Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Mémoire présenté en vue de l'obtention de

l'**HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

Spécialité : **Mathématiques**

Présentée par
Mohammed Bachir

Contributions à la Géométrie des Espaces de Banach et à l'Optimisation

soutenue publiquement le 06 décembre 2017

après avis des rapporteurs :

M. Roberto COMINETTI, Professeur, Université Adolfo Ibañez (UAI)
M. Aris DANIILIDIS, Professeur, Université de Chili
M. Jesús Angel JARAMILLO, Professeur, Complutense University of Madrid

devant le jury présidé par :

M. Gilles GODEFROY, Directeur de Recherche CNRS, Université Paris 6

et composé de :

- **M. Jean-Bernard BAILLON**, Professeur Émérite, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne,
- **M. Joël BLOT**, Professeur, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne,
- **M. Roberto COMINETTI**, Professeur, Université Adolfo Ibañez (UAI),
- **M. Aris DANIILIDIS**, Professeur, Université de Chili,
- **M. Robert DEVILLE**, Professeur, Université Bordeaux 1,
- **M. Gilles GODEFROY**, Directeur de Recherche CNRS, Université Paris 6,
- **M. Georges HADDAD**, Professeur, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne,
- **M. Jesús Angel JARAMILLO**, Professeur, Complutense University of Madrid,
- **M. Bruno NAZARET**, Professeur, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Remerciements

Je tiens à remercier très chaleureusement mon directeur de recherche Joël Blot qui m'a initié à la théorie du Contrôle Optimal en temps discret. Sa grande culture mathématique et sa disponibilité ont largement contribué à l'aboutissement de ce travail. Je lui serai toujours très reconnaissant.

Mes profonds remerciements vont à Roberto Cominetti, Aris Daniilidis et Jesus Jaramillo qui m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter mon mémoire d'HDR.

Je tiens à remercier profondément Robert Deville de m'avoir fait l'honneur de faire partie de ce jury et de m'avoir initié à la recherche en analyse fonctionnelle lorsqu'il était mon directeur de thèse de 3ème cycle. Ses travaux resteront toujours pour moi une école mathématique.

Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude envers Gilles Godefroy qui non seulement m'a fait l'honneur de faire partie de mon jury mais m'a également consacré du temps pour m'écouter lui exposer certains de mes travaux. Sa disponibilité et ces conseils mathématiques ont toujours été un grand soutien pour mes réflexions. Qu'il soit profondément remercié.

Mes vifs remerciement vont également à Jean-Bernard Baillon, Georges Haddad et Bruno Nazaret qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury de soutenance.

Une pensée particulière va à mes voisins de bureau Bruno Nazaret et Denis Pennequin pour les agréables moments de discussions mathématiques.

Je n'oublie évidément pas de remercier les membres du SAMM qui font régner une ambiance de travail sympathique dans le laboratoire et Do Diem pour son aide pour les questions administratives et sa sympathie.

Enfin, une grande pensée va à mon fils, à mes parents, à mes frères et sœurs et à mon oncle ainsi qu'à toute ma famille et mes amis (en particulier Aline et Yasmina) pour leur soutien et leurs encouragements.

.

A mes parents... A Mehdi...

Table des matières

Introduction.

"Ni rire, ni pleurer, ni haïr mais comprendre."
Spinoza, *Traité politique.*

Les travaux présentés dans ce mémoire se situent dans le domaine de l'Analyse Fonctionnelle et trouvent leur champs d'applications en Optimisation, en Géométrie des Espaces de Banach, en topologie des Espaces Métriques et en Contrôle Optimal. Voici les grands axes de mes contributions à l'Analyse Fonctionnelle contenues dans ce mémoire.

