentiel, de mon point de vue, est l'importance du rôle joué par l'opérateur de Nemytskii. Celui-ci apparaît dans un énoncé précisant un résultat de Bohl-Bohr. Nous répondons négativement (dans les situations usuelles) à une question de Hu et Mingarelli, et obtenons de manière plus élémentaire des résultats plus généraux que ceux de Tarallo qui ne concernaient que le cas linéaire.

Par défaut, dans ce chapitre, le terme borné (sans précision de la norme) signifiera borné au sens de $\|.\|_\infty$.

2.1 Rappels sur les fonctions p.p. au sens de Stepanov.

On se donne deux fonctions localement intégrables $f, g \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, E)$. On définit ainsi les normes de Stepanov :

$$\|f\|_{\mathrm{S}^p_{\mathrm{L}}} := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{L}\int_x^{x+L} |f(t)|_E^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

On rappelle que l'on peut se limiter à $L = 1$ (remarque qui sera cruciale dans le cadre discret), les normes obtenues étant équivalentes entre elles. On travaillera donc désormais avec $\|\cdot\|_{\mathrm{S}^p} = \|\cdot\|_{\mathrm{S}^p_1}$. Pour $p = 1$, nous écrirons simplement $\|\cdot\|_{\mathrm{S}}$ $(= \|\cdot\|_{\mathrm{S}^1})$.

Définition 2.1.1 *Une fonction $f \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, E)$ est* p.p. au sens de Stepanov *($\mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\ell > 0$ de sorte que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un $\tau \in [a, a+\ell]$ satisfaisant :*

$$\|f(.+\tau) - f(.)\|_{\mathrm{S}^p} < \varepsilon.$$

Sans difficulté majeure, cette définition s'étend aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach. L'espace des fonctions S_{ap} est un Banach et peut être de manière équivalente défini par la propriété de normalité ou par l'approximation via des polynômes trigonométriques (cf. [8, 9]).

Pour la suite, nous aurons besoin d'un espace de Stepanov correspondant à $p = \infty$, que l'on allons définir. Considérons les fonctions $f \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, E)$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\ell > 0$ de sorte que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un $\tau \in [a, a+\ell]$ satisfaisant :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f\chi_{[x,x+1]}\|_\infty < +\infty$$

(ce qui revient à faire $p = \infty$ dans la définition des espaces de Stepanov). En fait, on récupère $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}, E)$ puisqu'on vérifie facilement que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f\chi_{[x,x+1]}\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Nous sommes alors en mesure de considérer l'espace $\mathrm{S}^\infty_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$ des fonctions $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}, E)$ pour lesquelles $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble relativement dense $(\tau_\varepsilon)_\varepsilon$ t.q. pour tout $\tau \in \{\tau_\varepsilon\}_\varepsilon$:

$$\|f(.+\tau) - f(.)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Cet espace contient toutes les fonctions Bohr p.p., mais aussi, par exemple, toute fonction mesurable périodique bornée pour la norme $\|.\|_\infty$.

Remarque 2.1.2 *On peut montrer que pour toute f mesurable, on a (éventuellement dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec un abus de notation) :*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{\mathrm{S}^p} = \|f\|_\infty.$$

2.2 Suites p.p. au sens de Stepanov.

Fixons une suite $\underline{x} := (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in E^{\mathbb{Z}}$, à valeurs dans un espace de Banach E. Rappelons la définition d'une suite p.p. au sens de Bohr et le lien avec les fonctions p.p. au sens de Bohr (cf. [41, 54, 56, 100]).

Définition 2.2.1 Une suite $\underline{x}$ est p.p. (au sens de Bohr) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que tout ensemble de N entiers consecutifs $\{m, \ldots, m+N\}$ contienne un $p \in \{m, \ldots, m+N\}$ satisfaisant $|x_{k+p} - x_k|_E < \varepsilon$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. p est appelé une *ε-presque-période* de $\underline{x}$.

On peut, à partir de $\underline{x}$, définir son interpolée $f_{\underline{x}}\colon \mathbb{R} \to E$ par :

$$f_{\underline{x}}(k+\theta) := x_k + \theta(x_{k+1} - x_k),$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [0,1]$. On sait que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\underline{x}$ est (Bohr) p.p. ;
- $f_{\underline{x}}$ est (Bohr) p.p. ;
- Il existe une fonction p.p. $f\colon \mathbb{R} \to E$ telle que $f(k) = x_k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Nous allons expliquer ici que les suites p.p. au sens de Stepanov sont en fait p.p. au sens de Bohr. Définissons un analogue discret de la norme de Stepanov (lorsque $p=1$, nous traiterons les autres valeurs de p plus bas) via la formule :

$$\|\underline{x}\|_{\mathcal{S}^1_{\mathrm{T}}} := \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{T+1} \sum_{k=n}^{n+T} |x_k|_E \right) \in [0,\infty], \quad \text{pour } T \in \mathbb{N}.$$

On constate que $\|\underline{x}\|_{\mathcal{S}^1_0} = \|\underline{x}\|_\infty$.

Posons

$$\mathcal{S}^1_{\mathrm{T}} := \{\underline{x} \mid \|\underline{x}\|_{\mathcal{S}^1_{\mathrm{T}}} < \infty\}.$$

Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, E)$. On rappelle ici l'expression de la norme de Stepanov, et on introduit une autre norme, où la borne supérieure est seulement prise sur $\mathbb{Z}$, vu le lien que l'on souhaite faire entre discret et continu :

$$\|f\|_{\mathrm{S}^1_1} := \sup_{a\in\mathbb{R}} \left(\int_a^{a+1} |f(t)|_E \, dt \right) \in [0,\infty],$$

$$\|f\|_{\mathrm{S}^1_{1,\mathbb{Z}}} := \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_n^{n+1} |f(t)|_E \, dt \right) \in [0,\infty],$$

et on définit les espaces S^1_1 et $\mathrm{S}^1_{1,\mathbb{Z}}$ par :

$$\mathrm{S}^1_1 := \{f \mid \|f\|_{\mathrm{S}^1_1} < \infty\} \quad \text{and} \quad \mathrm{S}^1_{1,\mathbb{Z}} := \{f \mid \|f\|_{\mathrm{S}^1_{1,\mathbb{Z}}} < \infty\}.$$

L'espace S^1_1 (resp. $\mathrm{S}^1_{1,\mathbb{Z}}$) muni de $\|.\|_{\mathrm{S}^1_1}$ (resp. $\|.\|_{\mathrm{S}^1_{1,\mathbb{Z}}}$), est un espace vectoriel normé.

Le point crucial est le lemme suivant :

Lemme 2.2.2 *Pour tout $\underline{x} \in E^{\mathbb{Z}}$, $T \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, E)$, nous avons :*

(i) $\|\underline{x}\|_{\mathcal{S}^1_0} = \|\underline{x}\|_\infty$;

(ii) $\frac{1}{T+1}\|\underline{x}\|_\infty \le \|\underline{x}\|_{\mathcal{S}^1_{\mathrm{T}}} \le \|\underline{x}\|_\infty$;

(iii) $\|f\|_{\mathrm{S}^1_{1,\mathbb{Z}}} \le \|f\|_{\mathrm{S}^1_1} \le 2\|f\|_{\mathrm{S}^1_{1,\mathbb{Z}}}$;

(iv) $\|f\|_{\mathrm{S}^1_1} \le \|f\|_\infty$;

(v) $\|f_{\underline{x}}\|_\infty = \|\underline{x}\|_\infty$.

Il faut remarquer que (i) et (ii) impliquent $\mathrm{S}^1_T = \ell^\infty$ pour tout $T \in \mathbb{N}^*$, et que les normes ci-dessus définies sur $\mathrm{S}^1_T = \ell^\infty$ sont équivalentes. De plus, (iv) assure que $\mathrm{S}^1_1 = \mathrm{S}^1_{1,\mathbb{Z}}$.

La proposition suivante rend plus précis ces liens avec la fonction $f_{\underline{x}}$.

Proposition 2.2.3 *Sont équivalentes :*

- $\underline{x} \in \ell^\infty$;

- $\underline{x} \in \mathcal{S}^1_{\mathrm{T}}$, *pour tout* $T \in \mathbb{N}^*$;
- $\underline{x} \in \mathcal{S}^1_{\mathrm{T}}$, *pour un* $T \in \mathbb{N}^*$;
- $f_{\underline{x}} \in \mathrm{S}^1_1$;
- $f_{\underline{x}} \in \mathrm{S}^1_{1,\mathbb{Z}}$;
- $f_{\underline{x}} \in L^\infty$.

De plus, toutes les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_{\mathcal{S}^1_{\mathrm{T}}}$, $\underline{x} \to \|f_{\underline{x}}\|_\infty$, $\underline{x} \to \|f_{\underline{x}}\|_{\mathrm{S}^1_1}$ *sont équivalentes.*

La conséquence cruciale est le fait que la notion de suite p.p. au sens de Stepanov n'a guère de sens, puisqu'elle est équivalente à la notion de suite p.p. au sens de Bohr. De plus, ce lien se lit également sur la fonction $f_{\underline{x}}$ puisque pour elle, être Stepanov ou Bohr p.p. c'est équivalent[1].

Conséquence 2.2.4 *La suite $\underline{x}$ est Stepanov-p.p. si et seulement si elle est Bohr p.p. si et seulement si $f_{\underline{x}}$ est Bohr-p.p. si et seulement si $f_{\underline{x}}$ est* S_{ap}.

Remarque 2.2.5 *En vertu de l'inégalité de Hölder, nous avons :*

$$\int_a^{a+1} |f(t)|\ dt \leq \left(\int_a^{a+1} |f(t)|^p\ dt \right)^{1/p}, \tag{2.1}$$

de sorte que la proposition 2.2.3 et la conséquence 2.2.4 sont également valides avec les suites $\mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}$.

2.3 Discrétisation.

Une discrétisation d'une fonction f est une suite de la forme $\{f(ak+b)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Lorsque $a = 1$ et $b = 0$, on parle de *discrétisation canonique*. On notera que lorsque la fonction f est Bohr p.p., toutes ses discrétisations sont (Bohr)-p.p. On notera également que l'ensemble des nombres *entiers* d'$\varepsilon-$translation sont les mêmes pour une fonction et sa discrétisée canonique. De ce fait, ceux de $\underline{x}$ et $f_{\underline{x}}$ sont les mêmes.

On notera que les liens entre continu et discret sont surtout dans un sens : lorsqu'une suite est p.p. (au sens de Bohr ou de Stepanov), elle est en particulier la discrétisée d'une fonction p.p. (au sens de Bohr). En revanche, bien entendu, une fonction peut avoir une discrétisée p.p. sans être p.p., même au sens de Stepanov. En effet, on peut très bien construire une fonction nulle sur les entiers (sa discrétisée canonique sera nulle et donc p.p.) et non bornée pour les normes de Stepanov. Comme le montrent les exemples 4 et 5 que nous avons introduit dans [10], il se peut qu'une fonction S_{ap} aie certaines de ses discrétisées p.p. mais pas toutes. Reproduisons ici l'exemple 4 de cet article :

Exemple 2.3.1 *Considérons la fonction (issue d'une modification d'un exemple proposé dans [77] partant d'une première construction dans [113]), obtenue comme somme d'une série de fonctions $2n-$périodiques f_n :*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

avec : $f_n(x) = \frac{2(x-y_{n,k}+\varepsilon_n)^2}{\varepsilon_n^2}$ *sur* $]y_{n,k}-\varepsilon_n, y_{n,k}-\frac{\varepsilon_n}{2}]$, $1-\frac{2(x-y_{n,k})^2}{\varepsilon_n^2}$ *sur* $]y_{n,k}-\frac{\varepsilon_n}{2}, y_{n,k}+\frac{\varepsilon_n}{2}]$, $\frac{2(x-y_{n,k}-\varepsilon_n)^2}{\varepsilon_n^2}$ *sur* $]y_{n,k}+\frac{\varepsilon_n}{2}, y_{n,k}+\varepsilon_n]$, *et* 0 *sur* $[y_{n,k}-n, y_{n,k}+n] \setminus [y_{n,k}-\varepsilon_n, y_{n,k}+\varepsilon_n]$, *où* $y_{n,k} = (2k+1)n$, $k \in \mathbb{Z}$ *et* $(\varepsilon_n)_n$ *est le terme général à valeurs dans* $]0;1/2[$ *d'une série*

[1] Le fait d'être Stepanov implique son côté (uniformément) borné et donc Lipschitzien vue sa construction ; or toute fonction Stepanov p.p. et uniformément continue est Bohr p.p.

convergente. Cette fonction est un exemple de fonction qui est de classe C^1 *et* $\mathrm{S_{ap}}$ *(mais pas Bohr p.p.) dont la dérivée ne sera pas bornée, ce qui nous intéressera aussi un peu plus bas. On montre par le calcul que :*

$$\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{Z}} f(k) = +\infty,$$

ce qui montre que la discrétisée canonique n'est pas bornée et donc non p.p., alors que pour tout entier k, $f(k+1/2)=0$, *ce qui donne une autre discrétisée constante et par conséquent p.p.*

Il est intéressant de remarquer que si une fonction $\mathrm{S_{ap}}$ peut avoir des discrétisées qui ne sont pas p.p., en revanche les discrétisées de la transformée de Bochner sont toutes p.p. -à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{R}, L^p([0;1], E))$- du fait que la transformée de Bochner est Bohr-p.p.

2.4 Autour de la propriété de Bohl-Bohr.

Ici on se pose la question de savoir si on peut améliorer la table des équivalences entre définitions de presque-périodicité lorsque la fonction en question est donnée comme solution d'une équation. De manière intuitive, les notions de presque-périodicité au sens de Stepanov et de Bohr ne sont pas si éloignées puisque pour les fonctions uniformément continues (hypothèse que l'on pourrait récupérer via une équation), les deux notions sont identiques. Toujours de manière triviale, si par exemple f est bornée, toute solution de $x' = f(t,x)$ est globale et uniformément continue, donc toute solution p.p. au sens de Stepanov le sera au sens de Bohr.

Z. Hu et A. B. Mingarelli se sont demandé dans une série d'articles ([73], [74], [75], [76], [77]) s'il est posssible de trouver sur des équations "raisonnables" des solutions purement p.p. au sens de Stepanov (purement signifiant qu'elles sont p.p. au sens de Stepanov et non de Bohr). M. Tarallo, étendant des techniques de Favard dans [112] a montré dans un cadre linéaire ce n'est pas possible. Nous allons voir que sous des conditions "raisonnables", il n'y a pas de solutions purement Stepanov à une équation différentielle non linéaire.

2.4.1 Le théorème de Bohl-Bohr et ses conséquences.

On rappelle ici la propriété de Bohl-Bohr :

Théorème 2.4.1 *Les primitives de fonctions* $\mathrm{S_{ap}}$ *sont p.p. au sens de Bohr si et seulement si elles sont* S^p*-bornées.*

On notera au passage qu'ainsi on a, pour une primitive de fonction $\mathrm{S_{ap}}$, le fait que sa S^p −bornitude implique son caractère Bohr-p.p. et donc en particulier le fait d'être $\mathrm{S_{ap}}$ et (uniformément) bornée, points qui impliquent la bornitude S^p ; ainsi, toutes ces propriétés sont équivalentes pour les primitives de fonctions $\mathrm{S_{ap}}$.

Comme conséquences de la propriété de Bohl-Bohr, toujours dans la recherche de solutions purement Stepanov, on notera que la dérivée d'une fonction bornée purement $\mathrm{S_{ap}}$ ne peut pas être $\mathrm{S_{ap}}$; ou encore, pour que la dérivée d'une fonction $\mathrm{S_{ap}}$ soit elle-même $\mathrm{S_{ap}}$, il est indispensable que la fonction soit elle-même p.p. ou non bornée.

L'exemple donnée dans la section précédente est un exemple de fonction $\mathrm{S_{ap}}$ non bornée dont la dérivée est non bornée.

Exemple 2.4.2 *Introduisons les fonctions de classe* $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *suivantes :*

$$g(x) = 2 + \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x),$$

$$f(x) = \sin(1/g(x)),$$

$$h(x) = (g(x))^2 \sin(1/g(x)).$$

Levitan [80] a montré que f est $\mathrm{S_{ap}}$*, mais pas p.p. ; sa dérivée ne peut donc pas être* $\mathrm{S_{ap}}$ *(sans quoi sa primitive f serait p.p. puisque bornée). On a ici un exemple de fonction purement* $\mathrm{S_{ap}}$ *dont la dérivée n'est pas* $\mathrm{S_{ap}}$*. Quant à h, elle est* $\mathrm{S_{ap}}$ *et à dérivée bornée, il s'agit donc d'une fonction p.p. à dérivée* $\mathrm{S_{ap}}$*.*

2.4.2 Une équation à variables séparées.

Considérons dans cette section le cas particulier de :

$$x' = \varphi(x) + p(t), \tag{2.2}$$

où $\varphi \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $p \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Une solution est bien entendu une fonction localement absolument continue satisfaisant la relation Lebesgue-presque-partout. Lorsque $p \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, on obtient la notion classique de solution.

Comme conséquence de la propriété de Bohl-Bohr, nous avons :

Proposition 2.4.3 *Toute solution $x(\cdot)$* $\mathrm{S_{ap}}$ *est p.p. si l'un des propriétés suivantes est satisfaite :*

- *φ et p sont bornées ;*
- *x est bornée et p est bornée ou* $\mathrm{S_{ap}}$*.*

En relecture de ceci, pour avoir une solution purement $\mathrm{S_{ap}}$ de (2.2), il est nécessaire d'être dans l'une des trois situations suivantes :

- x et φ non bornées ;
- x et p non bornées ;
- p est ni $\mathrm{S_{ap}}$ ni bornée.

Si on reprend l'exemple 2.4.2 de fonction f, l'équation $x' = f'$ a bien une solution purement $\mathrm{S_{ap}}$. Mais ici nous sommes bien dans la troisième situation : la fonction $p = f'$ est ni bornée ni $\mathrm{S_{ap}}$.

Remarque 2.4.4 *On notera en particulier que l'existence de solution purement Stepanov-p.p. dans le cadre de la théorie de Bohr–Neugebauer (bornitude implique presque-périodicité) ne peut se produire que dans la troisième situation. Par ailleurs, rappelons que dans les résultats type Bohr–Neugebauer ou Favard [14, 54, 55, 56, 75, 76, 77, 73, 74, 106, 107], on suppose toujours que p dans (2.2) (ou plus généralement $F(\cdot, x)$ pour une équation $x' = F(t, x)$) est* $\mathrm{S_{ap}}$*. De ce fait, la question soulevée dans [73, 74], ("*whether boundedness of solutions can imply their (pure) Stepanov's almost-periodicity (if not a.p.)*") n'a qu'une réponse négative dans le cadre des hypothèses formulées sur p ou plus généralement F. Notamment puisque dans [77], $F(\cdot, x)$ est supposée être* $\mathrm{S^p_{ap}}$ *et bornée, uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$, et A, p dans $x' = A(t)x + p(t)$ sont supposées p.p. dans [73, 74, 75, 76], on obtient immédiatement le fait que les solutions* S^p*-bornées seront p.p.*

Meisters a donné un résultat surprenant reliant la presque-périodicité des solutions d'une équation et celle de leur discrétisée canonique. Nous l'avons étendu dans le cadre de notre équation (2.2). Il semble raisonnable que le résultat de Meisters s'étend y compris pour une équation à variables non séparées, mais nous avons voulu nous contenter d'un résultat simple pour l'illustrer :

Théorème 2.4.5 *On suppose que $x(\cdot)$ est une solution localement absolument continue (2.2) à valeurs dans un espace de Banach E satisfaisant la propriété de Radon–Nikodym (par exemple un Banach réflexif), et que :*
(i) $\varphi: E \to E$ est Lipschitzienne
(ii) $p: \mathbb{R} \to E$ est $\mathrm{S_{ap}}$.
Alors pour que $x(\cdot)$ soit une solution p.p. de (2.2), il est nécessaire et suffisant que sa discrétisée $(x(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ soit une suite (Stepanov) p.p.