Géométrie des convexes compacts métrisables : Un principe variationnel de type Deville-Godefroy-Zizler dans un cadre compact mais sans fonction bosse a été prouvé dans [6] et est présenté dans le chapitre 1. Ce principe variationnel permet de travailler en particulier dans le cadre des espaces de fonctions linéaires, affines ou harmoniques qui ne possèdent pas de fonctions bosses. Il a été utilisé ensuite pour établir des résultats de géométrie sur des convexes compacts métrisables, qui seront présentés dans le chapitre 2. Ainsi, une nouvelle classe d'espaces vectoriels topologiques séparés localement convexes (*e.v.s.l.c.*) a été mise en lumière et une notion nouvelle de points remarquables d'un convexe a été introduite que j'ai appelée *les points affines exposés.* Sur cette classe d'*e.v.s.l.c.*, le théorème de Krein-Milman se trouve être amélioré. Soit K un sous-ensemble convexe d'un *e.v.s.l.c.* On dit que $x \in K$ est un point affine exposé s'il existe une fonction affine continue sur K qui atteint son maximum unique en x. On notera $\mathrm{AExp}(K)$ l'ensemble des points affines exposés de K. Dans le cas général on a $\mathrm{Exp}(K) \subsetneq \mathrm{AExp}(K) \subsetneq \mathrm{Ext}(K)$, où $\mathrm{Exp}(K)$ (resp. $\mathrm{Ext}(K)$) désigne l'ensemble des points exposés (resp. extrémaux) de K.

Le théorème classique de Krein-Milman dit que tout convexe compact non vide d'un *e.v.s.l.c.* est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux : $K = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{Ext}(K))$. Il est question, dans le chapitre 2, de chercher à étudier la classe des *e.v.s.l.c* où on peut améliorer le théorème de Krein-Milman, c'est-à-dire où tout convexe compact non vide est l'enveloppe convexe fermée de ses points affines exposés. Cette classe d'espaces a été nommée la classe des *e.v.s.l.c.* ayant la propriété des points affines exposés (P.A.E.).

Voici maintenant un théorème obtenu dans [6] et présenté dans ce même chapitre : *Soit X un e.v.s.l.c. Alors, tout ensemble convexe compact métrisable K de X est l'enveloppe convexe fermée de ses points affines exposés :* $K = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{AExp}(K))$.

Ce théorème est une extension du théorème de Krein-Milman sur tout convexe compact métrisable. Voici donc comme conséquence, ce que je sais à l'heure actuelle sur les *e.v.s.l.c.* ayant la propriété P.A.E. :

• tout *e.v.s.l.c.* dans lequel tout compact est métrisable, a la propriété P.A.E. C'est le cas en particulier pour tous les *e.v.s.l.c.* métrisables, un cadre général et important de l'analyse fonctionnelle (le cadre des espaces de Fréchet par exemple),

• on ne peut pas espérer, dans le cas général, remplacer $\mathrm{AExp}(K)$ par $\mathrm{Exp}(K)$, car on sait par exemple que $\mathrm{Exp}([-1,1]^{\aleph_0}) = \emptyset$ dans l'espace séparable et métrisable $\mathbb{R}^{\aleph_0}$,

• il existe des *e.v.s.l.c.* ayant la propriété P.A.E. dont les compacts ne sont pas tous métrisables, par exemple l'espace $(l^2(\Gamma), faible)$ pour Γ non dénombrable,

• l'espace $(l^\infty(\Gamma), faible^*)$ pour Γ non dénombrable n'a pas la propriété P.A.E.

Plus généralement, on va introduire dans le chapitre 2 la notion de points Φ-exposés et on va utiliser la notion de Φ-convexité tel qu'elle a été introduite par Ky Fan. Rappelons, que Ky Fan a généralisé (voir [51]) le théorème de Krein-Milman au cas des compacts Φ-convexes. On donnera un théorème général qui étend le théorème de Krein-Milman-Ky Fan dans le cadre métrisable, où les points Φ-extrémaux seront remplacés par les points Φ-exposés. On montrera aussi, par un contre-exemple, que cette extension n'est plus valide en général en dehors du cadre métrisable.

La frontière de Shilov et les points Φ-exposés. Soit K un espace topologique compact et Φ un sous-espace fermé de $(C(K), \|.\|_\infty)$ qui sépare les points de K et contient les constantes. On sait par un résultat de Milman (voir [57] et [58]) que $\partial\Phi = \overline{Ch(\Phi)}$ où $Ch(\Phi)$ désigne la frontière de Choquet et $\partial\Phi$ la frontière de Shilov. Un point x de K sera dit Φ-exposé (une notion générale de point remarquable), s'il existe $\varphi \in \Phi$ qui atteint son maximum unique en x. On note $\Phi\mathrm{Exp}(K)$ l'ensemble de ces points. Il se trouve que lorsque K est supposé métrisable, l'ensemble $\Phi\mathrm{Exp}(K)$ qui est en général strictement inclus dans $Ch(\Phi)$, est aussi une frontière dense dans la frontière de Shilov $\partial\Phi$. Les résultats nouveaux suivants seront présentés dans le chapitre 2. On voit bien ici que la notion introduite des points Φ-exposés apparaît de manière très naturelle dans la description des points pré-faiblement exposés de la boule unité duale B_{Φ^*} : *si K est un métrique compact, alors, on a*

$$w^*\mathrm{Exp}(B_{\Phi^*}) = \{\pm\delta_k / k \in \Phi\mathrm{Exp}(K)\},$$

et

$$\partial\Phi = \overline{\Phi\mathrm{Exp}(K)} = \overline{Ch(\Phi)},$$

où pour chaque $k \in K$, $\delta_k : \varphi \mapsto \varphi(k)$ pour tout $\varphi \in \Phi$ et où $w^*\mathrm{Exp}(B_{\Phi^*})$ désigne l'ensemble des points pré-faiblement exposés de B_{Φ^*}.

Un contre-exemple dans le cas non métrisable où $\Phi\mathrm{Exp}(K) = \emptyset$ sera aussi donné, montrant ainsi que ce résultat est faux en général si K n'est pas supposé métrisable.

Introduction à une théorie globale de l'inf-convolution. L'inf-convolution (étudiée depuis Mac Shane 1934, [52]) est un outil d'interface entre plusieurs champs de l'analyse fonctionnelle et la théorie de l'optimisation. Elle permet notamment de régulariser des fonctions non régulières, comme la régularisée de Moreau-Yoshida ou la régularisée de Lasry-Lions. Elle est utilisée notamment dans la théorie des equations de Hamilton-Jacobi (formule de Hopf-Lax par exemple) ou en théorie des equations elliptiques non linéaires, etc. Dans ce mémoire, il est question de traiter l'opération de l'inf-convolution sous un angle nouveau. Il sera mis en lumière dans le chapitre 3, par des résultats obtenus dans quatre articles ([7], [8], [9], [10]), des propriétés globales de cette opération sur des espaces de fonctions. En effet, il sera montré que l'inf-convolution confère des structures de monoïdes à des espaces de fonctions (non stable pour l'addition usuelle) et permet, en tant que structure de monoïde, de caractériser entièrement les complétés des groupes métriques invariants. Soit $(X, \cdot, d)$ un groupe métrique invariant et $Lip^1_+(X)$ l'ensemble des fonctions positives 1-lipschitziennes sur X. Pour deux fonctions f et g de $Lip^1_+(X)$, on définit l'opération de l'inf-convolution par

$$(f \oplus g)(x) \quad := \quad \inf_{y,z \in X / yz = x} \{f(y) + g(z)\}\,; \quad \forall x \in X.$$

On montre que $(Lip^1_+(X), \oplus)$ est un monoïde. Un résultat important qui s'avère utile dans ses applications est la caractérisation du groupe complété $(\overline{X}, \cdot, \overline{d})$ d'un groupe métrique invariant quelconque $(X, \cdot, d)$ par le groupe des inversibles $\mathcal{U}(Lip^1_+(X))$ du monoïde $(Lip^1_+(X), \oplus)$. Ainsi, on a la caractérisation suivante :

$$(\overline{X}, \cdot, \overline{d}) \cong (\mathcal{U}(Lip^1_+(X)), \oplus, d_\infty),$$

où le symbole $\cong$ désigne "isométriquement isomorphe comme groupe" et d_∞ désigne la distance de la convergence uniforme sur $\mathcal{U}(Lip^1_+(X))$. Un résultat de type Banach-Stone est obtenu en conséquence de manière très naturelle pour la structure de monoïde de $(Lip^1_+(X), \oplus)$. D'autre part, on verra que les sous-ensembles de $Lip^1_+(X)$ consistant en les *"problèmes bien-posés au sens de Tikhonov"* et les *"problèmes mal-posés au sens de Tikhonov"* sont respectivement un sous monoïde dense et un idéal d'intérieur vide de $Lip^1_+(X)$ lorsqu'on les muni de l'opération $\oplus$ de l'inf-convolution. Ceci montre que l'inf-convolution, en tant que loi de monoïde, permet aussi de classifier, algébriquement, des sous-ensembles remarquables de l'espace $Lip^1_+(X)$, ce que l'addition usuelle ne permet pas. Ainsi, on peut dire que l'inf-convolution permet aussi la rencontre entre le domaine de l'optimisation, des structures algébriques et des structures topologiques.