Il s'agit bien entendu uniquement de montrer l'aspect suffisant. Un raisonnement basé sur Grönwall et sur les propriétés reliant la suite $\underline{x}$ et son interpolée $f_{\underline{x}}$ permettent de montrer que toute $\varepsilon-$presque-période commune à $f_{\underline{x}}$ et à p (dont on sait que l'on peut en trouver un ensemble relativement dense) est une $5e^L\varepsilon-$presque-période pour la fonction x (où L est la constante de Lipschitz de φ). On obtient ainsi le résultat.

Comme conséquence amusante, nous avons obtenu le fait qu'il n'existe pas de fonction purement Stepanov-p.p. et absolument continue à valeurs dans un Banach satisfaisant la propriété de Radon-Nikodym dont la dérivée est $\mathrm{S_{ap}}$ et dont une discrétisation serait (Stepanov)-p.p. Pour la démonstration, on se ramène au cas où l'on parle de la discrétisée canonique, puis nommant f une telle fonction, on introduit l'équation $x' + x = f' + f$. Ici $\varphi(x) = -x$ est bien lipschitzienne, $p = f' + f$ est $\mathrm{S_{ap}}$, la suite $(f(k))_k$ étant supposée p.p., ce devrait être le cas de la fonction f.

Nous avions obtenu comme conséquence le fait que sous les hypothèses du théorème, toute solution purement $\mathrm{S_{ap}}$ n'a aucune de ses discrétisées Stepanov-p.p. En réalité, nous verrons ultérieurement que cette équation ne peut avoir de solutions purement $\mathrm{S_{ap}}$, sous les hypothèses du théorème.

Dans notre article, nous avons donné une extension aux inclusions différentielles, qui se démontre en passant aux sélections.

Exemple 2.4.6 *Reprenons l'exemple de la fonction f définie dans l'exemple 2.3.1. Rappelons qu'il s'agit d'une fonction de classe C^1, purement $\mathrm{S_{ap}}$, et qu'une de ses discrétisée n'est pas p.p. tandis qu'une autre l'est. Il s'agit alors une solution purement $\mathrm{S_{ap}}$ de :*

$$x'(t) + x(t) = f'(t) + f(t).$$

On notera que le second membre $p = f' + f$ n'est pas $\mathrm{S_{ap}}$ ni borné (voir la relecture de la proposition 2.4.3).

2.4.3 Non-existence de solutions purement Stepanov p.p. : généralités.

Dans [11], nous avons été plus loin dans la recherche de solutions purement $\mathrm{S_{ap}}$, répondant aux questions de Hu et Mingarelli dans un cadre assez "raisonnable" et étendant le résultat déjà démontré par Tarallo [112] dans le cadre linéaire.

Le point de départ est la proposition suivante :

Proposition 2.4.7 *Soit $f \in \mathrm{AC_{loc}}(\mathbb{R}, E)$, où E est un espace de Banach satisfaisant la propriété de Radon–Nikodym. Si f et f' sont bornées au sens de la norme de Stepanov, alors f est bornée en norme infinie. En particulier, si $f \in \mathrm{AC_{loc}}(\mathbb{R}, E)$, où E est uniformément convexe, est telle que f et f' sont p.p. au sens de Stepanov, i.e. $f, f' \in \mathrm{S^1_{ap}}(\mathbb{R}, E)$, alors f est p.p. au sens de Bohr.*

Pour la première partie, le point clé consiste à démontrer la majoration :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|_E \leq \|f'\|_{\mathrm{S^1_{ap}}} + \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|_E,$$

ce qui relie la fonction et sa discrétisée canonique, puis à constater que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |f(n)|_E \leq \|f'\|_{\mathrm{S}^1_{\mathrm{ap}}} + \|f\|_{\mathrm{S}^1_{\mathrm{ap}}}.$$

Au final, on obtient la majoration :

$$\|f\|_\infty \leq 2\|f'\|_{\mathrm{S}^1_{\mathrm{ap}}} + \|f\|_{\mathrm{S}^1_{\mathrm{ap}}}.$$

Pour la seconde partie, si $f \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, E)$ est t.q. f et f' sont simultanément Stepanov p.p., on voit que f est borné et donc f est Bohr p.p. en vertu de la propriété de Bohl-Bohr.

Remarque 2.4.8 *La majoration justifiant la première partie nous permet de retrouver également directement le fait que si g et g' sont simultanément S_{ap}, alors g est Bohr-p.p. puisqu'il suffit d'appliquer ceci la relation à $f = g(.+\tau) - g(.)$, où τ est une presque-période commune à g et g' (dont on sait qu'on en aura un ensemble relativement dense).*

Bien entendu, la puissance 1 n'est pas cruciale :

Remarque 2.4.9 *Puisqu'on a (cf par exemple [8]):*

$$\forall p \geq 1, \quad \|f\|_{\mathrm{S}_{\mathrm{ap}}} \leq \|f\|_{\mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}},$$

la proposition est également valide pour $f \in \mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$ et $f' \in \mathrm{S}^q_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$, pour tous $p, q \geq 1$.

Une conséquence fondamentale de cette proposition (et de la remarque) est que l'opérateur de Nemytskii joue un rôle primordial dans ces questions.

Théorème 2.4.10 *On suppose que l'opérateur de Nemytskii $\mathcal{N}_F$ envoie $\mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$ dans $\mathrm{S}^q_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$, où $p, q \geq 1$. Alors toute solution $\mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}$-solution de $X' = F(t, X)$, à valeurs dans un Banach uniformément convexe E est Bohr p.p.*

Ceci justifie d'étudier l'opérateur de Nemytskii dans le cadre de Stepanov, afin d'obtenir des résultats de non existence de solutions purement Stepanov.

2.4.4 Opérateurs de Nemytskii dans les espaces de Stepanov.

Nous avons vu le rôle de l'opérateur de Nemytskii dans notre problème. Nous allons donc donner des exemples de situations dans lesquelles l'opérateur de Nemytskii envoie un espace de Stepanov dans un autre. Le but n'est pas ici d'être exhaustif ou aussi complet que dans le chapitre 1, mais de donner quelques exemples. Pour le futur, on envisage une revue de la littérature sur la question, et si cela n'a pas été fait, de faire une étude plus exhaustive. Notamment, l'usage de la transformation de Bochner (qui transforme la p.p. au sens de Stepanov en une p.p. au sens de Bohr, à valeurs dans un espace L^p) pourrait se révéler utile afin de se ramener au chapitre 1.

On commence avec le cas des produits, le produit " $\cdot$ " ayant différentes significations. Ce lemme est une extension d'un résultat de Levitan [80, pp. 204–205].

Lemme 2.4.11 *On suppose que $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$ avec $p, q, r \in [1, \infty]$. Alors:*

(i) si $A \in \mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E))$ et $\beta \in \mathrm{S}^q_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$, on a $A \cdot \beta \in \mathrm{S}^r_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$,

(ii) si $\alpha \in \mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\beta \in \mathrm{S}^q_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$, on a $\alpha \cdot \beta \in \mathrm{S}^r_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$,

(iii) si $A \in \mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E)) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E))$ et $\beta \in \mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}, E)$, on a $A \cdot \beta \in \mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$,

(iv) si $\alpha \in \mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\beta \in \mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}, E)$, on a $\alpha \cdot \beta \in \mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$.

La démonstration se base sur le fait qu'il est possible de trouver des presque-périodes communes aux deux termes du produit. Ensuite, on fait des manipulations classiques sur des différences de produit et on utilise l'inégalité de Hölder. On montre ainsi que toute $\varepsilon-$presque-période commune aux deux termes (et donc on sait qu'elles forment un ensemble relativement dense) sera une $C\varepsilon-$presque-période du produit, où le C dépend des termes du produit et des constantes p, q, r. C'est suffisant pour conclure.

On passe ensuite au cas d'un opérateur autonome (f ne dépendant pas de t), c'est-à-dire pour la composition. L'analyse fine de l'article de Danilov [59] nous a permis d'obtenir l'énoncé suivant :

Lemme 2.4.12 *Si $f \in \mathrm{C}^0(E, E)$, $a, b > 0$ et $p, q \geq 1$ satisfont:*

$$\forall x \in E,\ |f(x)|_E \leq a|x|_E^{p/q} + b,$$

alors pour toute $g \in \mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$, on a $f \circ g \in \mathrm{S}^q_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$.

On s'attend à une telle condition, qui dans le cas de l'opérateur de Nemytskii entre espaces L^p est connu pour être une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur soit correctement défini et continu. Ainsi, on notera que la continuité de f est insuffisante :

Remarque 2.4.13 *Prenons $f = \exp$ et $g = \sum_{n=2}^{+\infty} g_n$, avec g_n $4n$-périodique et:*

$$g_n|_{[-2n,2n]}(x) := \beta_n \left(1 - \frac{2}{\alpha_n}|x - n|\right) \chi_{[n-\alpha_n/2, n+\alpha_n/2]}(x),$$

where $\alpha_n = 1/n^5$ et $\beta_n = n^3$. On démontre que g est S_{ap} comme limite uniforme de fonctions S_{ap}. Pour autant, on démontre que $\exp(g)$ n'est pas bornée pour la norme de Stepanov et donc n'est a fortiori pas Stepanov p.p.

On en vient maintenant à l'opérateur de Nemytskii non autonome.

Proposition 2.4.14 *On suppose que :*

(i) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t, .) \in L^\infty(E, E)$;

(ii) $[t \mapsto f(t, .)] \in \mathrm{S}^q_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, L^\infty(E, E))$.

Alors $\mathcal{N}_f$ envoie $\mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$ dans $\mathrm{S}^q_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$, où $p, q \geq 1$.

Il est bien entendu possible de combiner ces résultats. Par exemple, combinant les lemmes 2.4.11(i) et 2.4.12 on obtient :

Proposition 2.4.15 *Considérons $F(t, X) := A(t) \cdot F_1(X)$, $p, q \geq 1$, $r \in (0, p/q]$, où:*

(i) $A \in \mathrm{S}^{\frac{pq}{p-qr}}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E))$;

(ii) $F_1 \in C^0(E, E)$ et vérifie:

$$\forall X \in E, \quad |F_1(X)|_E \leq a|X|_E^r + b,$$

avec $a, b > 0$.

Alors $\mathcal{N}_F\colon \mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E) \to \mathrm{S}^q_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R}, E)$.

2.4.5 Non-existence de solutions purement p.p.: exemples.

Nous allons combiner le théorème 2.4.10 avec l'étude des opérateurs de Nemytskii dans les espaces de Stepanov pour obtenir des exemples d'équations n'admettant pas de solution purement p.p.

Auparavant, revenons sur l'exemple où $F(t,X)=\varphi(X)+p(t)$. On voit facilement que si φ est Lipschitzienne et $p\in \mathrm{S}_{\mathrm{ap}}$, le Nemytskii construit sur F envoie S_{ap} dans lui-même : il n'y aura donc pas de solution purement Stepanov p.p.

À titre d'illustration, considérons l'équation suivante

$$x'(t)=A(t)\cdot F_1(x(t))+F_2(t,x(t)). \tag{2.3}$$

Théorème 2.4.16 *On suppose E uniformément convexe et qu'il existe des constantes p,q,r , où $p,q\geq 1$, $r^{-1}=p^{-1}+q^{-1}$ et $r\in]0,\frac{p}{q}]$, de sorte que :*

(i) $A\in \mathrm{S}_{\mathrm{ap}}^{\frac{pq}{p-qr}}(\mathbb{R},\mathcal{L}(E))$;

(ii) $\forall X\in E,\ \ |F_1(X)|_E\leq C_1|X|_E^r+C_2$, *avec* $C_1,C_2\geq 0$, *et* $F_1\in \mathrm{C}^0(E,E)$;

(iii) pour tout $t\in\mathbb{R},\ \ F_2(t,.)\in \mathrm{L}^\infty(E,E)$;

(iv) $[t\mapsto F_2(t,.)]\in \mathrm{S}^q_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R},\mathrm{L}^\infty(E,E))$.

Alors l'équation (2.3) n'a pas de solution purement p.p.

Remarque 2.4.17 *Lorsque $F_2(t,x):=P(t)$ avec $P\in \mathrm{S}^q_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R},E)$, la fonction P ne nécessite pas d'être bornée pour arriver au même résultat. Par ailleurs, en prenant $F_1(x):=x$ et $A\in \mathrm{S}^\infty_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R},\mathcal{L}(E))$, $P\in \mathrm{S}^1_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R},E)$, le (i) du lemme 2.4.11 assure que $[t\mapsto A(t)z(t)+P(t)]\in \mathrm{S}^1_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R},E)$ pour $z\in \mathrm{S}^1_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R},E)$. Alors, grâce à la proposition 2.4.10, l'équation linéaire $X'=A(t)X+P(t)$, où $A\in \mathrm{S}^\infty_{\mathrm{ap}}$ et $P\in \mathrm{S}^1_{\mathrm{ap}}$, n'a pas de solution purement S_{ap}, ce qui étend le résultat de M. Tarallo [112].*

Lorsque $F_2=0$, on peut proposer :

Théorème 2.4.18 *On suppose qu'il existe des constantes $\alpha>1$, $r>0$, telles que :*

(i) $A\in \mathrm{S}^\alpha_{\mathrm{ap}}(\mathbb{R},\mathcal{L}(E))$;

(ii) $F_1\in \mathrm{C}^0(E,E)$ *vérifie :*

$$\forall x\in E,\quad |F_1(x)|_E\leq C_1|x|^r+C_2,$$

avec $C_1,C_2\geq 0$.

Alors pour tout $p\geq \frac{\alpha r}{\alpha-1}$, l'équation

$$x'(t)=A(t)\cdot F_1(x(t))$$

n'a pas de solution purement $\mathrm{S}^p_{\mathrm{ap}}$. En particulier, lorsque $r<1-\alpha^{-1}$, il n'y a pas de solution purement S_{ap}.

Remarque 2.4.19 *Il est possible de faire varier un peu les choses. Nous avons souhaité par deux exemples montrer la puissance du résultat, mais c'est loin d'être exhaustif.*

Chapitre 3

Comparaison entre temps discret et temps continu pour les oscillations limites-périodiques.

Les fonctions (ou suites) limite-périodiques (également appelée fonctions semi-périodiques) forment une sous-classe des fonctions presque-périodiques. La situation entre suites et fonctions est différente, notamment du fait que dans le cas des suites périodiques, les rapports de périodes étant nécessairement rationnels, l'espace des suites périodiques forme un espace vectoriel contrairement à ce qui se passe dans le cas des fonctions.

Nous avons souhaité avec Jan Andres dans [12] étendre aux espaces de Banach quelques propriétés bien connues de ces fonctions et suites, donner le lien avec l'analyse de Fourier, et notamment faire une classification comparative. Au lieu d'étendre la classe des fonctions Bohr p.p. en passant à Stepanov, nous avons étudié une sous-classe. Les fonctions continues périodiques sont caractérisées comme étant les fonctions simultanément limites-périodiques et quasi-périodiques. On met en exergue le lien et les différences entre suites et fonctions, et illustrons cette différence en utilisant deux techniques différentes dans le cas continu et le cas discret.

3.1 Définitions et propriétés de base.

3.1.1 Suites semi-périodiques.

Nous reprenons la définition de [17].

Définition 3.1.1 *Une suite* $\underline{x} \in E^{\mathbb{Z}}$ *est dite* semi-périodique *(s.p.) si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad |x_{k+nT} - x_k|_E \leq \varepsilon.$$

Cette définition 3.1.1 est bien entendu l'analogue discrète de la définition 3.1.2 donnée ultérieurement des fonctions semi-périodiques.

Les suites périodiques formant déjà un espace vectoriel, nous verrons que l'espace des suites semi-périodiques est lui-même un e.v., qui est l'adhérence de l'espace des suites périodiques comme démontré dans [17].

3.1.2 Fonctions continues semi-périodiques.

Notons $\mathrm{C}^0_T(\mathbb{R}, E)$ l'espace vectoriel des fonctions continues et T-périodiques,

$$\mathrm{Per}(\mathbb{R}, E) := \cup_{T>0} \mathrm{C}^0_T(\mathbb{R}, E)$$

l'ensemble des fonctions continues périodiques et $\mathrm{BC}^0(\mathbb{R}, E)$ l'espace de Banach des fonctions continues bornées.

Définition 3.1.2 *Une fonction continue* $f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, E)$ *est dite* semi-périodique *(s.p.) si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t + nT) - f(t)|_E \leq \varepsilon.$$

Un tel T *est appelé* ε-semi-période *de* f. *Notons* $\mathcal{S}(\mathbb{R}, E)$ *l'ensemble des fonctions continues semi-périodiques.*

Une telle fonction est nécessairement Bohr p.p. et de ce fait bornée, ce qui permet d'écrire la définition de la manière suivante :

Définition 3.1.3 *Une fonction continue* $f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, E)$ *est dite* semi-périodique *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \|f(. + nT) - f(.)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

L'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R}, E)$ peut être muni de la métrique suivante :

$$d(f, g) := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - g(t)|_E.$$

Comme nous le verrons ultérieurement, d rend $\mathcal{S}(\mathbb{R}, E)$ complet (mais ce n'est pas un e.v.).

Adaptant la preuve de [17], on vérifie que l'espace des fonctions semi-périodiques coïncide avec l'adhérence de l'ensemble des fonctions continues périodiques (dans $\mathrm{BC}^0(\mathbb{R}, E)$). Pour ce faire, on établit en premier :

Lemme 3.1.4 *Soit* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, E)$, $\varepsilon > 0$ *et* T_ε *une* ε*-semi-période de* f. *Alors il existe une fonction continue et* T_ε*-périodique* φ *t.q.*

$$\|f - \varphi\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

L'idée de la preuve consiste tout d'abord à définir la fonction T_ε-périodique coïncidant avec f sur $[0; T_\varepsilon[$, puis à la corriger sur un petit voisinage (à gauche) de T_ε de sorte à la rendre continue.

Ce lemme préparatoire permet d'obtenir le résultat annoncé :

Théorème 3.1.5 $\mathcal{S}(\mathbb{R}, E)$ *est l'adhérence de* $\mathrm{Per}(\mathbb{R}, E)$ *pour la norme uniforme.*

Passons à l'analyse de Fourier des fonctions semi-périodiques. Sur la formule définissant les coefficients de Fourier, on voit immédiatement que $f \mapsto a_\lambda(f)$ est 1-lipschizienne (et donc continue) de $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, E)$ vers E. Cette remarque permet d'obtenir la caractérisation des fonctions semi-périodiques en terme de développement en série de Fourier-Bohr :

Lemme 3.1.6 *Soit* $f : \mathbb{R} \to E$. *Alors* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, E)$ *si et seulement si il existe* $\theta > 0$ *t.q.:*

$$\Lambda(f) \subset \theta\mathbb{Q}.$$

Dans l'article, nous avons démontré uniquement le sens direct, voici les arguments. On prend λ et μ de sorte que $a_\lambda(f) \neq 0$ et $a_\mu(f) \neq 0$ ainsi qu'une suite $(f_n)_n$ de fonctions périodiques convergeant uniformément vers f. Par continuité de a_λ et a_μ, on peut trouver un indice N de sorte que $a_\lambda(f_N) \neq 0$ et $a_\mu(f_N) \neq 0$. Or, f_N étant périodique, si on appelle T_N la période de f_N, ceci impose que λ et μ soient dans $\frac{2\pi}{T_N}\mathbb{Z}$, donc leur rapport est rationnel. Réciproquement, l'usage des polynômes de Bochner permet, lorsque $\Lambda(f) \subset \theta\mathbb{Q}$, de construire une suite explicite de fonctions périodiques convergeant uniformément vers f.

Remarques 3.1.7
1. La preuve montre au passage que pour n assez grand, la période T_n de f_n satisfait $T_n\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.
2. On retrouve ici simplement que $\mathcal{S}(\mathbb{R}, E)$ n'est pas un e.v. ; par exemple, une fonction quasi-périodique simple comme $t \mapsto \cos(t) + \cos(t\sqrt{2})$ n'est pas s.p. quoique somme de deux fonctions périodiques.