Isométries et théorème de Banach-Stone. Le théorème classique de Banach-Stone dit que deux compacts K et L sont homéomorphes si et seulement si les espaces de Banach $(C(K), \|.\|_\infty)$ et $(C(L), \|.\|_\infty)$ sont isométriquement isomorphes. Il existe une littérature abondante sur ce sujet. La liste des contributions étant très longue, on renvoie à l'article de M. Garrido et J. Jaramillo [40] pour un historique des contributions et une liste de références plus complète. Des résultats nouveaux ont été obtenus dans [12],[8], [9] et [11]. Ainsi, des extensions et généralisations du théorème de Banach-Stone seront présentées dans le chapitre 4. Par exemple le fait que deux groupes complétés métriques invariants $(\overline{X}, \overline{d})$ et $(\overline{Y}, \overline{d'})$ sont isomorphes isométriques si et seulement si les monoïdes $(Lip^1_+(X), \oplus, \rho)$ et $(Lip^1_+(Y), \oplus, \rho)$ sont isomorphes isométriques pour une certaine métrique ρ. Différentes autres directions ont été traitées :

• un cadre abstrait pour la structure d'espace de Banach qui englobe plusieurs espaces classiques

• pour des espaces métriques complets non nécessairement compacts,

• des isométries partielles qui ne sont pas nécessairement des isométries et aussi pour des opérateurs non nécessairement linéaires et à valeurs vectorielles,

• des structures de monoïdes en utilisant l'inf-convolution,
• des isométries d'espaces produits.

Principe de Pontryagin en dimension infinie et en temps discret. Le principe de Pontryagin a bien été étudié en dimension finie notamment par J. Blot et N. Hayek [22]. L'extension du résultat à la dimension infinie s'avère très délicat. Plusieurs difficultés apparaissent dans le passage à la dimension infinie dû entre autres aux deux problèmes suivants :
• l'image d'un opérateur linéaire continu n'est pas forcément fermé,
• dans un espace de Banach dual, l'origine appartient toujours à la fermeture faible* de la sphère unité du dual. Ainsi, par le théorème de Josefson-Nissenzweig, il existe toujours une suite d'élément du dual topologique de norme un qui converge vers zéro pour la topologie pré-faible.

Pour contourner notamment ces deux difficultés, nous avons élaboré avec J. Blot dans [15],[16] et [17] (voir Chapitre 5) des outils basés sur le théorème de Baire et le théorème de l'image fermée, pour obtenir des extensions du principe de Pontryagin à la dimension infinie.

Différentiabilité, opérateurs et géométrie en dimension infinie. Dans les articles [13], [18] et [19], il a été question d'étudier les liens qui peuvent exister entre la différentiabilité et la géométrie de certains espaces de Banach ainsi que les liens entre différentiabilité et des propriétés d'opérateurs en dimension infinie (voir le chapitre 6.). Les résultats obtenus concernent :
• des caractérisations d'opérateurs limités et d'opérateurs compacts en termes de différentiabilité (basé sur [13]),
• une caractérisation de la propriété de Radon-Nikodym par la différentiabilité au sens de Gâteaux (basée sur [18] avec A. Daniilidis)
• une caractérisation de la propriété de Schur par la différentiabilité (basée sur [19] avec G. Lancien)
• des résultats de différentiabilité génériques de certaines semi-normes et normes définies sur des espaces de fonctions (basée sur [19] avec G. Lancien).

Articles Publiés dans des Revues Internationales à Comité de Lecture.

Publications Issues de ma Thèse de Doctorat.

[1] **Bachir M.**, *A Non-Convex Analogue to Fenchel Duality*, **Journal of Functional Analysis, Elsevier**, (2001), 181 , pp.300-312.

[2] **Bachir M.**, *The multidirectional mean value inequalities with second order information*, **Journal of Australian Mathematical Society**, (2006), 80, pp.159-172.

[3] **Bachir M.**, Daniilidis A., Penot J.-P., *Lower Subdifferentiability and Integration*, **Set-Valued Analysis, Springer Verlag**, (2002), 10 , pp.89-108.

[4] **Bachir M.**, *Sur la differentiabilité générique et le théorème de Banach-Stone*, **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris**, 330 (2000), 687-690.

Travaux Publiés après ma Thèse de Doctorat.

[5] **Bachir M.**, *On the Krein-Milman-Ky Fan theorem for convex compact metrizable sets*, **Illinois Journal of Mathematics (2017)**, 60, no. 4 (à paraître).

[6] **Bachir M.**, *Limited operators and differentiability*, **North-Western European Journal of Mathematics (2017)**, 3, pp. 63-73.

[7] **Bachir M.**, *An extension of the Banach-Stone theorem*, **Journal of Australian Mathematical Society (2017)** https ://doi.org/10.1017/S1446788717000271

[8] **Bachir M.**, *Representation of isometric isomorphisms between monoids of Lipschitz functions*, **Methods of Functional Analysis and Topology, (2017)**, 23, no. 4, (à paraître)

[9] **Bachir M.**, *Well-posedness and infimal convolution*, **Journal of Optimization Theory and Applications (2017)**, (Accepté).

[10] **Bachir M.**, Blot J., *Infinite dimensional multipliers and Pontryagin principle for discrete-time problems*, **Pure and Applied Functional Analysis, (2017)**, 2, no 3, pp. 411-426.

[11] **Bachir M.**, Blot J., *Discrete time Pontryagin principles in Banach spaces*, **Pure and Applied Functional Analysis, (2017)** (Accepté).

[12] **Bachir M.**, *A Banach-Stone type Theorem for invariant metric groups*, **Topology and its Applications, Elsevier, (2016)**, 209, pp. 189-197.

[13] **Bachir M.**, *Remarks on Isometries of Products of Linear Spaces*, **Extracta Mathematicae, (2015)**, 30, pp. 1-13

[14] **Bachir M.**, Blot J., *Infinite dimensional infinite-horizon Pontryagin principles for discrete-time problems*, **Set-Valued and Variational Analysis, Springer, (2015)**, 23, pp. 43-54

[15] **Bachir M.**, *The inf-convolution as a law of monoid. An analogue to the Banach-Stone theorem*, **Journal of Mathematical Analysis an Applications, (2014)**, 420, pp. 145-166.

[16] **Bachir M.**, Lancien G., *On the Composition of Differentiable Functions*, **Canadian Mathematical Bulletin, (2003)**, 46, pp. 481-494

[17] **Bachir M.**, Daniilidis A., *A dual characterisation of the Radon-Nikodym property*, **Bulletin of the Australian Mathematical Society, (2000)**, 62, pp. 379-387

Quelques Notations.

On regroupe ici certaines notations et définitions qui seront souvent utilisées par la suite.

Transformée de Fenchel. Rappelons que lorsque X est un espace de Banach et X^* son dual topologique, pour une fonction f avec $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$, la transformée de Fenchel de f est définie sur le dual topologique, pour tout $p \in X^*$ par

$$f^*(p) := \sup_{x \in X} \{\langle p, x\rangle - f(x)\}.$$

La seconde transformée $(f^*)^*$ est définie sur le bidual topologique X^{**} par la même formule. On notera f^{**}, la restriction $(f^*)^*$ à X, où X est identifié à un sous-espace de X^{**} par l'injection canonique. Rappelons aussi que le théorème de Fenchel dit que $f = f^{**}$ si et seulement si f est convexe semi-continue inférieurement sur X. Enfin, par $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ on désigne l'intérieur topologique du domaine de f.