On peut préciser le deuxième point de la remarque :

Théorème 3.1.8 *Toute fonction semi-périodique et quasi-périodique est en fait périodique :*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}, E) \cap QP^0(\mathbb{R}, E) = \mathrm{Per}(\mathbb{R}, E).$$

En effet, l'ensemble $\Lambda(f)$ est à la fois inclus dans un groupe libre de type fini $G_1 := \mathbb{Z}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}\omega_m$ par quasi-périodicité de f, et dans un groupe $G_2 := \theta\mathbb{Q}$ par semi-périodicité. En tant que sous-groupe de G_1, le groupe $G = G_1 \cap G_2$ est libre de type fini et contient $\Lambda(f)$. On a ainsi :

$$\Lambda(f) \subset G = \mathbb{Z}\zeta_1 + \ldots + \mathbb{Z}\zeta_p.$$

On vérifie alors par l'absurde que $p = 1$, ce qui conclut.

La réunion de ces deux classes ne fournit pas non plus la classe des fonctions p.p. comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.1.9 *Construisons par récurrence une suite $(\sigma_k)_{k\geq 1}$ telle que, pour tout k :*

$$\sigma_{k+1} \notin \sigma_1\mathbb{Q} + \ldots + \sigma_k\mathbb{Q},$$

(ce qui est possible puisque l'ensemble de droite est dénombrable). On pose alors :

$$f(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{\mathrm{i}\sigma_n t}}{n^2}.$$

On obtient ainsi une fonction p.p. qui est ni semi-périodique, ni q.p.

On sait également qu'une fonction q.p. n'est pas nécessairement une somme finie de fonctions périodiques, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.1.10

$$f(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{\mathrm{i}t(1+n\sqrt{2})}}{n^2}.$$

Cette fonction est visiblement q.p. puisque $\Lambda(f) \subset \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$. Si f est une somme finie de fonctions périodiques, notant $T_1, \ldots, T_k$ les périodes, on sait grâce à [90] que :

$$\Delta(T_1, \ldots, T_k)f = 0,$$

où :

$$\Delta(T_1)f(x) := f(x + T_1) - f(x),$$
$$\Delta(T_1, \ldots, T_k)f(x) := \Delta(T_1, \ldots, T_{k-1})(\Delta(T_k)f(x)).$$

Or on voit tout de suite que :

$$a_\lambda(\Delta(T_1, \ldots, T_k)f) = a_\lambda(f) \prod_{j=1}^{k} \left(e^{\mathrm{i}\lambda T_j} - 1\right),$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists j \in \{1, \ldots, k\}, \quad (1 + n\sqrt{2})T_j \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

À l'aide de ceci et du principe des tiroirs, on déduit que $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui n'est pas.

En revanche, bien entendu, si on s'autorise les sommes infinies de fonctions périodiques, on récupère toutes les fonctions p.p. En effet, toute fonction p.p. est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques $(f_n)_n$, eux-mêmes des sommes finies de fonctions périodiques. Écrivant :

$$f = f_0 + \sum_n (f_{n+1} - f_n),$$

la fonction f apparaît comme une somme (infinie) d'une suite de fonctions périodiques.

3.1.3 Liens entre suites et fonctions s.p.

Le lien entre suite et fonctions s.p. est le même que dans le cadre p.p. (sauf que l'on précise l'appartenance à $\mathbb{N}^*$ de la semi-période) :

Proposition 3.1.11 *Soit $\underline{x} \in E^{\mathbb{Z}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f_{\underline{x}}$ est s.p. avec une semi-période dans $\mathbb{N}^*$,*
2. *il existe une fonction s.p. avec une semi-période dans $\mathbb{N}^*$ dont la restriction à $\mathbb{Z}$ est $\underline{x}$,*
3. *$\underline{x}$ est s.p.*

3.2 Fonctions semi-périodiques uniformément en le paramètre.

Définition 3.2.1 *Soit $f : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}^k$, où $M \subset \mathbb{R}^n$. On dit que f est* uniformément semi-périodique *(u.s.p.) si pour tout ensemble compact $K \subset M \subset \mathbb{R}^n$, on a :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in K, \; |f(t + nT, x) - f(t, x)|_{\mathbb{R}^k} \leq \varepsilon.$$

On notera qu'une telle fonction est u.p.p., donc elle est bornée sur tout $\mathbb{R} \times K$, où K est un compact de $\mathbb{R}^n$ inclus dans M. Le théorème 3.1.5 s'étend au cadre à paramètre, avec une démonstration assez proche :

Proposition 3.2.2 *Toute fonction u.s.p. est limite uniforme sur tout $\mathbb{R} \times K$ (K compact de $\mathbb{R}^n$ inclus dans M), d'une suite de fonctions continues, périodiques en leur première variable.*

Remarque 3.2.3 *La démonstration permet de voir que si f L-Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, on peut choisir une suite de fonctions qui sont également L-Lipschitzienne par rapport à leur seconde variable.*

Remarque 3.2.4 *Il est possible de faire la même chose et d'obtenir des résultats analogues en discret.*

En revanche, en ce qui s'agit de l'opérateur de Nemytskii construit sur une fonction u.s.p., la situation est très différente selon que l'on soit en discret ou en continu. En effet, si f est u.s.p. et ϕ est s.p., la superposition $t \mapsto f(t, \phi(t))$ n'est pas toujours s.p., comme on le voit en prenant $f(t, x) = \sin(t) + x$ et $\phi(t) = \sin(\pi t)$. En revanche, le résultat est vrai en discret :

Proposition 3.2.5 *Si $f : \mathbb{Z} \times M \to \mathbb{R}^p$ est u.s.p. et $\underline{x} = (x_t)_t$ est s.p. avec $\overline{\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}} \subset M \subset \mathbb{R}^n$, alors la suite $(f(t, x_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ est s.p.*

Pour la preuve, on se place sur le compact $K = \overline{\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}}$. Puisque $\underline{x}$ est a.p. (car s.p.), on sait que K est compact et donc étant donné $\varepsilon > 0$, on trouve $\eta > 0$ tel que :

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}, |x-y| \leq \eta} |f(t, x) - f(t, y)|_{\mathbb{R}^p} \leq \varepsilon.$$

On pose $\eta' := \min\{\eta, \varepsilon\}$. On peut trouver un $T \in \mathbb{N}^*$ de sorte que soient simultanément satisfaites :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{Z}, \quad |x_{t+nT} - x_t|_{\mathbb{R}^n} \leq \eta',$$

et

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{Z}, \forall x \in K, \quad |f(t+nT, x) - f(t,x)|_{\mathbb{R}^p} \leq \eta'.$$

Alors au final on obtient :

$$|f(t+nT, x_{t+nT}) - f(t, x_t)|_{\mathbb{R}^p} \leq |f(t+nT, x_{t+nT}) - f(t+nT, x_t)|_{\mathbb{R}^p} + |f(t+nT, x_t) - f(t, x_t)|_{\mathbb{R}^p} \leq 2\varepsilon.$$

3.3 Solutions semi-périodiques de système quasi-linéaires discrets et continus.

La situation est un peu différente en discret et en continu : dans le cadre discret, l'espace des suites semi-périodiques est un espace de Banach (notamment un e.v.) tandis que dans le cas des fonctions, c'est juste un espace métrique complet. De plus, l'opérateur de Nemytskii construit sur une fonction (ou suite) u.s.p. laisse stable l'espace des suites s.p. et non celui des fonctions s.p.. Nous allons illustrer ces différences sur deux premiers exemples de résolution de problèmes quasi-linéaires.

3.3.1 Solutions semi-périodiques de systèmes quasi-linéaires discrets.

Pour une première illustration, on a décidé de prendre un système autonome dans sa partie linéaire :

$$x_{t+1} + Ax_t = f(t, x_t), \tag{1}$$

où A est une matrice carrée $p \times p$.

Théorème 3.3.1 *Si A n'a pas de valeur propre de module 1 et si f est u.s.p. et lipschizienne avec une constante suffisamment petite par rapport à sa seconde variable, alors il existe une unique solution s.p. à (1).*

Pour la preuve, on rappelle en premier que l'application $T : (x_t) \to (x_{t+1} + Ax_t)_t$ est linéaire bijective de $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^p)$ dans lui-même. Le théorème de Banach assure que T est bicontinue. T envoie l'espace des suites semi-périodiques dans lui-même, et sa bicontinuité (en norme infinie) permet de constater que c'est un homéomorphisme de l'espace des suites s.p. dans lui-même. L'équation que l'on souhaite résoudre est équivalente à la recherche d'un point fixe de

$$\mathcal{T} = T^{-1} \circ \mathcal{N}_f.$$

L'opérateur de Nemytskii envoie bien $\mathcal{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^p)$ dans lui-même donc l'opérateur est correctement défini sur l'espace de Banach $\mathcal{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^p)$. Si L est une constante de Lipschitz commune à toutes les $f(t, .)$, on constate que $\|T^{-1}\|L$ est une constante de Lipschitz pour $\mathcal{T}$, qui sera donc contractant pour $L < 1/\|T^{-1}\|$. Le théorème du point fixe s'applique. On notera que l'on a bien utilisé à la fois le fait que l'opérateur de Nemytskii laisse stable $\mathcal{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^p)$ dans le cadre discret et que cet espace est bien un espace de Banach. On notera également qu'en rendant A triangulaire, il est possible d'estimer $\|T^{-1}\|$ et donc d'avoir une borne explicite.

3.3.2 Solutions semi-périodiques de systèmes quasi-linéaires continus.

Cette fois-ci, considérons :

$$x' + Ax = f(t, x). \tag{4}$$

On suppose que la matrice carrée A a la propriété de dichotomie exponentielle, i.e. il existe une matrice de projection P des constantes $\mathcal{C} > 0$, $\lambda > 0$, t.q. :

$$|X(t)PX^{-1}(s)| \leq \mathcal{C}\exp(-\lambda(t-s)), \quad \text{si } s \leq t,$$
$$|X(t)(I-P)X^{-1}(s)| \leq \mathcal{C}\exp(-\lambda(s-t)), \quad \text{si } t \leq s,$$

où X est la résolvante de $x' + Ax = 0$. On suppose de plus que $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ est u.s.p.

On pose :

$$\mathrm{C}(A) := \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} |G(t-s)|\, ds \right| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{C} e^{-\lambda|t-s|}\, ds = \frac{2\mathcal{C}}{\lambda},$$

où

$$G(t,s) := \begin{cases} e^{A(t-s)}P_-, & \text{si } t > s \\ e^{A(t-s)}P_+, & \text{si } t < s \end{cases}$$

est la fonction de Green associée à A et P_-, P_+ sont les projections spectrales sur les sous-espaces invariants par A.

Théorème 3.3.2 *Si de plus f est L-Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec $L < (\lambda/2\mathcal{C} \leq)\, 1/\mathrm{C}(A)$, alors il existe une unique solution semi-périodique à l'équation* (4).

Cette fois-ci, on va approcher la fonction f par une suite de fonctions $(f_n)_n$ périodiques par rapport à leur première variable convergeant uniformément vers f et qui conservent la L-lipschitzianité par rapport à la seconde variable. On note $\bar{x}$ l'unique solution bornée de (4) (cf. [9, Chapter III.5]). On note x_n l'unique solution bornée (qui sera périodique en vertu de l'unicité) de :

$$x_n' + Ax_n = f(t, x_n).$$

À l'aide des représentations intégrales :

$$x_n(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t-s) f_n(s, x_n(s))\, ds$$

$$\bar{x}(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t-s) f(s, \bar{x}(s))\, ds,$$

on parvient à montrer que $R = \sup_n \|x_n\|_\infty$ est fini, puis que :

$$\|x_n - \overline{x}\|_\infty \leq \frac{\mathrm{C}(A)}{1 - \mathrm{C}(A)L} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times\overline{B(0,R)}} |f_n(t,x) - f(t,x)|_{\mathbb{R}^k} \to 0,$$

ce qui démontre la convergence uniforme de $(x_n)_n$ vers $\overline{x}$, qui est par conséquent s.p.

Remarque 3.3.3 *Ici nous avions l'existence (et l'unicité) de la solution bornée pour le problème de départ. Nous avons montré qu'elle est s.p. en travaillant avec des problèmes périodiques approchant notre problème. Cette approche a été choisie ici en raison de la moins bonne structure de l'espace des fonctions semi-périodiques que celui des suites. Cette approche peut sans aucun doute être faite dans le cas discret.*

Chapitre 4

Perturbations singulières de problèmes variationnels pour des oscillations quasi-périodiques.

Dans ce chapitre, nous avons souhaité proposer une méthode de perturbations singulières pour les problèmes de recherche de solutions quasi-périodiques à module de fréquence fixé. En effet, le formalisme de Percival, étudié avec J. Blot durant ma thèse, transforme ce problème en un problème de recherche de solutions multiplement périodiques d'une E.D.P. Ce problème semble en apparence plus simple (la multiple périodicité se lit mieux que la quasi-périodicité), en revanche, du fait de l'absence de dérivées dans plusieurs directions, le problème est fortement dégénéré. Il était donc naturel de l'étudier en le regularisant. Ces résultats ont été publiés dans [41].

4.1 Rappels.

On considère ici un espace de Hilbert réel[1] H. On rappelle l'expression de la moyenne d'une fonction p.p. f :

$$\mathcal{M}\{f\} = \mathcal{M}\{f(t)\}_t := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,$$

existe dans H. On peut alors associer à f un développement en série de Fourier-Bohr :

$$f(t) \sim \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} a_\lambda(f)e^{i\lambda t},$$

avec convergence en moyenne quadratique. Les coefficients de Fourier-Bohr sont donnés par:

$$a_\lambda(f) = \mathcal{M}\{f(t)e^{-i\lambda t}\}_t.$$

L'ensemble:

$$\Lambda(f) = \{\lambda \in \mathbb{R},\ a_\lambda(f) \neq 0\}$$

est dénombrable, on note $Mod(f)$ le $\mathbb{Z}-$module qu'il génère $\Lambda(f)$. f est dite quasi-periodique (q.p.) si le module est libre de type fini, c'est-à-dire s'il existe un entier $N \geq 1$ et $(\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \mathbb{R}^N$ t.q.:

$$\Lambda(f) = \mathbb{Z}\omega_1 + \ldots + \mathbb{Z}\omega_N,$$

[1] quoique pour l'analyse de Fourier, nous passerons dans son complexifié encore noté H.

et l'hypothèse $\sum_j k_j\omega_j = 0$ avec $k_j \in \mathbb{Z}$ pour tout j implique $k_1 = \ldots = k_N = 0$. On note $QP^0(\mathbb{R}, H)$ l'ensemble des fonctions q.p., et $QP^0_\omega(\mathbb{R}, H)$ l'ensemble des fonctions q.p. f t.q. $\Lambda(f) \subset \mathbb{Z}\omega_1 + \ldots + \mathbb{Z}\omega_N$, avec $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$. On note $QP^n_\omega(\mathbb{R}, H) = QP^0_\omega(\mathbb{R}, H) \cap AP^n(\mathbb{R}, H)$.

Maintenant, ω étant fixé, on considère le tore qui est un groupe abélien compact $\mathbb{T}^N = (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^N$. L'application $\mathcal{Q}_\omega : \mathrm{C}^0(\mathbb{T}^N, H) \to QP^0_\omega(\mathbb{R}, H)$ définie par $\mathcal{Q}_\omega(u) = [t \mapsto u(t\omega)]$ est bijective. Si $C^1_\omega(\mathbb{T}^N, H)$ est l'ensemble des fonctions $u \in C^0(\mathbb{T}^N, H)$ qui admettent en tout $x \in \mathbb{T}^N$, une dérivée directionnelle:

$$\partial_\omega u(x) = \lim_{t\to 0} \frac{u(x + t\omega) - u(x)}{t}.$$

Par récurrence, on introduit :

$$\mathrm{C}^n_\omega(\mathbb{T}^N, H) = \{u \in \mathrm{C}^1_\omega(\mathbb{T}^N, H); \partial_\omega u \in \mathrm{C}^{n-1}_\omega(\mathbb{T}^N, H)\}.$$

Alors $\mathcal{Q}_\omega$ est une bijection entre $C^n_\omega(\mathbb{T}^N, H)$ et $QP^n_\omega(\mathbb{R}, H)$, et de plus, pour tout $k \le n$, on a :

$$\mathcal{Q}_\omega(\partial^k_\omega u) = (\mathcal{Q}_\omega u)^{(k)}.$$

Toute $u \in \mathrm{C}^0(\mathbb{T}^N, H)$ admet un développement en série de Fourier :

$$u \sim \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^N} \hat{u}(\nu)e_\nu,$$

où $e_\nu : x \mapsto e^{i\nu.x}$ et :

$$\hat{u}(\nu) = \int_{\mathbb{T}^N} f(x)e_{-\nu}(x)\frac{dx}{(2\pi)^N}.$$

On notera μ la mesure de Haar du tore :

$$d\mu(x) = \frac{dx}{(2\pi)^N}.$$

.

Pour les solutions faibles, on va introduire des espaces type Sobolev. On note $L^2 = L^2(\mathbb{T}^N; H)$ que l'on munit de son produit scalaire standart :

$$(f, g)_{L^2} = \int_{\mathbb{T}^N} \langle f(x), g(x)\rangle_H d\mu(x).$$

Sa norme sera notée $\|.\|_{L^2}$. On introduit l'espace de Sobolev standart :

$$H^1 = H^1(\mathbb{T}^N; H) = \left\{u \in L^2, \quad \forall i = 1, \ldots, N, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2\right\},$$

et son produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2}.$$

Posant $Du := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) : \mathbb{T}^N \to H^N$, on a :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (Du, Dv)_{L^2}.$$

Pour ces problèmes q.p. à module de fréquences fixé, introduisons (cf [39]) $H^1_\omega = H^1_\omega(\mathbb{T}^N, H)$ défini par :

$$H^1_\omega(\mathbb{T}^N, H) = \left\{u \in L^2, \partial_\omega u \in L^2\right\},$$

et son produit scalaire :

$$(f,g)_{H^1_\omega} = \int_{\mathbb{T}^N} (\langle u(x), v(x)\rangle_H + \langle \partial_\omega u(x), \partial_\omega v(x)\rangle_H)\, d\mu(x).$$

Nous avions démontré que $\mathcal{Q}_\omega$ est également une bijection de $L^2(\mathbb{T}^N, H)$ (resp. $H^1_\omega(\mathbb{T}^N, H)$) sur l'espace de Besicovitch $B^2_\omega(\mathbb{R}, H)$ (resp. $B^{1,2}(\mathbb{R}, H)$) (cf. [39] pour les détails). Nous l'avions fait avec $H = \mathbb{R}^p$ mais cela est vrai avec un espace de Hilbert.

L'opérateur $\mathcal{Q}_\omega$, en tant que bijection, permet de transformer la recherche de solutions q.p. à module de fréquences fixé en la recherche de solutions multiplement périodiques d'une E.D.P. Le formalisme a été introduit par Percival [104], [105], mais a été étudié par Berger et Zhang [18], [19] et plus précisément encore par J. Blot et moi-même dans [39]. Par exemple la recherche des solutions q.p. à module de fréquence généré par ω de :

$$q''(t) = F(q(t)) + e(t)$$

avec $e \in QP^0_\omega(\mathbb{R}, H)$ se transforme en l'E.D.P.:

$$\partial^2_\omega u(x) = F(u(x)) + E(x),$$

où $E = \mathcal{Q}_\omega^{-1}(e)$. Le lien précisé dans [39] est qu'une fonction u est une solution faible ou forte de la seconde équation ssi. $\mathcal{Q}_\omega(u)$ est une solution (faible ou forte) de la première équation. Malheureusement, le fait de ne dériver que dans une direction pour les fonctions de $H^1_\omega(\mathbb{T}^N, H)$ (qui correspondent aux solutions faibles dans l'espace de Blot $B^{1,2}_\omega(\mathbb{R}, H)$) entraîne un défaut de compacité et nous tombons sur une E.D.P. dégénérée. On se propose alors d'introduire une méthode de perturbations singulières.

4.2 Lemmes préliminaires.

Rappelons la synthèse harmonique qui nous permettra d'obtenir des inégalités entre normes. Toute $u \in L^2$ se développe en série de Fourier :

$$u \sim \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^N} \hat{u}(\nu) e_\nu.$$

Nous avons $(\hat{u}(\nu)) \in \ell^2(\mathbb{Z}^N; H)$ et même :

Lemme 4.2.1 *On a :*

- $\|u\|^2_{L^2} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^N} |\hat{u}(\nu)|^2$.
- $u \in H^1$ *ssi* $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^N} (1 + |\nu|^2)|\hat{u}(\nu)|^2 < +\infty$, *et alors* $\|u\|^2_{H^1} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^N} (1 + |\nu|^2)|\hat{u}(\nu)|^2$.
- $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^N, H)$ *ssi* $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^N} (1 + (\nu.\omega)^2)|\hat{u}(\nu)|^2 < +\infty$, *et alors* $\|u\|^2_{H^1_\omega(\mathbb{T}^N,H)} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^N} (1 + (\nu.\omega)^2)|\hat{u}(\nu)|^2$.

Rappelons que $\hat{u}(\nu) = \int_{\mathbb{T}^N} u(x) e_{-\nu}(x) d\mu(x)$; en particulier, $\hat{u}(0) = \int_{\mathbb{T}^N} u(x) d\mu(x)$ est la moyenne de u.

Maintenant pour $u \in L^2$ considérons la décomposition $u = \bar{u} + \tilde{u}$ avec $\bar{u} = \int_{\mathbb{T}^N} u(x) d\mu(x)$ est la moyenne de u. On pose :

$$\tilde{L^2} = \{u \in L^2, \bar{u} = 0\}.$$

À l'évidence, $\tilde{L^2}$ est un sous-espace fermé de L^2, et la somme $H + \tilde{L^2}$ est directe et orthogonale. De ce fait :

$$\|u\|^2_{L^2} = |\bar{u}|^2_H + \|\tilde{u}\|^2_{L^2}.$$

Introduisons $\tilde{H^1} = H^1 \cap \tilde{L^2}$ et $\tilde{H^1_\omega} = H^1_\omega \cap \tilde{L^2}$.

Lemme 4.2.2 *Nous avons :*

- $\forall u \in H^1, \quad \|\tilde{u}\|_{L^2} \leq \|Du\|_{L^2}$.
- $\forall u \in \tilde{H}^1, \quad \|Du\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \leq \sqrt{2}\|Du\|_{L^2}$.
- *Il n'existe pas de constante $C > 1$ t.q. pour toute $u \in \tilde{H}^1_\omega$, $\|u\|_{H^1_\omega} \leq C\|\partial_\omega u\|_{L^2}$.*

La démonstration se fait à l'aide de l'expression des normes obtenues par les relations type Parseval. Le dernier point est relié au problème des petits diviseurs : il est possible de trouver, pour chaque, $\varepsilon > 0$, un $\nu_\varepsilon \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$ t.q. $|\nu_\varepsilon.\omega| \leq \varepsilon$. Le deuxième point du lemme montre que sur $\tilde{H}^1$, l'application $u \mapsto \|Du\|_{L^2}$ est une norme équivalente à $\|.\|_{H^1}$.

Adaptant une preuve de [117] (pour la première partie), on peut proposer ce lemme, qui est relié à des propriétés type Rellich :

Lemme 4.2.3 *Si $(u_m)_m \in (H^1)^{\mathbb{N}}$ est t.q. $u_m \rightharpoonup 0$ faiblement dans H^1, alors $u_m \to 0$ fortement L^2. Le résultat est faux pour les fonctions de H^1_ω.*

La première partie est adaptée de [117]. Si $u_m \rightharpoonup 0$ faiblement dans H^1, la suite $(u_m)_m$ est bornée dans H^1 par une certaine constante C. De plus, $\hat{u}_m(\nu) = (e_\nu, u_m) \to 0$. Donc, découpant la somme en deux, on peut écrire pour tout $R \in \mathbb{N}^*$:

$$\|u_m\|^2_{L^2} \leq \sum_{|\nu| \leq R} |\hat{u}_m(\nu)|^2 + \frac{C^2}{1 + R^2}.$$

Le second terme peut être rendu aussi petit que souhaité en augmentant R, et ce indépendamment de m. Ensuite, le premier terme est une somme finie de terme tendant tous vers zéro donc peut être rendu arbitrairement petit en augmentant m. Le contre-exemple dans H^1_ω se fabrique à l'aide d'une suite $(\nu_j)_j$ t.q. $|\nu_j.\omega| \leq 1$ et $|\nu_j| > |\nu_{j-1}|$. On pose alors :

$$\forall m \geq 1, \quad u_m = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{m} e_{\nu_j}.$$

On vérfie alors facilement que $u_m \rightharpoonup 0$ faiblement dans H^1_ω, mais pas fortement dans L^2 puisque pour tout m, $\|u_m\|_{L^2} = 1$.

4.3 Le problème.

4.3.1 Transformation en un problème sur le tore.

Ici on considère $V : \mathbb{R} \times H \to \mathbb{R}$ t.q. $V(t, .)$ est C^1 et convexe pour tout t et $V(., y)$ est $\omega-$q.p. en t uniformément en y. On sait qu'il existe un unique $A \in \mathrm{C}^0(\mathbb{T}^N \times H; \mathbb{R})$ t.q. $A(t\omega, y) = V(t, y)$ Pour tout $(t, y) \in \mathbb{R} \times H$. On cherche des solutions q $\omega-$q.p. de :

$$q''(t) = \frac{\partial V}{\partial y}(t, q(t)). \tag{4.1}$$

Ce problème se transforme en une E.D.P. sur le tore $\mathbb{T}^N$:

$$\partial^2_\omega u(x) = \frac{\partial A}{\partial y}(x, u(x)), \tag{4.2}$$

L'équation (4.2) s'écrit :

$$\sum_{1 \leq j,k \leq N} \omega_j \omega_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial A}{\partial y}(x, u(x)). \tag{4.3}$$

Nous allons régulariser le problème en introduisant une perturbation dépendant de $m \in \mathbb{N}^*$ destiné à tendre vers l'infini[2] :

$$\sum_{1\le j,k\le N} \omega_j\omega_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x) + \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} - u(x)\right) = \frac{\partial A}{\partial y}(x, u(x)).$$

On pose donc pour $m \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{jk}^m = \begin{cases} \omega_j\omega_k & \text{si} \quad j \neq k, \\ \omega_j^2 + \frac{1}{m} & \text{si} \quad j = k. \end{cases}$$

et on considère :

$$\sum_{1\le j,k\le N} a_{jk}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x) - \frac{1}{m}u(x) = \frac{\partial A}{\partial y}(x, u(x)). \tag{4.4}$$

4.3.2 Hypothèses et exemples.

Nous formulons les hypothèses sur A pour des raisons de clarté. C'est bien entendu un point discutable puisque la fonction donnée au départ est la fonction V ; cependant nous donnons juste après un exemple de classes de fonctions V satisfaisant notre jeu d'hypothèses.

On suppose que :

(H1) A est mesurable, et pour tout $x \in \mathbb{T}^N$, la fonction $A(x, .) : \mathbb{T}^N \to \mathbb{R}$ est C^1 et convexe,

(H2) il existe $\varphi_0 \in L^2$ t.q. $A(., \varphi_0(.)) \in L^1(\mathbb{T}^N; \mathbb{R})$ et $\frac{\partial A}{\partial y}(., \varphi_0(.)) \in L^2$,

(H3) $\exists a \in L^2, \quad \exists b \in L^1(\mathbb{T}^N; \mathbb{R}), \quad A(x, y) \ge \langle a(x), y\rangle_H + b(x)$,

(H4) $\exists(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in \mathbb{R}_*^+ \times L^2(\mathbb{T}^N; \mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{T}^N; \mathbb{R})$, $\forall(x, y) \in \mathbb{T}^N \times H$:

$$\left\langle \frac{\partial A(x, y)}{\partial y}, y \right\rangle_H \ge \alpha_1 |y|_H^2 - \beta_1(x)|y|_H - \gamma_1(x),$$

et[3] $\|\beta_1\|_{L^2}^2 + 4\min\{1, \alpha_1\}\left(\fint_{\mathbb{T}^N} \gamma_1 d\mu\right) \ge 0$,

(H5) $\exists(c, d) \in L^2(\mathbb{T}^N; \mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{T}^N, \mathbb{R})$:

$$\left|\frac{\partial A}{\partial y}(x, y)\right|_H \le c(x)|y|_H + d(x) \qquad \text{presque partout.}$$

Voici un exemple de fonction V pour laquelle la fonction associée A satisfait ces hypothèses. On suppose que V prend la forme suivante :

$$V(t, y) = \varphi(t)f(y) + \psi(t)y.$$

Ici on considère une équation de la forme :

$$q''(t) = \varphi(t)f'(q(t)) + \psi(t),$$

et on suppose que :

(i) $\varphi, \psi \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\inf \varphi > 0$.

(ii) $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est convexe.

(iii) $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$, $y \mapsto \langle f'(y), y\rangle_H - \alpha|y|_H^2 + \beta|y|_H$ est bornée inférieurement.

(iv) $\exists(\mu, \nu) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $|f'(y)|_H \le \mu|y|_H + \nu$.

[2] Lorsque $H = \mathbb{R}$, la perturbation est simplement : $\frac{1}{m}(\Delta u - u)$.

[3] Noter que ceci est vrai lorsque $\fint_{\mathbb{T}^N} \gamma_1 d\mu \ge 0$.

4.4 Résolution du problème.

4.4.1 Étude de l'équation perturbée.

On introduit $\phi_m : H^1 \to \overline{\mathbb{R}}$:

$$\phi_m(u) := \begin{cases} \frac{1}{2}\sum a^m_{jk}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)_{L^2} + \frac{1}{2m}\|u\|^2_{L^2} + \int_{\mathbb{T}^N} A(x,u(x))d\mu(x) & \text{si} \quad A(.,u(.)) \in L^1(\mathbb{T}^N, H), \\ +\infty \quad \text{si} \quad A(.,u(.)) \notin L^1(\mathbb{T}^N, H) \end{cases}.$$

Les hypothèses **(H1), (H2), (H3)**, assurent que ϕ_m est une fonctionnelle convexe s.c.i., dont le sous-différentiel $\partial\phi_m(u)$ est donné par :

$$\begin{cases} \left\{ v \mapsto \sum a^m_{jk}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}\right)_{L^2} + \frac{1}{m}(u,v)_{L^2} + \int_{\mathbb{T}^N} < \frac{\partial A}{\partial y}(.,u), v > d\mu \right\} \text{ si } \frac{\partial A}{\partial y}(.,u(.)) \in L^2(\mathbb{T}^N, H) \\ \emptyset \text{ si } \frac{\partial A}{\partial y}(.,u(.)) \notin L^2(\mathbb{T}^N, H). \end{cases}$$

La démonstration utilise les outils classiques du calcul sous-différentiel. Grâce à l'hypothèse **(H5)**, il est même possible ici de dire que ϕ_m est Gâteaux-dérivable partout, et :

$$D_G\phi_m(u).v = \sum_{1\leq j,k\leq N} a^m_{jk}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}\right)_{L^2} + \frac{1}{m}(u,v)_{L^2} + \int_{\mathbb{T}^N} \langle \frac{\partial A}{\partial y}(x,u(x)), v(x)\rangle_H d\mu(x).$$

Nous allons montrer que ϕ_m admet un minimum. Pour ce faire, on a besoin de la coercivité, c'est le rôle des hypothèses **(H1), (H2), (H4)** que de l'assurer. Nous avons tous les éléments pour énoncer :

Proposition 4.4.1 *Sous* **(H1), (H2), (H3), (H4)**, *l'équation (4.4) admet une solution* $u_m \in H^1(\mathbb{T}^N; H)$.

Bien entendu, en un minimum, on a : $0 \in \partial\phi_m(u_m)$. Relisant ceci, on obtient que u_m est solution de (4.4). Ainsi, nous avons obtenu une solution de l'équation perturbée.

4.4.2 Le passage à la limite.

Le but est maintenant de faire tendre m vers l'infini, afin d'obtenir (au moins en sous-suite) la convergence de $(u_m)_m$ vers une solution de (4.1).

On montre en premier la proposition suivante :

Proposition 4.4.2 *Sous* **(H1), (H2), (H3), (H4)**, $(u_m)_m$ *est bornée dans* H^1_ω.

Finalement la dernière hypothèse **(H5)** ne sert que pour le passage à la limite :

Théorème 4.4.3 *Sous* **(H1), (H2), (H3), (H4), (H5)**, *l'équation (4.1) admet une solution faible.*

Pour cela, on introduit la limite de $\phi : H^1 \to \overline{\mathbb{R}}$ de ϕ_m :

$$\phi(u) := \frac{1}{2}\sum_{1\leq j,k\leq N} \omega_j\omega_k\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)_{L^2} + \int_{\mathbb{T}^N} A(x,u(x))d\mu(x).$$

On constate que $(u_m)_m$ a une sous-suite faiblement convergente dans H^1_ω, vers une limite U. En utilisant que ϕ est s.c.i. et la décroissance de $m \mapsto \phi_m$, on obtient que U est un minimum de la fonction convexe ϕ sur H^1_ω. On peut bien entendu, comme pour ϕ_m, justifier que ϕ est Gâteaux-dérivable. En écrivant que $D_G\phi(U) = 0$, on obtient exactement :

$$\partial^2_\omega U(x) = \frac{\partial A}{\partial y}(x, U(x)).$$

Enfin, en posant $q(t) = U(t\omega)$, on a bien :

$$q''(t) = \frac{\partial V}{\partial y}(t, q(t)).$$

4.5 Passage aux solutions p.p.

Il est bien entendu possible d'approcher des problèmes de recherche de solutions p.p. par une famille de problèmes q.p., et donc d'obtenir l'existence de solutions p.p. en passant par des techniques sur le tore, techniques spécifiquement q.p. Illustrons ceci sur un exemple. On considère :

$$q''(t) = F'(q(t)) + b(t) \tag{4.5}$$

où $b \in AP^0(\mathbb{R}, H)$ et $F \in C^1(H, \mathbb{R})$ est convexe et satisfait :

$$\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad \langle F'(y), y\rangle_H \geq \beta^2 + 4\gamma \min\{1, \alpha\} \geq 0.$$

Théorème 4.5.1 *Sous ces hypothèses, l'équation (4.5) admet une solution p.p. faible.*

L'idée est d'approcher b par une suite de polynômes trigonométriques (donc quasi-périodiques) $(b_n)_n$. Les problèmes perturbés

$$q''(t) = F'(q(t)) + b_n(t).$$

auront tous une solution q_n. Les calculs effectués dans la section précédente permettent de sortir une constante absolue R_1 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|q_n\|_{B^{1,2}} \leq R_1,$$

(précisément $R_1 = \frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4\gamma\delta}}{2\delta}$). Alors la suite $(q_n)_n$ admet dans l'espace de Hilbert $B^{1,2}$ une sous suite faiblement convergente vers un $q \in B^{1,2}$.

Chapitre 5

Notion de solution variationnelle faible en temps discret et en temps continu.

Ce chapitre développe une idée lancée dans ma thèse [99], en corrigeant une erreur et, en poussant un peu la formalisation, à étendre à des problèmes qui ne seraient plus issus de systèmes dynamiques. Pour l'instant, je considère que les choses doivent être développées, car même si ce travail a donné lieu à deux publications [102] et [103], il me semble que les hypothèses pourraient être grandement améliorées.

L'idée de base est d'adapter à une situation non linéaire une technique bien connue des E.D.P. elliptiques, la formulation variationnelle. Présentons rapidement son principe en dimension 1. Soit à résoudre :

$$-u''(x) + \alpha(x)u(x) = f(x)$$

avec $u(a) = u(b) = 0$. On démontre que cette équation implique la suivante :

$$\forall v \in H_0^1(]a,b[), \qquad \int_a^b (u'(x)v'(x) + \alpha(x)u(x)v(x))dx = \int_a^b f(x)v(x)dx,$$

appelée formulation variationnelle du problème. Cette formulation variationnelle a un sens pour toute $u \in H_0^1(]a,b[)$. Sous certaines hypothèses sur la fonction α, on est en mesure d'appliquer le lemme de Lax-Milgram (et même ici le théorème de Riesz) pour assurer que cette équation a une solution et une seule. Après on peut remonter à la première grâce à des théorèmes de régularité.

Ici nous allons adapter le principe de cette méthode à des équations non linéaires. La formulation variationnelle consistera en la recherche d'un zéro d'une fonction envoyant un Sobolev dans son dual. La recherche de ce zéro se fera via une technique de Newton, dont nous montrons qu'elle fonctionne dans un cadre Gâteaux-dérivable. Nous laissons en suspens la question du retour à l'équation de départ, même en un sens faible (qui peut être faux comme nous le verrons par un exemple). Nous allons proposer deux approches, une concernant plutôt un cadre continu et pour des équations d'ordre 2, l'autre en dimension n et assez générale mais adaptée aux systèmes discrets. On notera au passage que nous parlons d'opérateurs généraux, et pas exclusivement de dérivée ou de schift.

5.1 Technique pour des problèmes continus.

Le premier article [102] a introduit la technique sur des problèmes les plus proches de la question d'origine, les EDP linéaires. Toutefois, on introduit les notions dans un cadre abstrait, bien qu'ayant en tête des cas particuliers tels le cadre p.p. ou q.p. à module de fréquences fixé.

5.1.1 Le cadre.

On se donne un espace mesuré G (mesure μ_G, qui est la mesure de Haar lorsqu'on travaille avec un groupe localement compact), un opérateur T à valeurs dans $L^2_G = L^2(G, H)$, qui est muni de son produit scalaire naturel et de la norme associée $\|.\|_2$; ici $(H, \langle ., . \rangle_H)$ est un espace de Hilbert .

On considère le domaine de l'opérateur T :

$$H^1_G = \{u \in L^2(G, H), \quad Tu \in L^2(G, H)\}.$$

C'est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni de :

$$\|u\|_{H^1_G} = \sqrt{\|u\|_2^2 + \|Tu\|_2^2}.$$

Alors $T : H^1_G \to L^2_G$ est un opérateur linéaire continu. On supposera que :

$$\forall (u, v) \in H^1_G \times L^2_G, \qquad \int_G \langle Tu, v \rangle_H d\mu_G = -\int_G \langle u, Tv \rangle_H d\mu_G.$$

Nous considérerons également un sous espace de Hilbert de H^1_G, $H^1_{G,0}$, dans lequel nous supposerons que nous avons une inégalité de Poincaré-Wirtinger :

$$\exists \alpha_{PW} > 0, \quad \forall u \in H^1_{G,0}, \quad \|Tu\|_2 \geq \alpha_{PW} \|u\|_2.$$

Alors $H^1_{G,0}$ est un espace de Hilbert muni de la norme suivante, équivalente à celle de H^1_G :

$$\|u\|_0 = \|Tu\|_2.$$

5.1.2 Quelques exemples d'espaces.

Avec $G = \mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, L^2_G est l'ensemble des fonctions de $L^2_{loc}(\mathbb{R}, H)$ qui sont $(2\pi-)$périodiques. Pour T on prend la dérivée et alors H^1_G est l'espace des fonctions de $H^1_{loc}(\mathbb{R}, H)$ qui sont $2\pi-$périodiques. Introduisant la moyenne d'une fonction $f \in L^2_G$:

$$\mathcal{M}\{f\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t)dt = \int_{\mathbb{T}} f d\mu_{\mathbb{T}},$$

on a l'inégalité de Poincaré-Wirtinger dans :

$$H^1_{G,0} = \left\{f \in H^1_G, \quad \mathcal{M}\{f\} = 0\right\}.$$

Avec $G = \mathbb{T}^N$ et pour T l'application ∂_ω :

$$\partial_\omega u(x) = \lim_{s \to 0} \frac{u(x + s\omega) - u(x)}{s},$$

on retombe sur le cas q.p. à module de fréquences fixé.

Avec G le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$, $b\mathbb{R}$, $L^2(G)$ est isométrique à l'espace de Besicovitch $B^2(\mathbb{R})$. La moyenne est :

$$\mathcal{M}\{f\} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t)dt = \int_{b\mathbb{R}} f d\mu_{b\mathbb{R}},$$

Pour T nous prenons la dérivation au sens de J. Blot, pour récupérer les espaces de Blot.