Espaces de fonctions. Soit (X, d) un espace métrique. Par $C_b(X)$ (resp. $C_b^u(X)$) on désigne l'espace de Banach des fonctions bornées et continues (resp. uniformément continues) à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme-sup $\|.\|_\infty$. Pour $0 < \alpha \leq 1$, on désigne par $Lip_b^\alpha(X)$ l'espace des fonctions bornées α-hölderiennes muni de la norme complète

$$\|\varphi\|_{\infty,\alpha} := \max(\|\varphi\|_\infty, \|\varphi\|_\alpha), \quad \forall \varphi \in Lip_b^\alpha(X)$$

où

$$\|\varphi\|_\alpha = \sup_{x,y \in X / x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d^\alpha(x,y)}.$$

Lorsque $\alpha = 1$, on écrira $\|\varphi\|_1 = \|\varphi\|_{lip}$. Lorsque X est un espace de Banach, pour un entier $s > 0$, on note $C_b^s(X)$ l'espace des fonctions φ de classe C^s telles que φ, φ',...,$\varphi^{(s)}$ soient bornées, qu'on équipe de la norme $\|.\|_{C^s}$ définie par

$$\|\varphi\|_{C^s} = \max(\|\varphi\|_\infty, \|\varphi'\|_\infty, ..., \|\varphi^s\|_\infty).$$

Enfin, pour $0 < \alpha \leq 1$, on note $C_b^{1,\alpha}(X)$ l'espace de Banach des fonctions de $C_b^1(X)$ tel que φ' est α-hölderienne, muni de la norme

$$\|\varphi\|_{1,\alpha} = \max(\|\varphi\|_\infty, \|\varphi'\|_\infty, \|\varphi'\|_\alpha).$$

Notons que, grâce au théorème des accroissements finis, on a

$$\|\varphi\|_{lip} = \|\varphi'\|_\infty, \quad \forall \varphi \in C_b^1(X).$$

Chapitre 1

Un Principe Variationnel Compact sans Fonction Bosse.

Soit (M, d) un espace métrique complet et $f : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre et bornée inférieurement. Par le terme propre on entend que le domaine de finitude de f, $\mathrm{dom}(f) := \{x \in M / f(x) < +\infty\}$ est non vide. On dit que f a un minimum fort en x si $\inf_M f = f(x)$ et $d(x_n, x) \to 0$ dès que $f(x_n) \to f(x)$.

Le problème de trouver un minimum fort pour une fonction f, est appelé un *problème "bien-posé" au sens de Tykhonov.* Soit (M, d) un espace métrique complet et $(Y, \|.\|_Y)$ un espace de Banach inclus dans $C_b(M)$. Soit

$$N(f) = \{\varphi \in Y : f - \varphi \text{ n'a pas un minimum fort sur } M\}.$$

L'ensemble $N(f)$ est appelé l'ensemble des *problèmes "mal-posés"* . Le problème est de trouver des conditions sur Y sous lesquelles $N(f)$ est un sous-ensemble *"négligeable"*. Dans [36], Deville, Godefroy et Zizler (D-G-Z) ont montré que $N(f)$ est de première catégorie de Baire dans Y et dans [38], Deville et Revalski (D-R) ont généralisé ce résultat, où ils ont prouvé que $N(f)$ est σ-poreux dans Y.

Théorème 1. (D-G-Z [36] et D-R [38]) *Soit (M, d) un espace métrique complet et $f : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre semi-continue inférieurement et bornée inférieurement. Supposons que $(Y, \|.\|_Y)$ est un espace de Banach inclus dans $C_b(M)$ tel que*

(i) $\|g\| \geq \|g\|_\infty$, pour tout $g \in Y$;

(ii) pour tout entier $n > 0$, il existe une constante positive M_n tel que pour tout $x \in M$, il existe une fonction $h_n : M \longrightarrow [0, 1]$, telle que $h_n \in Y$, $\|h_n\| \leq M_n$, $h_n(x) = 1$ et $\mathrm{diam}(supp(h)) < \frac{1}{n}$.

Alors, $N(f)$ est σ-poreux dans Y.