5.1.3 Notion de solution variationnelle faible.

Il y a une coquille dans l'article (un signe $-$ à gauche en trop) que l'on corrige ici. On souhaite résoudre :

$$T^2u(x) = X(x, u(x), Tu(x)) \tag{5.1}$$

On remplace (5.1) par la recherche de $u \in \mathcal{H}$ ($\mathcal{H} = H^1_G$ ou $H^1_{G,0}$) t.q. :

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad \int_G (\langle Tu, Tv\rangle_H + \langle X(., u, Tu), v\rangle_H)\, d\mu_G = 0. \tag{5.2}$$

C'est cette équation que l'on appelle la *forme variationelle* de la première équation.

Toute solution du premier problème est solution du second. La réciproque n'est pas toujours vraie. Dans nos espaces H^1_G présentés auparavant, on a bien la réciproque. Cependant, dans $H^1_{G,0}$, il se peut que la deuxième équation admette une solution et non la première. C'est le cas par exemple pour :

$$-\ddot{q} + \theta q = \varphi$$

Dans $H^1_0(\mathbb{T})$, elle admet une solution variationnelle faible pourvu que $\theta > -\alpha^2_{PW} = -1$; en revanche, il est clair que lorsque $\theta = 0$ et $\varphi = 1$, la première équation n'admet pas de solution même dans $H^1_0(\mathbb{T})$ (la moyenne du terme de gauche est nulle tandis que celle du terme de droite est 1).

5.1.4 Hypothèses communes.

On suppose que X est une fonction de Caratheodory t.q. $X(., 0) \in L^2_G$ et les dérivées partielles $\partial_2 X$ et $\partial_3 X$ existent et sont bornées.
On pose, pour $j \in \{2, 3\}$, $M_j = \sup_{(t,u,v)\in G\times H\times H} \|\partial_j X(t, u, v)\|_H$. On introduit m_2 t.q.:

$$\forall (t, u, v, w) \in \mathbb{R} \times H \times H \times H, \quad \langle \partial_2 X(t, u, v).w, w\rangle_H \geq m_2 \|w\|^2_H$$

et enfin, pour $i = 2, 3$:

$$\delta_i = \sup_{(t,u_2,v_2,u_1,v_1)\in G\times H^4} \|\partial_i X(t, u_2, v_2) - \partial_i X(t, u_1, v_1)\|_H \in [0; \infty].$$

5.1.5 Un énoncé préparatoire : Newton.

On commence par donner un résultat de convergence de la méthode de Newton dans un cadre de fonction continue et Gâteaux-dérivable, adapté du livre de Ciarlet (cf. [51], théorème 7.5-1).

Proposition 5.1.1 *Soit une fonction $f : \Omega \subset E \to F$ continue et Gâteaux-dérivable, où E est un Banach et F un e.v.n., et $r > 0$ t.q. $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$. S'il existe $M > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$ t.q.:*

- $\sup_{x\in\overline{B}(x_0,r)} \|D_G f(x)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq M$;
- $\sup_{(x,x')\in\overline{B}(x_0,r)^2} \|D_G f(x) - D_G f(x')\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \alpha/M$;
- $\|f(x_0)\|_Y \leq r(1 - \alpha)/M$

alors $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\overline{B}(x_0, r)$.

La démonstration consiste à suivre celle de Ciarlet, en plus simplifiée puisqu'on remplace les A_k par $D_G f$. La seule chose à remarquer est que l'on utilise l'inégalité de moyenne, qui est licite avec les fonctions Gâteaux dérivables. Elle figure in extenso dans [103].

5.1.6 Théorème d'existence et d'unicité dans H^1_G.

Théorème 5.1.2 *On suppose que X est de Caratheodory, $X(.,0) \in L^2_G$ et que les dérivées partielles $\partial_2 X$ et $\partial_3 X$ existent et sont bornées. Si:*

- $m_2 > \frac{M_3^2}{4}$;
- $\delta_2^2 + \delta_3^2 < \frac{1-m_2+\sqrt{(1+m_2)^2+M_3^2}}{2}$.

Alors il existe une unique solution H^1_G-variationelle faible à (5.2).

Principe de la démonstration. Résoudre notre problème est équivalent à trouver un zéro à l'opérateur : $\Phi : H^1_G \to (H^1_G)'$ défini par :

$$\Phi(u) = \left[v \mapsto \int_G \left(\langle Tu, Tv \rangle_H + \langle X(., u, Tu), v \rangle \right) d\mu_G \right].$$

Afin d'appliquer le théorème de Newton, on commence par démontrer que Φ est Gâteaux dérivable, et :

$$D_G\Phi(u).h = \left[v \mapsto \int_G \left(\langle Th, Tv \rangle_H + \langle (\partial_2 X(., u, Tu)h + \partial_3 X(., u, Tu)Th), v \rangle_H \right) d\mu_G \right].$$

Ceci se fait par composition. Ensuite, on démontre que $D_G\Phi(u)$ est inversible. Pour ce faire, on constate que

$$D_G\Phi(u).h = [v \mapsto \beta(h, v)],$$

avec :

$$\beta(h, v) = \int_G \left(\langle Th, Tv \rangle_H + \langle (\partial_2 X(., u, Tu)h + \partial_3 X(., u, Tu)Th), v \rangle_H \right) d\mu_G.$$

On constate que β est bilinéaire, continue, et elliptique du fait que $m_2 > \frac{M_3^2}{4}$. On peut donc appliquer le théorème de Lax Milgram qui permet d'obtenir l'inversibilité de $D_G\Phi(u)$, puis l'estimation :

$$\left\| (D_G\Phi(u))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}((H^1_G)', H^1_G)} \leq \frac{1}{\varepsilon_0},$$

où $\varepsilon_0 = \frac{1-m_2+\sqrt{(1+m_2)^2+M_3^2}}{2}$.

On applique alors Newton à $f = \Phi$. La première condition est assurée en prenant $M = \varepsilon_0^{-1}$et est valide pour tout $r > 0$. La seconde condition est assurée indépendamment de r par : $\delta_2^2 + \delta_3^2 < \varepsilon_0^2$. On choisit $\beta = \frac{\sqrt{\delta_2^2+\delta_3^2}}{\varepsilon_0}$ satisfaisant les deux premières conditions, et par exemple $x_0 = 0$. On peut conclure qu'il existe une unique solution dans $\overline{B}(0, r)$. Puisque c'est vrai pour tout r, on conclut quant à l'existence et l'unicité globale.

5.1.7 Existence et unicité dans $H^1_{G,0}$.

On peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 5.1.3 *On suppose que X est de Caratheodory, $X(.,0) \in L^2_G$ et que les dérivées partielles $\partial_2 X$ et $\partial_3 X$ existent et sont bornées. Soit α_{PW} la constante de Poincaré-Wirtinger de $H^1_{G,0}$. Si :*

- $\min\{\alpha_{PW}^2 - M_3\alpha_{PW} + m_2, 2\alpha_{PW} - M_3\} > 0$;
- $\delta_2^2 + \delta_3^2 < \left(\min\left\{ \frac{\alpha_{PW}^2 - M_3\alpha_{PW} + m_2}{\alpha_{PW}^2}, \frac{2\alpha_{PW} - M_3}{2\alpha_{PW}} \right\} \right)^2$.

Alors il existe une unique solution $H^1_{G,0}-$variationnelle de (5.2).

La seule modification dans la démonstration est l'obtention de la condition d'ellipticité.

5.2 Le cadre discret.

Cette section a donné lieu à la publication [103]. Ici nous allons nous intéresser à une équation du type :

$$A(t, x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+n}) = 0,$$

où A est non linéaire, et proposer une condition qui étend la classique de "diagonale dominante".

On cherche les solutions classiques $\underline{x} = (x_t)_t$ définies sur $\mathbb{Z}$, mais également les solutions périodiques ou p.p.

Nous allons être en fait un peu plus général. On s'intéresse à chercher les solutions d'une équation :

$$A(., \underline{x}, \Theta(\underline{x}), \ldots, \Theta^n(\underline{x})) = 0,$$

où Θ est un opérateur bijectif et continu d'un espace $L^2(G, H)$ dans lui-même (et pas nécessairement le schift $(x_t)_t \to (x_{t+1})_t$), où G sera un espace mesuré et H un Hilbert. De ce fait, Θ sera bicontinu en raison du théorème de Banach. On supposera en premier que Θ est une isométrie (pour simplifier la présentation), puis indiquerons les modifications à apporter après.

Puisque nous avons en tête de travailler avec des suites (mais ce n'est pas indispensable), les espaces $L^p(G, H)$ seront notés $\ell^p(G)$ (et leur norme $\|.\|_{\ell^p}$). On supposera avoir $\ell^2(G, H) \subset \ell^\infty(G, H)$ avec injection continue, i.e. :

$$\forall \underline{x} \in \ell^2(G, H), \quad \|\underline{x}\|_{\ell^\infty} \leq c\|\underline{x}\|_{\ell^2},$$

ce qui équivaut à :

$$\forall G \in \mathcal{G}, \qquad (\mu_G(A) > 0) \Rightarrow (\mu_G(A) \geq 1/c^2).$$

Comme exemple d'ensembles G, on sera intéressé par $G = \mathbb{Z}$ (cas discret), $G = \mathbb{Z}/\varpi\mathbb{Z}$ (cas discret $\varpi-$périodique, avec $\varpi \in \mathbb{N}^*$) ou $G = b\mathbb{Z}$ (cas discret p.p.). Ces exemples seront munis de leur mesure de Haar (l'intégrale donne alors la moyenne) et satisfont l'hypothèse d'injection continue, contrairement par exemple à $\mathbb{R}$.

5.2.1 Rappels sur le cas linéaire autonome.

On rappelle la condition de diagonale dominante, dans le cas autonome et $H = \mathbb{R}$ pour des raisons de simplicité. On cherche ici les solutions $\underline{x} = (x_t)_t$ de :

$$a_n x_{t+n} + \ldots + a_0 x_t = y_t,$$

où $(y_t)_t$ est dans un espace de suites adéquat E et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On montre que si cette condition (Hadamard) est satisfaite :

$$\exists j_0 \in \{0, \ldots, n\}, \qquad a_{j_0} > \sum_{j \neq j_0} |a_j|,$$

alors pour tout $\underline{y} \in E$, il existe une unique solution dans $\underline{x} \in E$, par exemple dans les cas suivants $E = \ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, $E = \ell^p(b\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, $E = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}/(\varpi\mathbb{Z})}$.

5.2.2 Le premier théorème.

Soit $A : G \times H^{n+1} \to H$, $A : (t, s_0, \ldots, s_n) \mapsto A(t, s_0, \ldots, s_n)$ t.q.:

(A1) $A(., s)$ est mesurable de $(G, \mathcal{G})$ vers H.

(A2) $(A(t, 0))_t \in \ell^2(G)$;

(A3) Toutes les dérivées de Fréchet $\frac{\partial A}{\partial s_j} : G \times H^{n+1} \to \mathcal{L}(H)$ (écrites $\partial_{j+2}A$),$j = 0, \ldots, n$, existent ;

(A4) les dérivées $\partial_{j+2}A$,$j = 0, \ldots, n$, sont uniformément continues, i.e. :

$$\lim_{\delta \to 0} \left[\sup_{|t-t'|+\|s-s'\|_{H^{n+1}} \leq \delta} \|\partial_{j+2}A(t,s) - \partial_{j+2}A(t',s')\|_{\mathcal{L}(H)} \right] = 0.$$

(A5) les dérivées $\partial_{j+2}A$,$j = 0, \ldots, n$, sont uniformément bornées :

$$\forall j \in \{0, \ldots, n\}, \quad M_j := \sup_{(t,s)} \|\partial_{j+2}A(t,s)\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

(A6) il existe j_0 t.q.:

$$m_{j_0} := \inf_{(t,s,v) \in \mathbb{R} \times H^{n+1} \times (H \setminus \{0\})} \frac{\langle \partial_{j_0+2}A(t,s)v, v\rangle_H}{|v|_H^2} > \sum_{j \neq j_0} M_j.$$

Remarque 5.2.1 *Les hypothèses* **(A1)**, **(A3)** *et* **(A4)** *assurent que A est une fonction de Caratheodory.*

On peut énoncer :

Théorème 5.2.2 *Sous* **(A1)-(A6)**, *étant donnée une isométrie bijective $\Theta : \ell^2(G) \to \ell^2(G)$, il existe $\underline{x} \in \ell^2(G)$ t.q.:*

$$A\left(., \underline{x}, \Theta(\underline{x}), \ldots, \Theta^n(\underline{x})\right) = 0. \tag{5.3}$$

Principe de la preuve Fixons $\underline{b}$ et introduisons l'opérateur

$$\phi_{\underline{b}} : \ell^2(G) \to (\ell^2(G))'$$

$$\phi_{\underline{b}}(\underline{x}) = \left[\underline{v} \mapsto \int_G \langle A(., \underline{x}, \ldots, \Theta^n(\underline{x}) - \underline{b}, \Theta^{k_0}\underline{v}\rangle_H d\mu_G \right].$$

Notre équation 5.3 est équivalente à $\phi_0(\underline{x}) = 0$. Grâce à la méthode de Newton, on va montrer que si $\underline{b}'$ est t.q. $\phi_{\underline{b}'}$ a une racine, c'est le cas de tous les $\phi_{b''}$ lorsque $\underline{b}''$ est assez proche de $\underline{b}'$, avec un assez proche indépendant de $\underline{b}'$. De ce fait, tout point sera atteignable, y compris lorsque $\underline{b} = 0$.

Plus précisément, on va donner une constante C, ne dépendant que de M_j et m_{j_0}, t.q. si

$$A(., \underline{x}, \Theta(\underline{x}), \ldots, \Theta^n(\underline{x})) = \underline{b}$$

a une solution (étant donné $(b_t)_t \in \ell^2(G)$), alors pour tout $\underline{b'} \in \ell^2(G)$ t.q. $\|\underline{b} - \underline{b'}\|_{\ell^2} \leq C$, l'équation admet une solution proche de la première. On considère alors :

$$\phi_{\underline{b}} : \ell^2(G) \to (\ell^2(G))'$$

$$\phi_{\underline{b}}(\underline{x}) = \left[\underline{v} \mapsto \int_G \langle A(., \underline{x}, \ldots, \Theta^n(\underline{x})) - \underline{b}, \Theta^{k_0}\underline{v}\rangle_H d\mu_G \right].$$

On démontre que $\phi_{\underline{b}}$ est lipschitzien, avec un rapport $L(A)$ ne dépendant que de A (et non de $\underline{b}$) et que $\phi_{\underline{b}}$ est Gâteaux-différentiable, de différentielle :

$$D_G\phi_{\underline{b}}(\underline{x}).\underline{h} = \left[\underline{v} \mapsto \int_G \sum_{j=0}^{n} \langle \partial_{j+2}A(., \underline{x}, \ldots, \Theta^n(\underline{x}))\Theta^j\underline{h}, \Theta^{k_0}\underline{v}\rangle_H d\mu_G \right].$$

Ensuite, on constate que $D_G\phi_{\underline{b}}$ est uniformément continu. C'est là qu'intervient l'hypothèse restrictive d'injection continue, puisqu'on souhaite transformer une estimation en norme ℓ^2 en une estimation ponctuelle. Ensuite, comme dans le cadre continu, on montre par le théorème de Lax-Milgram que $D_G\phi_{\underline{b}}(\underline{x})$ est inversible, et avons une constante $\beta_1 = m_{j_0} - \sum_{j\neq j_0} M_j$ ne dépendant que de A t.q.

$$\|(\phi'_{\underline{b}}(\underline{x}))^{-1}\|_{\mathcal{L}((\ell^2)',\ell^2)} \leq \beta_1^{-1}.$$

On applique alors l'énoncé de Newton. La première hypothèse est satisfaite pour $M = \beta_1^{-1}$. Pour satisfaire la seconde, on doit avoir :

$$\sup_{(x,x')\in\overline{B}(x_0,r)^2} \|\phi'_{\underline{b}}(x) - \phi'_{\underline{b}}(x')\|_{\mathcal{L}(\ell^2,(\ell^2)')} < \beta_1$$

et lorsque ceci est vrai, si σ est le sup, on pourra choisir $\alpha = \sigma/\beta_1$. Grâce à l'uniforme continuité des dérivées, on peut trouver $r > 0$ de sorte que la boule $\overline{B}(x_0, r)$ satisfasse la propriété. Enfin, si on prend pour x_0 une solution de $\phi_{\underline{b}'}(x_0) = 0$, on aura la dernière propriété si $\|\underline{b} - \underline{b}'\|_{\ell^2} \leq r(1-\alpha)/M$, la constante $C := r(1-\alpha)/M$ à choisir ne dépend bien que de A.

Comme illustrations du théorème, proposons en premier le cas de :

$$A(t,s) = -y_t + \sum_{k=0}^{n} \langle a_k(t), s_k\rangle_H;$$

si les a_j sont bornées et uniformément continues, on retrouve la condition usuelle. On peut également proposer un cadre quasi-linéaire avec bornes explicites :

$$A(t,s) = A_1(t,s) - y_t + \sum_{k=0}^{n} a_k(t)s_k.$$

On suppose que A_1 satisfait **(A1)-(A5)** et qu'il existe j_0 de sorte que :

$$\inf_t a_{j_0}(t) > \sum_{j\neq j_0} |a_j(t)|.$$

Alors, si :

$$-\inf \partial_{j_0+2}A_1(t,s) + \sum_{j\neq j_0} \sup |\partial_j A_1(t,s)| < \inf_t a_{j_0}(t) - \sum_{j\neq j_0} \sup_t |a_j(t)|,$$

l'équation

$$a_p(t)x_{t+p} + \ldots + a_0(t)x_t + A_1(t, x_t, \ldots, x_{t+p}) = y_t$$

a une solution.

5.2.3 Extensions à un opérateur non isométrique.

Lorsque Θ n'est plus une isométrie mais est seulement bicontinu, en notant $(\alpha_\Theta, \beta_\Theta) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$ t.q.:

(H7) : pour tout $\underline{x} \in E$, $\quad \alpha_\Theta\|\underline{x}\| \leq \|\Theta(\underline{x})\| \leq \beta_\Theta\|\underline{x}\|$,

on démontre que le résultat est encore vrai si on remplace **(H6)** par **(H8)**:
(H8) : $\alpha_\Theta^{2j_0} m_{j_0} > \sum_{j\neq j_0} \beta_\Theta^{j+j_0} M_j$.

Comme exemple où le schift ne serait pas isométrique, on peut penser à des ℓ^2 à poids. Étant donné $p : G \to \mathbb{R}_*^+$, on considère l'espace ℓ^2 de poids p :

$$\ell_p^2 = \left\{\underline{x} \in H^G, \quad \int_G |x_t|^2 p_t d\mu_G(t) < +\infty\right\}.$$

Cette fois, la mesure ν de densité p par rapport à la mesure de comptage ne satisfait plus nécessairement notre hypothèse :

$$\exists c > 0, \quad \forall A, \quad (\nu(A) > 0) \Rightarrow (\nu(A) \geq 1/c^2).$$

En revanche, on continue à travailler avec la mesure de comptage. On suppose de plus l'hypothèse **(H9)** suivante satisfaite :

$$\exists (c_1, c_2) \in (\mathbb{R}_*^+)^2, \forall t \in G, \quad c_1 \leq \frac{p_{t-1}}{p_t} \leq c_2.$$

On vérifie facilement que le schift n'est plus nécessairement une isométrie, mais qu'il demeure bijectif et bicontinu, et que plus précisément :

$$\forall \underline{x} \in \ell_p^2, \quad c_1 \|\underline{x}\| \leq \|\Theta(\underline{x})\| \leq c_2 \|\underline{x}\|.$$

Ainsi, on a ici $\alpha_\Theta = c_1$ and $\beta_\Theta = c_2$.

Par exemple, lorsque $p_t = 1 + t^2$, on peut prendre $c_1^{-1} = c_2 = \frac{5}{2}$, ce qui permet d'affirmer :

Corollaire 5.2.3 *Sous les assertions* **(H1)-(H5)**, *si* $p_t = 1 + t^2$, *et si :*

$$m_{j_0} > \sum_{j \neq j_0} \left(\frac{5}{2}\right)^{j + 3j_0} M_j,$$

alors il existe $\underline{x} \in \ell_p^2(G)$ *t.q.:*

$$A\left(t, x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+n}\right) = 0. \tag{5.4}$$

5.2.4 Un cas d'unicité.

On revient au théorème 5.2.2 (une remarque similaire pourrait être faite dans la situation non isométrique). Au lieu de **(H4)**, supposons :

$$\sum_{j=0}^{n} \sup_{(t,s,s')} \|\partial_{j+2} A(t,s) - \partial_{j+2} A(t,s')\|_{\mathcal{L}(H)} < \left(m_{j_0} - \sum_{j \neq j_0} M_j\right)^{-1}.$$

Dans ce cas, comme pour la situation continue, les deux premières propriétés de l'énoncé de Newton sont valides pour tout $r > 0$. On peut donc le prendre aussi grand que l'on souhaite, et partir par exemple de $\underline{x}_0 = 0$. Prenant directement $\underline{b} = 0$, l'unicité dans l'énoncé de Newton donne l'unicité à notre problème. Par conséquent :

Théorème 5.2.4 *Sous les hypothèses* **(H1)-(H3), (H5), (H6)** *et :*

$$\sum_{j=0}^{n} \sup_{(t,s,s')} \|\partial_{j+2} A(t,s) - \partial_{j+2} A(t,s')\|_{\mathcal{L}(H)} < \left(m_{j_0} - \sum_{j \neq j_0} M_j\right)^{-1}.$$

Etant donnée une isométrie bijective, $\Theta : \ell^2(G) \to \ell^2(G)$, *il existe une unique* $\underline{x} \in \ell^2(G)$ *t.q.:*

$$A\left(., \underline{x}, \Theta(\underline{x}), \ldots, \Theta^n(\underline{x})\right) = 0. \tag{5.5}$$

Chapitre 6

Solutions "mild" presque-périodiques ou pseudo-presque-automorphes d'équations aux dérivées partielles d'évolution.

Ce chapitre a comme points communs de rechercher des solutions en des sens variés d'équations d'évolution en étudiant les espaces adéquats puis en appliquant des techniques de point fixe. Il a donné lieu à quatre publications [13, 38, 37, 96].

6.1 Solutions pseudo-presque-automorphes.

Les notions de solutions presque-automorphes (a.a.), introduites par Bochner au milieu des années 60, ont pris un regain d'intérêt depuis la publication de [92]. Récemment, J. Liang et al. ont proposé une notion de solution pseudo-presque-automorphe, qui sont des fonctions sommes d'une fonction presque-automorphe et d'un terme ergodique, i.e. de moyenne nulle (cf [83, 84, 118]) ; la décomposition est unique. Cette notion étend celle d'asymptotiquement presque automorphe et est plus complexe à étudier. Dans [61] les auteurs se sont intéressés à l'existence et l'unicité d'une solution a.a. de :

$$\frac{d}{dt}\left[u(t) + f(t, u(t))\right] = Au(t) + g(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.1}$$

Nous allons nous intéresser à deux types d'équation :

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{6.2}$$

où A est un opérateur sectoriel non borné et non nécessaire à domaine dense dans un Banach E et $g : \mathbb{R} \times E_\alpha \to E$, où E_α, $\alpha \in (0, 1)$, est un espace intermédiaire entre $D(A)$ et E.

La deuxième équation est une perturbation de

$$\frac{du}{dt} = Au(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{6.3}$$

en une équation :

$$\frac{d}{dt}\left[u(t) + f(t, u(t))\right] = Au(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{6.4}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe exponentiellement stable agissant sur X, B, C sont deux opérateurs fermés à domaine dense dans X, et f est continue.

6.1.1 Quelques rappels.

Définition 6.1.1 *Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to X$ est dite presque-automorphe (a.a.) si pour toute suite $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe une sous-suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} f(t+s_n)$$

est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} g(t-s_n)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

De même :

Définition 6.1.2 *Une fonction continue $f : \mathbb{R}\times X \to X$ est dite a.a. en $t \in \mathbb{R}$ pour tout $u \in X$ si pour toute suite $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe une sous-suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$g(t,u) := \lim_{n\to\infty} f(t+s_n,u)$$

est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ $u \in E$, et

$$f(t,u) = \lim_{n\to\infty} g(t-s_n,u)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $u \in E$.

Rappelons que si f est a.a., alors son domaine est relativement compact. De ce fait, elle est bornée et on peut montrer que l'ensemble des fonctions a.a., noté $AA(E)$, muni de la norme uniforme, est un espace de Banach. Ces fonctions sont des extensions des fonctions p.p. (définition de Bochner).

Définition 6.1.3 *1. Une fonction continue est dite de moyenne nulle si elle appartient à :*

$$AA_0(\mathbb{R},X) = \left\{\phi \in BC^0(\mathbb{R},E) : \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\phi(\sigma)|_E d\sigma = 0\right\}. \qquad (6.5)$$

2. De même, on définit $AA_0(\mathbb{R}\times E,E)$ comme l'ensemble des fonctions $f \in BC(\mathbb{R}\times E,E)$ telles que :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(\sigma,x)|_E d\sigma = 0$$

uniformément pour x dans tout borné de E.

On définit maintenant les espaces de fonctions pseudo-presque-automorphes (p.a.a.) $PAA(\mathbb{R},E)$ et $PAA(\mathbb{R}\times E,E)$:

$$PAA(\mathbb{R},E) = \left\{\begin{array}{l} f = g+\phi \in BC(\mathbb{R},E), \\ g \in AA(\mathbb{R},E) \quad et \quad \phi \in AA_0(\mathbb{R},E)\end{array}\right\};$$

$$PAA(\mathbb{R}\times E,E) = \left\{\begin{array}{l} f = g+\phi \in BC(\mathbb{R}\times E,E), \\ g \in AA(\mathbb{R}\times E,E) \quad et \quad \phi \in AA_0(\mathbb{R}\times E,E)\end{array}\right\}.$$

Les termes g et ϕ sont respectivement appelés terme principal et terme ergodique de f. La décomposition $f = g+\phi$ est unique.

On rappelle ([118] Theorem 2.2) que $PAA(\mathbb{R},E)$, muni de la norme du sup, est un espace de Banach.

6.1.2 Une équation du type Volterra.

Sous réserve d'existence, considérons la convolution $f \star h$ de f et h, où $f : \mathbb{R} \to X$ est p.a.a. et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est Lebesgue mesurable :

$$(f \star h)(t) := \int_{\mathbb{R}} f(\sigma)h(t-\sigma)d\sigma = \int_{\mathbb{R}} f(t-\sigma)h(\sigma)d\sigma = (h \star f)(t), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{6.6}$$

Soit $\varphi \in L^1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. L'opérateur $A_{\varphi,\lambda}$ défini par :

$$A_{\varphi,\lambda}u = \lambda u + \varphi \star u \tag{6.7}$$

agit continûment sur $BC(\mathbb{R}, E)$. De ce fait :

Proposition 6.1.4 *Pour $\Omega = PAP(\mathbb{R}, E)$ ou $\Omega = PAA(\mathbb{R}, E)$:*

$$A_{\varphi,\lambda}(\Omega) \subset \Omega.$$

A titre d'application, considérons :

$$x(t) = g(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} a(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma, \; t \in \mathbb{R}, \tag{6.8}$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $a \in L^1(\mathbb{R})$.

Proposition 6.1.5 *Supposons $g \in PAA(\mathbb{R}, E)$ et $\|a\|_{L^1} < 1$. Alors l'équation (6.8) a une unique solution p.a.a.*

Pour la démonstration, on applique le théorème du point fixe de Banach-Picard à l'opérateur, qui est bien défini en vertu de ce qui précède, $\Gamma : PAA(\mathbb{R}, E) \to PAA(\mathbb{R}, E)$, d'expression :

$$(\Gamma x)(t) = g(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} a(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma, \quad t \in \mathbb{R}.$$

6.1.3 Solutions p.a.a. dans les espaces intermédiaires.

On s'intéresse ici à l'équation (6.2) dans des espaces intermédiaires.

On suppose que A est un opérateur non borné sectoriel à domaine non nécessairement dense à valeurs dans un espace de Banach E et $f : \mathbb{R} \times E_\alpha \to E$, où E_α, $\alpha \in (0, 1)$, est un espace de Banach intermédiaire entre $D(A)$ et E. De tels exemples d'espaces E_α sont les espaces d'exposants fractionnaires $D((-A)^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, les espaces $D_A(\alpha, \infty)$, introduits par J. L. Lions et J. Peetre, et les espaces de Hölder $D_A(\alpha)$ qui sont identiques avec les espaces d'interpolation de G. Da Prato and P. Grisvard.

Rappelons que dire que A est sectoriel signifie qu'il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}$, $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $M > 0$ telles que :

$$\begin{array}{ll} (i) & \rho(A) \supset S_{\theta,\omega} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \omega, |arg(\lambda - \omega)| < \theta\} \\ (ii) & \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda-\omega|}, \quad \lambda \in S_{\theta,\omega}. \end{array}$$

Dans ce cas A, génère un semi-groupe analytique $\mathcal{T} := (T(t))_{t\geq 0}$ sur $]0, \infty[$ vers $\mathcal{L}(X)$ tel que :

$$\begin{array}{l} \|T(t)\| \leq M_0 e^{\omega t}, \quad t > 0, \\ \|t(A-\omega)T(t)\| \leq M_1 e^{\omega t}, \quad t > 0. \end{array}$$

Le semi-groupe $\mathcal{T}$ est supposé être hyperbolique, i.e. on a une projection P et des constantes $M, \delta > 0$ t.q. chaque $T(t)$ commute avec P, $\ker P$ est invariant par rapport à $T(t)$, $T(t) : ImQ \longrightarrow ImQ$ est inversible et

$$\|T(t)Px\| \leq Me^{-\delta t}\|x\| \qquad \text{pour } t \geq 0, \tag{6.9}$$

$$\|T(t)Qx\| \leq Me^{\delta t}\|x\| \qquad \text{pour } t \leq 0, \tag{6.10}$$

où $Q := I - P$ et pour $t \leq 0$, $T(t) := (T(-t))^{-1}$.
On rappelle que lorsque $\mathcal{T}$ est analytique, il est hyperbolique si et seulement si

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset,$$

cf. par exemple [65, Prop 1.15, p.305].

Rappelons que pour $\alpha \in]0,1[$, un espace de Banach E_α (norme $\|\cdot\|_\alpha$) est dit espace intermédiaire entre $D(A)$ et E, ou un espace de classe $\mathcal{J}_\alpha$, si $D(A) \subset X_\alpha \subset X$ et qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall x \in D(A), \qquad \|x\|_\alpha \leq c\|x\|^{1-\alpha}\|x\|_A^\alpha, \tag{6.11}$$

où $\|\cdot\|_A$ est la norme du graphe de A. De tels exemples d'espaces E_α sont les $D((-A)^\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$, domaines des puissances fractionnaires de $-A$, les espaces d'interpolation $D_A(\alpha, \infty)$, $\alpha \in (0,1)$, définis de la manière suivante :

$$\begin{cases} D_A(\alpha,\infty) := \{x \in X : [x]_\alpha = \sup_{0<t\leq 1} \|t^{1-\alpha}(A-\omega)e^{-\omega t}T(t)x\| < +\infty\} \\ \|x\|_\alpha = \|x\| + [x]_\alpha, \end{cases}$$

et les espaces de Hölder abstraits $D_A(\alpha) := \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_\alpha}$. Les deux derniers exemples ne dépendent que de $D(A)$ et E (contrairement aux espaces de puissances fractionnaires de $-A$) ; c'est-à-dire que si B est un opérateur de même domaine que A, leurs espaces d'interpolation et de Hölder coïncident.

Pour le semi-groupe hyperbolique analytique $\mathcal{T}$, on a des estimations analogues à (6.9) et (6.10) avec les normes $\|\cdot\|_\alpha$. Plus précisément on peut établir qu'il existe une constante $c(\alpha) > 0$ telle que :

$$\|T(t)Qx\|_\alpha \leq c(\alpha)e^{\delta t}\|x\| \qquad \text{pour } t \leq 0. \tag{6.12}$$

et des constantes $M(\alpha) > 0$ et $\gamma > 0$ telles que :

$$\|T(t)Px\|_\alpha \leq M(\alpha)t^{-\alpha}e^{-\gamma t}\|x\| \qquad \text{pour } t > 0. \tag{6.13}$$

Formulons les hypothèses suivantes :

- H1. A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique hyperbolique $(T(t))_{t\geq 0}$
- H2. $(t,x) \mapsto f(t,x)$ est uniformément continue sur chaque partie bornée $K \subset E_\alpha$ uniformément en $t \in \mathbb{R}$;
- H3. $(t,x) \mapsto g(t,x)$ est uniformément continue sur chaque partie bornée $K \subset E_\alpha$ uniformément en $t \in \mathbb{R}$;
- H4. f satisfait

  $$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k(t)\|x-y\|_\alpha$$

  pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x, y \in X_\alpha$ pour une certaine fonction $k \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que

  $$\|k\|_1[C(\alpha)\delta^{-1} + M(\alpha)\gamma^{1-\alpha}\Gamma(1-\alpha)] < 1. \tag{6.14}$$

Par définition, une solution "mild" de (6.2) est une fonction continue $x : \mathbb{R} \to E_\alpha$ telle que

$$x(t) = T(t-s)x(s) + \int_s^t T(t-\sigma)f(\sigma, x(\sigma))\, d\sigma \tag{6.15}$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $t \geq s$.

Commençons à titre de lemme avec le problème non homogène :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + h(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{6.16}$$

Proposition 6.1.6 *Si $h \in PAA(\mathbb{R}, E)$, alors il existe une unique solution "mild" $x(\cdot)$ p.a.a. de (6.16) in $PAA(\mathbb{R}, E_\alpha)$ donnée par :*

$$x(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)Ph(s)ds - \int_t^{+\infty} T(t-s)Qh(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6.17}$$

On sait que l'expression proposée donne l'unique solution "mild" de (6.16) (cf [47]). On veut montrer qu'elle est p.a.a. On décompose alors h en sa partie principale $\beta \in AA(\mathbb{R}, E)$ et sa partie ergodique $\phi \in AA_0(\mathbb{R}, E)$. Ainsi x apparaît comme étant la somme $\xi + \theta$, où :

$$\xi(t) := \int_{-\infty}^t T(t-s)P\beta(s)ds - \int_t^{+\infty} T(t-s)Q\beta(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

et :

$$\theta(t) := \int_{-\infty}^t T(t-s)P\phi(s)ds - \int_t^{+\infty} T(t-s)Q\phi(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On sait que $\xi \in AA(\mathbb{R}, E_\alpha)$, et il reste donc à prouver que $\theta \in AA_0(\mathbb{R}, E_\alpha)$. C'est l'objet d'un long calcul avec découpages d'intégrales et estimations données par le semi-groupe.

Nous sommes alors en mesure de démontrer :

Théorème 6.1.7 *Sous les hypothèses H1-H4, l'équation d'évolution (6.2) a une unique solution p.a.a. $x(\cdot)$ dans E_α ($x(\cdot) \in PAA(\mathbb{R}, E_\alpha)$) vérifiant :*

$$x(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)Pf(s, x(s))ds - \int_t^{+\infty} T(t-s)Qf(s, x(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6.18}$$

La proposition précédente couplée aux hypothèses H1 et H2 permet de définir l'opérateur $\mathcal{G} : PAA(\mathbb{R}, X_\alpha) \to PAA(\mathbb{R}, X_\alpha)$ d'expression :

$$(\mathcal{G}x)(t) := \int_{-\infty}^t T(t-s)Pf(s, x(s))ds - \int_t^{+\infty} T(t-s)Qf(s, x(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les hypothèses formulées permettent de lui appliquer le théorème du point fixe de Banach-Picard.

6.1.4 Solutions p.a.a. pour l'équation (6.4).

Formulons les hypothèses suivantes :

(H.1) A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe exponentiellement stable $(T(t))_{t\geq 0}$ tel qu'il existe $M > 0$ et $\delta > 0$ de sorte que :

$$\|T(t)\|_{B(E)} \leq Me^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

De plus, la fonction $\sigma \to AT(\sigma)$ définie de $]0, \infty[$ vers $B(E)$ est Lebesgue-mesurable et il existe une fonction $\gamma :]0, \infty[\to [0, \infty[$ telle que $\sup_{s \geq s_0} \gamma(s) < \infty$ pour tout $s_0 > 0$ et une constante $\omega > 0$ avec $\rho := \displaystyle\int_0^\infty e^{-\omega s}\gamma(s)ds < \infty$ telle que

$$\|AT(s)\|_{B(E)} \leq e^{-\omega s} \cdot \gamma(s), \quad s > 0.$$

(H.2) La fonction $f : \mathbb{R} \times E \to E$, $(t,u) \mapsto f(t,u)$ est continue et

$$\|f(t,u) - f(t,v)\|_E \leq k(t) \, . \, \|u-v\|, \quad \text{and}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $u, v \in E$, avec $k \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$.

(H.3) $f = g + \psi \in PAA(\mathbb{R} \times E, E)$, où g et ψ sont respectivement le terme principal et le terme ergodique de f ; on suppose que f et g sont uniformément continus sur tout borné $K \subset E$ uniformément en $t \in \mathbb{R}$.

Définition 6.1.8 *Une fonction $u \in BC(\mathbb{R}, E)$ est appelée solution "mild" de (6.4) Si la fonction $s \to AT(t-s)f(s,u(s))$ est intégrable sur $]-\infty, t[$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et :*

$$u(t) = -f(t,u(t)) - \int_{-\infty}^{t} AT(t-s)f(s,u(s))ds$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Lemme 6.1.9 *Supposons vraies les hypothèses (H.1)-(H.2)-(H.3). Alors l'opérateur Λ_1 défini par :*

$$\forall \xi \in PAA(E), \quad (\Lambda_1 \xi)(t) = \int_{-\infty}^{t} AT(t-s)f(s,\xi(s))ds$$

envoie $PAA(E)$ dans lui-même.

Pour la démonstration, on décompose $h(.) = f(.,\xi(.))$ en sa partie principale et sa partie ergodique $h = \beta + \phi$. Comme dans [93], on peut prouver que $t \mapsto \int_{-\infty}^{t} AT(t-s)\beta(s)ds$ est un élément de $AA(E)$. Introduisant :

$$\nu(t) = -\int_{-\infty}^{t} AT(t-s)\phi(s)ds,$$

on parvient à l'aide de découpages d'intégrales à montrer que ν est de moyenne nulle. Ainsi, h est bien la somme d'un terme principal a.a. et d'une partie ergodique, c'est donc bien une fonction p.a.a.

Théorème 6.1.10 *Supposons (H.1), (H.2) et (H.3). Alors l'équation (6.4) a une unique solution (mild) qui est p.a.a. pourvu que $(1+\rho)\|k\|_\infty < 1$.*

On applique le théorème du point fixe de Banach à $\Gamma : AA(E) \to AA(E)$ défini par :

$$\Gamma(u) : t \mapsto -f(t,u(t)) - \int_{-\infty}^{t} AT(t-s)f(s,u(s))ds.$$

6.2 Solutions pseudo-presque-automorphes à poids.

Nous travaillons ici avec les fonctions pseudo-presque-automorphes à poids (w.p.a.a.), notion introduite par T. Diagana [62]. Nous étendons quelques-unes de leurs propriétés et présentons un théorème de composition avec des hypothèses plus faibles que la lipschitzianité. On applique ensuite les résultats à la recherche de solutions "mild" w.p.a.a. d'équations abstraites à valeurs dans un Banach E du type :

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad \mathrm{t} \in \mathbb{R}, \tag{6.19}$$

où A est le générateur infinitesimal d'un C_0-semigroupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ à valeurs dans un espace de Banach E, et $f : \mathbb{R} \times E \to E$ est une fonction w.p.a.a.