Le principe variationnel de D-G-Z a plusieurs applications notamment en géométrie des espaces de Banach et en optimisation et s'applique sur des espaces métriques M qui ne sont pas nécessairement compacts. Cependant, la condition (ii) ci-dessus est cruciale dans la preuve de D-G-Z ; ceci empêche d'englober les cas linéaires tel que le principe variationnel de Stegall. Bien sûr, l'intérêt du principe variationnel de D-G-Z est de contourner la compacité, mais en ce qui nous concerne et en particulier en relation avec le théorème de Krein-Milman (voir chapitre 2), il est surtout question de traiter le cas compact métrisable. Ainsi, on obtient dans le Théorème 2 que lorsqu'on suppose que (K, d) est un métrique compact, alors la condition (ii) peut être omise. Ceci permettra d'élargir la classe de fonctions Y a une classe englobant les perturbations linéaires et affines. De plus, lorsque l'espace $(Y, \|.\|_Y)$ est séparable et sépare les points de K, alors l'ensemble $N(f)$ peut être plus petit que σ-poreux. En fait, dans ce cas, l'ensemble $N(f)$ peut être recouvert par une réunion dénombrable de $d.c$-$hypersurfaces$ (voir les definitions plus bas). Ceci donne en particulier des exemples qui montrent que la σ-porosité de $N(f)$ dans [38] n'est pas optimale. Le principe variationnel compact proposé dans ce chapitre a plusieurs applications. Il permet, par exemple, d'obtenir des informations nouvelles : sur la Gâteaux-différentiabilité des fonctions convexes, sur le Principe du Maximum de Bauer et surtout de démontrer une extension du théorème de Krein-Milman dans le cadre des compacts métrisables. Au lieu de l'hypothèse (ii) utilisée dans la preuve de D-G-Z, ce théorème est basé sur l'utilisation d'un résultat de Zajiček [74] sur la Gâteaux-différentiabilité des fonctions convexes continues sur les espaces séparables et un analogue non convexe de la dualité de Fenchel introduit dans [14]. Ce nouveau principe variationnel compact et sans fonction bosse peut être vu comme un complémentaire du principe variationnel de D-G-Z.

1.1 Un Principe Variationnel.

On rappel les définitions suivantes que l'on trouvera dans [75].

Définition 1. *Soit Y, Z deux espaces de Banach, $C \subset Y$ un ouvert convexe, et $F : C \to Z$ une application continue. On dit que F est d.c. (delta-convexe) s'il existe une fonction convexe continue $f : C \to \mathbb{R}$ telle que $y^* \circ F + f$ est convexe dès que $y^* \in Y^*$, $\|y^*\| \leq 1$.*

Définition 2. *Soit X un espace de Banach et $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq n < dimX$. On dit que $A \subset X$ est une $d.c$-$surface$ de codimension n s'il existe un espace $F \subset X$ de dimension n, son supplémentaire topologique E et une application d.c. $\varphi : E \to F$ tel que $A = \{x + \varphi(x) : x \in E\}$. Une surface d.c. de codimension 1 sera dite une $d.c$-$hypersurface$.*

Rappelons que dans un espace séparable X, tout ensemble A qui peut être recouvert par une réunion dénombrable de $d.c$-$hypersurfaces$, est σ-inférieurement poreux (σ-lower porous en anglais), aussi σ-directionnellement poreux (σ-directionally porous), en particulier est Aronszajn (équivalent à Gauss) négligeable et Γ-négligeable. Pour les détails sur ces notions d'ensembles négligeables en dimension infinie, on réfère à l'article de Zajiček [75] et les références auxquelles il renvoie. Rappelons aussi que dans [74], Zajiček montre que sur un espace de Banach séparable, l'ensemble $NG(F)$ des points de non Gâteaux-différentiabilité d'une fonction F convexe et continue, peut être recouvert par une réunion dénombrable de $d.c$-$hypersurfaces$. Ce résultat ainsi qu'une dualité introduite dans [14] ont permis de démontrer le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit (K, d) un métrique compact et $(Y, \|.\|_Y)$ un espace de Banach inclus dans $C(K)$, qui sépare les points de K et tel que $\alpha\|.\|_Y \geq \|.\|_\infty$ pour un certain réel*

$\alpha \geq 0$. *Soit* $f : (K, d) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction propre et semi-continue inférieurement. Alors, l'ensemble*

$$N(f) = \{\varphi \in Y : f - \varphi \text{ qui n'a pas un minimum fort sur } K\}$$

est de première catégorie de Baire dans Y. *De plus, pour tout sous-espace séparable* Z *de* $(Y, \|.\|_Y)$ *qui sépare les points de* K, *on a que* $N(f) \cap Z$ *peut être recouvert par une réunion dénombrable de* $d.c$*-hypersurfaces dans* Z. *En particulier, si* Y *est séparable alors* $N(f)$ *peut être recouvert par une réunion dénombrable de* $d.c$*-hypersurfaces dans* Y.