6.2.1 Fonctions pseudo-presque-automorphes à poids.

Comme en [62], considérons l'ensemble $\mathcal{U}$ des fonctions localement intégrables et strictement positives $\rho : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ qui jouent donc le rôle du poids. Pour $r > 0$ et $\rho \in \mathcal{U}$, introduisons :

$$m(r, \rho) := \int_{-r}^{r} \rho(x)dx.$$

On pose

$$\mathcal{U}_\infty := \{\rho \in \mathcal{U} : \lim_{r\to\infty} m(r, \rho) = \infty\}$$

et

$$\mathcal{U}_b := \{\rho \in \mathcal{U}_\infty : \rho \textit{ est borné et } \inf_{x\in\mathbb{R}} \rho(x) > 0\}.$$

On a bien entendu $\mathcal{U}_b \subset \mathcal{U}_\infty \subset \mathcal{U}$.

On introduit pour $\rho \in \mathcal{U}_\infty$:

$$PAA_0(E, \rho) := \{f \in BC(\mathbb{R}, E) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{m(r, \rho)} \int_{-r}^{r} \|f(s)\|\rho(s)ds = 0\}$$

De même, $PAA_0(\mathbb{R} \times E, \rho)$ est la classe des fonctions $F : \mathbb{R} \times X \to X$ continues telles que $F(\cdot, y)$ est bornée pour toute $y \in X$, et

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{m(r, \rho)} \int_{-r}^{r} \|F(s, y)\|\rho(s)ds = 0$$

uniformément par rapport à $y \in E$.

On introduit alors les espaces de fonctions w.p.a.a. (par rapport au poids ρ).

$$WPAA(E, \rho) = \left\{ \begin{array}{l} f = g + \phi \in BC(\mathbb{R}, E) : \\ g \in AA(\mathbb{R}, E) \;\; et \;\; \phi \in PAA_0(E, \rho) \end{array} \right\};$$

$$WPAA(\mathbb{R} \times E, E) = \left\{ \begin{array}{l} f = g + \phi \in BC(\mathbb{R} \times E, E) : \\ g \in AA(\mathbb{R} \times E, E) \;\; et \;\; \phi \in PAA_0(\mathbb{R} \times E, E, \rho) \end{array} \right\}.$$

Comme pour les fonctions w.p.a.a., on établit l'unicité de la décomposition, l'argument crucial étant que si $f = g + \phi$, on a $g(\mathbb{R}) \subset \overline{f(\mathbb{R})}$.

Par l'unicité, et du fait que les deux parties vivent dans des espaces de Banach, on établit :

Proposition 6.2.1 *Si $\rho \in \mathcal{U}_b$, alors $(WPAA(E, \rho), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.*

La convolution est correctement définie, ce qui permet de considérer des équations de Volterra :

Proposition 6.2.2 *Si $\rho \in \mathcal{U}_b$, $f \in WPAA(E, \rho)$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors l'opérateur J_g : $WPAA(X, \rho) \to WPAA(X, \rho)$ d'expression :*

$$(J_g f)(t) := (f \star g)(t)$$

est bien défini.

On peut définir une relation d'équivalence sur $\mathcal{U}_\infty$, notée $\sim$ (et notée $\prec$ par Diagana ([63]) :

$$(\rho_1 \sim \rho_2) \Leftrightarrow \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \in \mathcal{U}_b\right).$$

Le passage au quotient se passe bien au niveau des espaces ; si $\rho_1 \sim \rho_2$, alors $WPAA(E, \rho_1) = WPAA(E, \rho_2)$.

On en vient à l'opérateur de Nemytskii. Prenons $f \in WPAA(X, \rho)$ et notons g sa partie principale. On suppose :

- H1. $(t, x) \mapsto f(t, x)$ est uniformément continue sur toute partie bornée $K \subset X$, uniformément en $t \in \mathbb{R}$;
- H2. $(t, x) \mapsto g(t, x)$ est uniformément continue sur toute partie bornée $K \subset X$, uniformément en $t \in \mathbb{R}$

On peut alors énoncer :

Théorème 6.2.3 *Supposons $f = g + \phi \in WPAA(E, \rho)$ où $\rho \in \mathcal{U}_\infty$ et que H1 et H2 soient satisfaites. Alors l'opérateur de Nemytskii $\mathcal{N}_f$ envoie $WPAA(E, \rho)$ dans lui-même.*

6.2.2 Une équation d'évolution.

On considère l'équation :

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad \mathrm{t} \in \mathbb{R}, \tag{6.20}$$

avec les hypothèses suivantes :

- (H3) A est le générateur infinitesimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur un Banach E tel que :
$$\|T(t)\| \leq Ne^{-\omega t}, \ t \geq 0$$
- (H4) $f = g + \phi \in WPAA(E, \rho)$ où $\rho \in \mathcal{U}_\infty$
- (H5) $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_f \|x - y\|, \ \forall x, y \in E$
- (H6) $\|g(t, x) - g(t, x)\| \leq L_g \|x - y\|, \ \forall x, y \in E$

Lemme 6.2.4 *Si $f = g + \phi \in WPAA(E, \rho)$ où $\rho \in \mathcal{U}_\infty$ et si $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe exponentiellement stable, alors $F(t) := \int_{-\infty}^t T(t - s)f(s)ds \in WAAP(E, \rho)$.*

Décomposant f en sa partie principale g et sa partie ergodique ϕ, on peut écrire $F = G + \Phi$ avec $G(t) := \int_{-\infty}^t T(t - s)g(s)ds$ et $\Phi(t) := \int_{-\infty}^t T(t - s)\phi(s)ds$. Il est connu (cf. [94]) que, $G \in AA(E)$. On montre alors que $\Phi \in PAA_0(E, \rho)$ par des estimations d'intégrales.

Théorème 6.2.5 *Sous les hypothèses (H3-H6), l'équation (6.20) a une unique solution "mild" dans $WPAA(X, \rho)$ lorsque $\frac{NL_f}{\omega} < 1$.*

On peut définir l'opérateur : $\Gamma : WPAA(X, \rho) \to WPAA(X, \rho)$ d'expression :

$$(\Gamma x)(t) := \int_{-\infty}^t T(t - \sigma)f(\sigma, x(\sigma))d\sigma, \ t \in \mathbb{R}.$$

On montre alors que cet opérateur est contractant.

6.3 Solutions presque-périodiques jusqu'à l'ordre n.

Les fonctions $C^{(n)}$-presque-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ont été étudiées en premier par Adamczak ([3] et [4]). Une fonction $f : \mathbb{R} \to E$ sera dite $\mathrm{C}^{(n)}$-presque-périodique (abréviation $C^{(n)}$-p.-p. et notation $f \in \mathrm{AP}^n(\mathbb{R}, E)$) si f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $f, f', \ldots, f^{(n)}$ sont toutes dans $\mathrm{AP}^0(\mathbb{R}, E)$. $\mathrm{AP}^n(\mathbb{R}, E)$, muni de sa norme naturelle :

$$\|f\|_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sum_{i=0}^n |f^{(i)}(t)|_E,$$

est un espace de Banach. Pour une fonction $f \in \mathrm{BC}^n(\mathbb{R}, E)$, être dans $\mathrm{AP}^n(E)$ est équivalent au fait que pour tout $\varepsilon > 0$, son ensemble $E^{(n)}(\epsilon, f)$ de $(\| \bullet \|_n, \epsilon)$-presque-périodes, défini par :

$$E^{(n)}(\epsilon, f) = \{\tau > 0, \quad \|f(.+\tau) - f\|_n < \epsilon\}$$

is relativement dense dans $\mathbb{R}$.

Étendant des résultats de J. Liang, L. Maniar, G. M. N'Guérékata et T-J. Xiao, qui avaient étudié dans [82] l'équation :

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{6.21}$$

dans un contexte où A est périodique, nous allons cette fois supposer que nous sommes en dimension infinie et que A n'est plus nécessairement périodique mais génère une famille exponentiellement stable d'opérateurs $(U(t,s))_{t\geq s}$ satisfaisant les conditions d'Acquistapace-Terreni.

On note respectivement $\mathrm{BC}(\mathbb{R}, E)$, $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}, E)$, $\rho(D)$, $R(\lambda, E)$, $sp(f)$ l'espace des fonctions continues bornées $f : \mathbb{R} \to E$, le sous espace des fonctions bornées et uniformément continues, la résolvante $(\lambda - D)^{-1}$ de D, et le spectre de Carleman de $f \in L^\infty(\mathbb{R}, E)$ (voir par exemple [58]).

6.3.1 Spectre uniforme d'une fonction dans $\mathrm{BC}(\mathbb{R}, E)$.

On rappelle quelques propriétés du spectre uniforme de fonctions bornées, notion introduite dans [58]. Pour cela, considérons l'équation linéaire

$$x'(t) - \lambda x = f(t), \tag{6.22}$$

avec $f \in \mathrm{BC}(\mathbb{R}, E)$. Lorsque $Re\lambda \neq 0$, l'équation homogène satisfait la dichotomie exponentielle, de sorte que (6.22) a une unique solution bornée que l'on note $x_{f,\lambda}(\cdot)$. Pour chaque $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$x_{f,\lambda}(\xi) := \begin{cases} \int_{-\infty}^{\xi} e^{\lambda(\xi - t)} f(t)dt & (\text{si } Re\lambda < 0) \\ -\int_{\xi}^{+\infty} e^{\lambda(\xi - t)} f(t)dt & (\text{si } Re\lambda > 0). \end{cases} \tag{6.23}$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda\eta} f(\xi + \eta)d\eta & (\text{si } Re\lambda < 0) \\ -\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda\eta} f(\xi + \eta)d\eta & (\text{si } Re\lambda > 0). \end{cases} \tag{6.24}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$, on a ainsi $\lambda \in \rho(\mathcal{D})$ et $x_{f,\lambda} = (\mathcal{D} - \lambda)^{-1} f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$ and $f \in BC(\mathbb{R}, E)$. De plus, l'opérateur $(\lambda - \mathcal{D})^{-1} f$ est analytique sur $\mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$.

Définition 6.3.1 *Soit $f \in \mathrm{BC}(\mathbb{R}, E)$.*

1. *$\alpha \in \mathbb{R}$ est dit uniformément régulier par rapport à f s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $i\alpha$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\lambda \mapsto (\lambda - \mathcal{D})^{-1} f$ admette un prolongement analytique à $\mathcal{U}$.*

2. *L'ensemble des $\xi \in \mathbb{R}$ qui ne sont pas uniformément réguliers par rapport à $f \in \mathrm{BC}(\mathbb{R}, E)$ s'appelle le spectre uniforme de f et se note $sp_u(f)$.*

Lorsque $f \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}, E)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, les notions de spectre régulier et d'uniformément régulier sont identiques (cf. [86]).

Rappelons quelques propriétés du spectre uniforme :

Proposition 6.3.2 *Soit $g, f, f_n \in \mathrm{BC}(\mathbb{R}, E)$ tel que $f_n \to f$ lorsque $n \to +\infty$ et soit $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un ensemble fermé tel que $sp_u(f_n) \subset \Lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors on a :*

1. *$sp_u(f) = sp_u(f(h + \cdot))$;*

2. $sp_u(\alpha f(\cdot)) \subset sp_u(f),\ \alpha \in \mathbb{C}$;
3. $sp(f) \subset sp_u(f)$;
4. $sp_u(Bf(\cdot)) \subset sp_u(f),\ B \in L(E)$;
5. $sp_u(f+g) \subset sp_u(f) \cup sp_u(g)$;
6. $sp_u(f) \subset \Lambda$.

On rappelle aussi (cf [86]) que le spectre uniforme et le spectre de Carleman, $sp_c(f)$ coïncident.

De ce qui précède et d'une récurrence, on établit :

Proposition 6.3.3 *Lorsque $f \in \mathrm{C}_b^{(n)}(E)$, on a :*

$$sp_u(f^{(i)}) \subset sp_u(f^{(i-1)}),\ \text{pour tout } i = 1, 2, ..., n.$$

6.3.2 Une équation du type Volterra.

Lemme 6.3.4 *Si $f \in \mathrm{AP}^{(n)}(E)$ et si $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ est à à support compact. Alors $g := \phi * f \in AP^{(n)}(E)$ et $sp_u(g) \subset sp_u(f) \cap supp(\phi)$.*

Ce lemme est connu pour $n = 0$, et se déduit par dérivation de la convolution. Il vient :

Proposition 6.3.5 *On suppose que $g \in \mathrm{AP}^{(n)}(\mathbb{R})$ et que $\|a\|_{L^1} < 1$ est à support compact. Alors :*

$$x(t) = g(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} a(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma,\ t \in \mathbb{R}.$$

a une unique solution dans $\mathrm{AP}^n(\mathbb{R})$.

En effet, le lemme permet de définir l'opérateur $\Gamma : AP^{(n)}(\mathbb{R}) \to AP^{(n)}(\mathbb{R})$:

$$(\Gamma x)(t) := g(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} a(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma,\ t \in \mathbb{R},$$

dont on montre qu'il est contractant.

6.3.3 Applications aux équations d'évolution.

Rappelons en premier les théorèmes de Bohl-Bohr [50, Theorem 3.4], [54, Theorem 6.20] et de Kadets [78], que l'on énonce ici à l'ordre n (les théorèmes classiques sont ceux pour $n = 0$) :

Théorème 6.3.6 *Soit $f \in \mathrm{AP}^{(n)}(E)$ et F une primitive de f. Alors :*

- *lorsque l'image de F est relativement compacte, $F \in \mathrm{AP}^{(n+1)}(E)$;*
- *lorsque[1] E ne contient pas de copie isomorphe à c_0, on a $F \in \mathrm{AP}^{(n+1)}(E)$ si et seulement si $\mathcal{R}_F$ est bornée.*

On commence par l'équation linéaire sur un espace de Banach (complexe) E :

$$x'(t) = Ax(t) + f(t),\ \ t \in \mathbb{R}, \tag{6.25}$$

où $A : D(A) \subset E \to E$ est linéaire et $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, E)$.

[1] c'est par exemple le cas lorsque E est uniformément convexe.

On pose :

$$\Pi := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \ Rez \neq 0\}.$$

Rappelons que A est dit de type le plus simple lorsque $A \in \mathcal{L}(E)$ et A se décompose sous la forme $A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$, où $\lambda_k \in \mathbb{C},\ k = 1, ...n$, et les $(P_k)_{1\leq k\leq n}$ forment un système d'opérateurs tels que $\sum_{k=1}^{n} P_k = I$ et $P_j P_k = \delta_{jk} P_k$.

On étend le lemme 4.1 [82] en le lemme, de démonstration similaire :

Lemme 6.3.7 *Soit E est un espace de Banach ne contenant pas de copie isomorphe à c_0. Considérons sur E l'équation :*

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \ \ t \in \mathbb{R}, \tag{6.26}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathrm{AP}^{(n)}(E)$. Alors toute solution bornée x appartient à $\mathrm{AP}^{(n+1)}(E)$ lorsque $\lambda \notin \Pi$ et à $x \in \mathrm{AP}^{(n)}(E)$ lorsque $\lambda \in \Pi$.

On en vient alors à :

Théorème 6.3.8 *Soit $f \in \mathrm{AP}^n(E)$, où E ne contient pas de copie de c_0, et soit A de type le plus simple. Alors toute solution bornée de x de (6.25) satisfait $x \in \mathrm{AP}^{n+1}(E)$ lorsque $\lambda_k \notin \Pi,\ k = 1, ..., n$ et $x \in \mathrm{AP}^n(E)$ si $\lambda_k \in \Pi$ pour au moins un $k \in \{i, ..., n\}$.*

En effet, grâce à la décomposition de A, on se ramène à appliquer le lemme aux $P_j x$.

On en vient maintenant au cas de l'équation non autonome (6.21), i.e. :

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \ \ t \in \mathbb{R}. \tag{6.27}$$

On suppose que $A(.)$ satisfait les conditions de 'Acquistapace-Terreni' introduites dans [1], i.e. il existe des constantes $\lambda_0 \geq 0$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $L, K \geq 0$, et $\alpha, \beta \in (0, 1]$ avec $\alpha + \beta > 1$ telles que :

$$\Sigma_\theta \cup \{0\} \subset \rho(A(t) - \lambda_0), \quad \|R(\lambda, A(t) - \lambda_0)\| \leq \frac{K}{1 + |\lambda|} \tag{6.28}$$

et

$$\|(A(t) - \lambda_0)R(\lambda, A(t) - \lambda_0)[R(\lambda_0, A(t)) - R(\lambda_0, A(s))]\| \leq L|t - s|^\alpha |\lambda|^\beta$$

pour $t, s \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \Sigma_\theta := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg \lambda| \leq \theta\}$. Sous ces conditions, il existe une unique famille d'évolution $\{U(t, s)\}_{-\infty<s\leq t<+\infty}$ sur E, gouvernant l'équation (6.21), cf [2, Theorem 2.3] ou encore [1, 119, 120].

La famille $(U(t, s))_{t\geq s}$, satisfait les propriétés suivantes :

- (i) $U(t, t) = I$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- (ii) $U(t, s)U(s, r) = U(t, r)$ pour tout $t \geq s \geq r$,
- (iii) L'application $(t, s) \mapsto U(t, s)x$ est continue pour tout $x \in E$.

Nous supposerons de plus que $(U(t, s))_{t\geq s}$ est exponentiellement stable, i.e. il existe des constantes strictement positives N, ω indépendantes de $t \geq s$ telles que $\|U(t, s)\| \leq Ne^{-\omega(t-s)}$.

Signalons cette conséquence de la Proposition 4.4 de [87]:

Lemme 6.3.9 *On suppose que $A(.)$ satisfait les conditions d'Acquistapace-Terreni, que $U(t, s)$ est exponentiellement stable et que $R(\lambda_0, A(\cdot)) \in \mathrm{AP}(\mathbb{R}, L(E))$. Soit $f \in \mathrm{AP}(E)$ et $h > 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l(\varepsilon) > 0$ tel que chaque intervalle I de longueur $l(\varepsilon)$ contient un nombre τ satisfaisant*

$$\|U(t + \tau, s + \tau) - U(t, s)\| \leq \varepsilon e^{-\frac{\omega}{2}(t-s)}$$

pour tout $t - s \geq h$ et tout

$$\|f(t + \tau) - f(t)\| < \eta, \quad t \in \mathbb{R},$$

avec $\eta = \eta(\varepsilon, h) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Définition 6.3.10 *Sous ces assertions, appelons solution "mild" de l'équation (6.21) une fonction continue $x : \mathbb{R} \to E$ telle que :*

$$x(t) = U(t,s)x(s) + \int_s^t U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma, \quad t \geq s \in \mathbb{R}.$$

On peut alors énoncer :

Théorème 6.3.11 *Si la famille $(U(t,s))_{t\geq s}$ est exponentiellement stable et $f \in \mathrm{AP}^n(E)$. Alors l'équation 6.21 possède une unique solution "mild" dans $\mathrm{AP}^{(n)}(E)$.*

Considérons une solution "mild" de (6.21) :

$$x(t) = U(t,s)x(s) + \int_s^t U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma, \quad t \geq s \in \mathbb{R}$$

et définissons

$$y(t) = \int_{-\infty}^t U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma, \quad t \in \mathbb{R}$$

On montre que l'intégrale définissant y est absolument convergente. On vérifie à l'aide du lemme 6.3.9 que $y \in \mathrm{AP}^n(E)$. Le calcul montre alors que y est une solution "mild" de (6.21). Pour l'unicité, considérons x_1, x_2 deux solutions du problème et $z = x_1 - x_2$. z est solution de l'équation homogène :

$$z'(t) = A(t)z(t), \ t \in \mathbb{R}.$$

De ce fait, on sait que

$$z(t) = U(t,s)z(s), \ t \geq s,$$

et donc

$$\|z(t)\| \leq Ne^{-\omega(t-s)}.$$

Soit (s_n) une suite arbitraire telle que $s_n \to -\infty$. À t fixé, on a, à partir d'un certain rang, $s_n < t$, et donc posant $s = s_n$ et utilisant le fait que $\omega > 0$, on obtient $z = 0$.

Références

[1] P. Acquistapace, B. Terreni, *A unified approach to abstract linear parabolic equations*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 78 (1987), 47–107.

[2] P. Acquistapace, *Evolution operators and strong solution of abstract linear parabolic equations*, Differential Integral Equations 1 (1988), 433–457.

[3] M. Adamczak, $C^{(n)}$*-almost periodic functions*, Comment. Math. Prace Mat. 37 (1997), 1-12.

[4] M. Adamczak, S. Stoínski *On the (*$NC^{(n)}$*)-almost periodic functions*, Proceedings of the 6th. Conference on Functions Spaces (R. Grząślewicz, Cz. Ryll-Nardzewski, H. Hudzik, and J. Musielak, eds), World Scientific Publishing, New Jersey, 2003, 39-48.

[5] M. Allais, *Fréquences, probabilité et hasard*, Journal de la Société Statistique de Paris, tome 124, n^{o}2, 1983, pp.70-221.

[6] L. Amerio, G. Prouse, *Almost Periodic Functions and Functional Equations*, van Nostrand Reinhold Company, 1971.

[7] J. Andres, A. M. Bersani, *Almost-periodicity problem as a fixed-point problem for evolution inclusions*, Topol. Meth. Nonlin. Anal. 18 (2001), pp. 337–349.

[8] J. Andres, A.M. Bersani, R.F. Grande, *Hierarchy of almost-periodic function spaces*, Rend. Math. Appl. (7), vol 26 pp.121-188, 2006.

[9] J. Andres, L. Górniewicz, *Topological Fixed Point Principles for Boundary Value Problems*, Kluwer, Dordrecht, 2003.

[10] J. Andres, D. Pennequin: *On Stepanov almost-periodic oscillations and their discretizations*, J. Differnece Aqu. Appl. 18 (2012), no 10, 1665-1682.

[11] J. Andres, D. Pennequin, *On the Nonexistence of Purely Stepanov almost periodic of ordinary differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 140, no 8, pp. 2825-2834, 2012.

[12] J. Andres, D. Pennequin, *Semi-periodic solutions of difference and differential equations*, Boundary Value Problems 2012, 2012:141 doi:10.1186/1687-2770-2012-141

[13] J.-B. Baillon, J. Blot, G. M. N'Guérékata, D. Pennequin, *On* $C^{(n)}$*-almost periodic solutions to some nonautonomous differential equations in Banach spaces*, Comment. Math. (Prace Mat.) 46 (2006), no 2, 263-273.

[14] R. B. Basit, L. Tsend, *The generalized Bohr–Neugebauer theorem*, Diff. Eqns 8 (1974), pp. 1031–1035; translation from the Russian original in Diff. Uravneniya 8 (1972), pp. 1343–1348.

[15] M. Bahaj, O. Sidki: *Almost periodic solutions of semilinear equations with analytic semigroups in Banach spaces*, Electron. J. Differential Equations **2002**(96), 1-11, (2002).

[16] J. Bass, *Cours de mathématiques*, tome 3, Masson, Paris, 1971.

[17] J. D. Berg, A. Wilansky: *Periodic, almost-periodic, and semiperiodic sequences.* Michigan Math. J., vol 9, 4 (1962), 363–368.

[18] M.S. Berger, L. Zhang, *A New Method for Large Quasiperiodic Nonlinear Oscillations with Fixed Frequencies for the Nondissipative Conservative Systems (I)*, Commun. Applied Nonlinear Analysis 2, n. 2, pp. 79-106, 1996

[19] M.S. Berger, L. Zhang, *A New Method for Large Quasiperiodic Nonlinear Oscillations with Fixed Frequencies for the Nondissipative Second Order Conservative Systems of Second Type.* Commun. Applied Nonlinear Analysis 3 , n. 1, pp. 25-49, 1996

[20] J. Blot, *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.134, n^{o}2, 1988, pp.312-321.

[21] J. Blot, *Calcul des Variations en moyenne temporelle*, Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t306, Série I, 1988, pp.809-811.

[22] J. Blot, *Une approche variationnelle des orbites quasi-périodiques des systèmes hamiltoniens*, Annales des Sciences Mathématiques du Québec, vol.13, n^{o}2, 1989, pp.7-32.

[23] J. Blot, *Variational Calculus for Quasi-Periodic Geodesics*, Publications du Département de Mathématiques de l'Université de Limoges, fasc.11, 1989, pp.30-44.

[24] J. Blot, *Lagrange Multipliers in Variational Problems in Mean*, Optimization (Mathematische Operations-Forschung und Statistik), vol.20, n^{o}1, 1989, pp.15-25.

[25] J. Blot, *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians II*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol.40, n^{o}3, 1989, pp.457-463.

[26] J. Blot, *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians III*, Israel Journal of Mathematics, vol.67, n^{o}3, 1989, pp.337-344.

[27] J. Blot, *Trajectoires presque-périodiques des systèmes lagrangiens convexes*, Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 310, Série I, 1990, pp.761-763.

[28] J. Blot, *Une méthode Hilbertienne pour les trajectoires presque-périodiques*, Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 313, Série I, 1991, pp.487-490.

[29] J. Blot, *On Global Implicit Functions*, Nonlinear Analysis, Theory and Applications, vol.17, n^{o}10, 1991, pp.947-959.

[30] J. Blot, *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians III*, Israel Journal of Mathematics, vol.67, n^{o}3, 1989, pp.337-344.

[31] J. Blot, *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians IV*, Ricerce di Mathematica, vol.XL, n^{o}1, 1991, pp.3-18.

[32] J. Blot, *Almost periodic solutions of forced second order hamiltonian systems*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol. XIII, n^{o}3, 1991, pp.351-363.

[33] J. Blot, *Almost Periodic Forced Pendulum*, Funkcialaj Ekvacioj, vol.36, n^{o}2, 1993, pp.235-250.

[34] J. Blot, *Principe de Moindre Action et presque-périodicité*, dans Les actes du 2ème congrès de mécanique, tome 2 : Mécanique des Solides, organisé par la Société Marocaine des Sciences Mécaniques, 10-13/04/95, Faculté des Sciences Aîn Chok, Casablanca, Maroc, 1995.

[35] J. Blot, P. Cieutat, and J. Mawhin, *Almost-Periodic Oscillations of Monotone Second-Order Systems*, Adv. Differential Equations **2**(3), 693-714 (1997).

[36] J. Blot, P. Cieutat, G.M. N'Guérékata and D. Pennequin, *Superposition operators between various almost periodic function spaces and applications.*, Commun. Math. Anal. 16, no. 1, pp. 42-70, 2009.

[37] J. Blot, G. Mophou, G.M. N'Guérékata, D. Pennequin, *Weighted pseudo almost automorphic functions and applications to abstract differential equations*, Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 3-4, 903-909.

[38] J. Blot, G. M. N'Guérékata, D. Pennequin, *Existence and uniqueness of pseudo almost automorphic solutions to some classes of partial evolution equations*, Cubo 10 (2008), no 3, 161-170.

[39] J. Blot, D. Pennequin, *Spaces of Quasi-periodic Functions and Oscillations in Dynamical Systems*, Acta Applicandae Mathematicae, 65, pp.83–113, 2001.

[40] J. Blot, D. Pennequin,, *Existence and structure results on Almost Periodic solutions of Difference Equations*, J. Diff. Equa. Appli., vol. 7, 2001, pp.383–402 .

[41] J. Blot, D. Pennequin, *Singular Perturbations of Partial Differential Equations on the Torus. Applications to Almost Periodic and Quasi-Periodic Solutions of Lagrangian systems.* Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A Math. Anal., 14 (2007), Advances in Dynamical Systems, suppl. S2, pp. 97-102, 2007.

[42] S. Bochner, *Remark on the integration of almost periodic functions*, J. London Math. Soc. 8 (1933), pp. 250–254.

[43] S. Bochner, *A new approach to almost periodicity*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **48**, 2039-2043 (1962).

[44] S. Bochner, *Continuous Mappings of Almost Automorphic and Almost Periodic Functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **52**, 907-910 (1964).

[45] H. Bohr, *Almost Periodic Functions*, Julius Springer, Berlin, 1933 (Chelsea Publishing Company, N.Y., 1947).

[46] J.-B. Bost, *Tores invariants des systèmes dynamiques Hamiltoniens*, Séminaire Bourbaki, 37ème année, n^{o}639, 1984-1985.

[47] S. Boulite, L. Maniar, G. M. N'Guérékata, *Almost automorphic solutions for hyperbolic semilinear evolution equations*, Semigroup Forum, **71** (2005), 231-240.

[48] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1993.

[49] H.W. Broer, B. Huitemag, M.B. Sevryuk, *Quasi-Periodic Motions in families of Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics, n^{o}1645, Springer, Berlin, 1996.

[50] D. Bugajewski and G. M. N'Guérékata, *On some classes of almost periodic functions in abstract spaces*, Intern. J. Math. and Math. Sci., Vol. 2004, No. 61, Nov. 2004, 3237-3247.

[51] P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* Masson, Paris, 1994

[52] P. Cieutat, *Almost Periodic solutions of second-order systems with monotone fields on a compact subset.*, Nonlinear Anal. 53 (2003), 751-763.

[53] P. Cieutat, *Thèse de Doctorat de Mathématiques, Solutions presque-périodiques d'équations d'évolution et de systèmes non linéaires.* Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, (1996).

[54] C. Corduneanu, *Almost Periodic Functions*, Chelsea Publ. Comp., 1989.

[55] C. Corduneanu, *Almost periodic solutions to differential equations in abstract spaces*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 42 (1997), pp. 753–758.

[56] C. Corduneanu, *Almost Periodic Oscillations and Waves*, Springer, New-York, 2009.

[57] D.G. De Figuiereido, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of fundamental Research, Bombay, 1989

[58] T. Diagana, G. M. N'Guérékata, Nguyen Van Minh, *Almost automorphic solutions of evolution equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004), 3289-3298.

[59] L. I. Danilov, *Measure-valued almost periodic functions and almost periodic selections of multivalued maps*, Sb. Math. 188 (1997), pp. 1417–1438; translation from the Russian original in Mat. Sb. 188 (1997), pp. 3–24.

[60] L. I. Danilov, *On almost periodic multivalued maps*, Math. Notes 68(2000), pp. 71–77; translation from the Russian original in Mat. Zametki 68 (2000), pp. 82–90.

[61] T. Diagana, G. N'Guérékata, N. Van Minh, *Almost automorphic solutions of evolution equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004), 3289-3298.

[62] T. Diagana, *Weighted pseudo almost periodic functions and applications*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **343** (10) (2006), 643-646.

[63] T. Diagana, *Weighted pseudo almost periodic solutions to some differential equations*, Nonlinear Anal. **68** (2008), 2250-2260.

[64] J. Dhombres, *Moyennes*, *in* Espaces de Marcinkiewicz, Corrélations, Mesures, Systèmes Dynamiques, J. Bass Ed., Masson, Paris, 1985.

[65] K. J. Engel, R. Nagel, *One Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Graduate texts in Mathematics, Springer Verlag 1999.

[66] J. Favard, *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*, Gauthiers-Villars, Paris, 1933.

[67] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, N.Y. (2003).

[68] A.M. Fink, *Almost Periodic Differential Equations*, Lectures Notes in Mathematics n^{o}377, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[69] A. Haraux, *Asymptotic behavior of two-dimensional, quasi-autonomous, almost-periodic evolution equations.* J. Diff. Eqns, vol 66, 5 (1987), 62–70.

[70] V.P. Havin, N.K. Nikolski (Eds.), *Commutative Harmonic Analysis II*, Springer, Berlin, 1991.

[71] E. Hernandez, M.I. Pelicer, J.P.C. Dos Santos, *Asymptotically Almost Periodic and Almost Periodic Solutions for a Class of Evolution Equations*, Electron. J. Differential Equations, **2004**(61), 1-15 (2004).

[72] E. Hewitt, K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I & II*, Springer, Berlin, 1979 (2nd Ed.) and 1970.

[73] Z. Hu, *Contributions to the Theory of Almost Periodic Differential Equations*, PhD Thesis, Carleton Univ., Ottawa (Ontario, Canada), 2001.

[74] Z. Hu, *Boundedness and Stepanov almost periodicty of solutions*, Electronic J. Diff. Equations 35 (2005), pp. 1–7.

[75] Z. Hu, A. B. Mingarelli, *On a theorem of Favard*, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), pp. 417–428.

[76] Z. Hu, A. B. Mingarelli, *Favard's theorem for almost periodic processes on Banach space*, Proc. Dynam. Syst. Appl. 14 (2005), pp. 615–631.

[77] Z. Hu, A. B. Mingarelli, *Bochner's theorem and Stepanov almost periodic functions*, Ann. Mat. Pura Appl. 187 (2008), pp. 719–736.

[78] M. I. Kadets, *On the integration of almost periodic functions with values in Banach spaces*, Funct. Anal. Appl. 3 (1969), 228–230; translation from the Russian original in Funkcional. Anal. Priloz. 3 (1969), pp. 71–74.

[79] M.A. Krasnoselski, Y.Sh. Burd, Yu.S. Kolesov: *Nonlinear Almost Periodic Oscillations*, English Edition, John Wiley and Sons, Inc., New York (1973).

[80] B. M. Levitan, *Almost-Periodic Functions*, G.I.T – T.L., Moscow, 1959 (in Russian).

[81] B.M. Levitan, V.V. Zhikov, *Almost periodic functions and differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[82] J. Liang, L. Maniar, G. M. N'Guérékata, T-J. Xiao, *Existence and uniqueness of C^n-almost periodic solutions to some ordinary differential equations*, Nonlinear Analysis, (in press).

[83] J. Liang, J. Zhang, T.-J. Xiao, *Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically almost automorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), No. 2, 1493-1499.

[84] J. Liang, G. M. N'Guérékata, T.-J. Xiao, J. Zhang, *Some properties of pseudo almost automorphic functions and applications to abstract differential equations*, Nonlinear Analysis TMA, 70 (2009), no7, 2731-2735

[85] J.-L. Lions, *Contrôle Optimal de systèmes gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles*, Paris, Dunod Gauthiers-Villars, 1968.

[86] J. Liu, Nguyen Van Minh, G. M. N'Guérékata, V. Q. Phong, *Bounded solutions for parabolic equations in continuous function spaces*, Funkcial. Ekvac. (to appear)

[87] L. Maniar, S. Roland, *Almost periodicity of inhomogeneous parabolic equations*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **234**, Dekker, New York, 2003, 299-318.

[88] J.-L. Mauclaire, *Intégration et Théorie des Nombres*, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1986.

[89] G. H. Meisters, *On almost-periodic solutions of a class of differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), pp. 113–119.

[90] S. Mortola, R. Peirone, *The sum of periodic functions*, Boll. Unione Mat. Ital. 8, 393-396 (1999).

[91] J Necas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.

[92] G. M. N'Guérékata, *Almost Automorphic Functions and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces*, Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York-London-Moscow, 2001.

[93] G. M. N'Guérékata, *Existence and Uniqueness of Almost Automorphic Mild Solutions to Some Semilinear Abstract Differential Equations*, Semigroup Forum **69**(2004), pp. 80-86.

[94] G. M. N'Guérékata, *Existence and uniqueness of almost automorphic mild solutions to some semilinear abstract differential equations*, Semigroup Forum **69** (2004), 80-86.

[95] G.M. N'Guérékata, *Topics in Almost Automorphy*, Springer, New York (2005).

[96] G. M. N'Guérékata, D. Pennequin, *Pseudo almost automorphic solutions for hyperbolic semilinear evolution equations in intermediate Banach spaces* , Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal., Diff. Equ. and Dyn. Systems, Supp S1, 2009, 5-9

[97] A. A. Pankov, *Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operator Differential Equations.* (Translated from Russian by by V. S. Zjackovski and A. A. Pankov). Mathematics and Applications (Russian Series), v. **55**. Kluwer Academic Publishers, 1985.

[98] A.A. Pankov, *Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operators Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, 1990.

[99] D. Pennequin, *Contrôle Optimal et Oscillations*, Thèse de l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, 2000.

[100] D. Pennequin, *Existence of almost periodic solutions of discrete time equations*, Discr. Cont. Dynam. Syst. 7 (2001), pp. 51–60.

[101] D. Pennequin, *On some general almost periodic optimal control problems: link with periodic problems and necessary conditions*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 14 (2008), no3, 590-603.

[102] D. Pennequin, *Notion of weak variational solution for almost periodic or more general problems*, Afr. Diasp. J. Math. 15 (2013), no2, 101-110.

[103] D. Pennequin, *Existence of different kind of solutions for discrete time equations*, NonAutonomous Dynamical Systems, to appear.

[104] I.C. Percival, *Variational Principles for the Invariant Toroids of Classical Dynamics*, J. Phys. A. Math., Nucl. Gen., vol.7, N^{o}7, pp.794-802, 1974

[105] I.C. Percival, *Variational Principles for Invariant Tori and Cantori*, A.I.P. Conference Proceeding 57. pp.302–310, 1979

[106] A. S. Rao, *On differential operators with Bohr–Neugebauer property*, J. Diff. Eqns 13 (1973), pp. 490–494.

[107] L. Radová, *Theorems of Bohr–Neugebauer-type for almost-periodic differential equations*, Math. Slovaca 54 (2004), pp. 169–189.

[108] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Publishers, N.Y., 1962.

[109] L. Schwartz, *Distributions à valeurs vectorielles*, Annales de l'Institut Fourier, tome 7, pp.1–141, 1957.

[110] C.L. Siegel, *Lectures on the Geometry of Numbers*, Springer,1989.

[111] C.L. Siegel, J. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer, 1971, Berlin.

[112] M. Tarallo, *A Stepanov version for Favard theory*, Arch. Math. (Basel) 90 (2008), pp. 53–59.

[113] H. D. Ursell, *Parseval's theorem for almost-periodic functions*, Proc. London Math. Soc. 32 (1931), pp. 402–440.

[114] K. Vo-Khac, *Etude des fonctions quasi-stationnaires et de leurs applications aux équations différentielles opérationnelles*, Bulletin de la Société Mathématique de France, Mémoire 6, 1966.

[115] K. Vo-Khac, *Fonctions et distributions stationnaires, applications à l'étude de solutions stationnaires d'E.D.P.*, *in* Espaces de Marcinkiewicz, Corrélations, Mesures, Systèmes Dynamiques, J. BASS Ed., Masson, Paris, 1985.

[116] A. Weil, *L'intégration dans les Groupes Topologiques*, Hermann, Paris, 1940.

[117] M. Willem, *Analyse harmonique relle*, Hermann, Paris, 1995.

[118] T.-J. Xiao, J. Liang, J. Zhang, *Pseudo almost automorphic functions to semilinear differential equations in Banach spaces*, Semigroup Forum,**76** (2008), No. 3, 518-524. .

[119] A. Yagi, *Parabolic equations in which the coefficients are generators of infinitely differentiable semigroups II*, Funkcial. Ekvac. 33(1990), 139–150.

[120] A. Yagi, *Abstract quasilinear evolution equations of parabolic type in Banach spaces*, Boll. Un. Mat. Ital. B7 5 (1991), 341–368.

[121] T. Yoshizawa, *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions*, Springer-Verlag, N.Y., 1975.

[122] S. Zaidman, *Almost-periodic functions in abstract spaces*, Pitman Publishing, Inc., Marshfield. MA (1985).

[123] S. Zaidman, *Topics in Abstract Differential Equations,* Pitman Research Notes in Mathematics Ser. II John Wiley and Sons, New York, 1994-1995.

[124] A.J. Zaslavski, *The Existence and Structure of Extremals for a Class of Second Order Infinite Horizon Variational Problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 194, pp.660-696, 1995.

[125] A.J. Zaslavski, *Optimal Programs on Infinite Horizon 1*, S.I.A.M. Journal of Control and Optimization, vol. 33, n^{o}6, pp.1643-1660, 1995.

[126] A.J. Zaslavski, *Optimal Programs on Infinite Horizon 2*, S.I.A.M. Journal of Control and Optimization, vol. 33, n^{o}6, pp.1661-1686, 1995.

[127] A.J. Zaslavski, *Dynamic Properties of Optimal Solutions of Variational Problems*, Nonlinear Analysis, Methods and Applications, vol. 27, n^{o}8, pp.895-931, 1996.

[128] A.J. Zaslavski, *Existence and Structure of Extremals for One-Dimensional Nonautonomous Variational Problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 97, n^{o}3, pp.731-757, 1998.

[129] V.I. Zubov, *Theory of Oscillations*, English Edition, World Scientific Publishing. Co., Singapore (1999).