La preuve de ce théorème est basée sur trois idées. Soit $f^{\times} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définit pour tout $\varphi \in Y$ par

$$f^{\times}(\varphi) = \sup_{x \in K} \{\varphi(x) - f(x)\}.$$

Cas séparable :

(1) *Différentiabilité*. Grâce au théorème de Zajiček mentionné plus haut, pour tout sous-espace séparable fermé Z de Y, la fonction convexe lipschitzienne $f^{\times}$ est Gâteaux-différentiable sur Z en tout point excepté les points d'un sous-ensemble de Z qui peut être recouvert par une réunion dénombrable de $d.c$*-hypersurfaces*.

(2) *Dualité*. On choisit un sous-espace séparable fermé Z de Y qui sépare les points de K (un tel espace existe car K est un métrique compact et Y sépare les points de K) et on applique ensuite un théorème de dualité établi dans ma thèses de doctorat (voir [14, Théorème 2.8.]). Ce théorème dit que les points $\varphi \in Z$ où $f^{\times}$ est Gâteaux-différentiable sont exactement les points $\varphi \in Z$ tel que $f - \varphi$ a un minimum fort.

Cas non séparable :

(3) Pour finir la preuve dans le cas général, on procède comme dans la preuve de D-G-Z en remplaçant l'hypothèse (ii) du principe variationnel de D-G-Z par l'utilisation du cas séparable.

Remarque 1. *Un minimum fort et un minimum unique (ou stricte) coïncident pour les fonctions semi-continues inférieurement sur un métrique compact .*

On obtient alors immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Soit* (K, d) *un espace métrique compact et* Y *un sous-espace fermé quelconque de* $(C(K), \|.\|_\infty)$ *qui sépare les points de* K. *Soit* $f : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *propre et semi-continue inférieurement. Alors, l'ensemble*

$$N(f) = \{\varphi \in Y : f - \varphi \text{ n'a pas un minimum fort sur } K\}$$

peut être recouvert par une réunion dénombrable de $d.c$*-hypersurfaces dans* Y.

Ce résultat donne des exemples montrant que la σ-porosité de $N(f)$ dans [38] n'est pas optimale.

Notons que le corollaire précédent ne peut pas s'obtenir du principe variationnel de D-G-Z. Par exemple, l'espace $Y = \{\varphi \in C(B_{\mathbb{R}^n}) / \varphi(0) = 0\}$, où $B_{\mathbb{R}^n}$ est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour une norme donnée, satisfait les hypothèses du corollaire 1 mais puisque $\varphi(0) = 0$ pour tout $\varphi \in Y$, il suit que Y ne satisfait pas la condition (ii) du théorème de D-G-Z et D-R. Un second exemple qui rentre dans le cadre du Corollaire 1 mais qui ne peut pas se déduire du principe variationnel de D-G-Z concerne l'espace des fonctions harmoniques. Soit O un ouvert connexe borné non vide de $\mathbb{R}^n$. On note $\triangle(\overline{O})$ l'espace des fonctions harmoniques sur O et continues sur $\overline{O}$. On muni $\triangle(\overline{O})$ de la norme $\|.\|_\infty$. On sait que $(\triangle(\overline{O}), \|.\|_\infty)$ est un sous-espace fermé de $(C(\overline{O}), \|.\|_\infty)$. Il est facile de voir que $\triangle(\overline{O})$ sépare les points de $\overline{O}$. Ainsi, le Corollaire 1 s'applique pour l'espace $(\triangle(\overline{O}), \|.\|_\infty)$. Cependant, on sait par le principe du maximum qu'une fonction $u \in \triangle(\overline{O})$ atteint son maximum et son minimum sur la frontière topologique $Fr(O)$ de O. Ainsi, l'espace $\triangle(\overline{O})$ ne peut pas satisfaire la condition (ii) du Théorème 1. On obtient en revanche du Corollaire 1, que "presque" toutes les fonctions harmoniques sur O et continues sur $\overline{O}$ atteignent à la fois un unique maximum et un unique minimum réalisés sur la frontière $Fr(O)$. On donnera d'autres exemples très utiles dans la section qui suit.

1.2 Applications aux cas Linéaires et Affines.

Comme conséquence du Théorème 2, on donne dans cette section les principes variationnels suivants analogues au principe variationnel de Stegall pour les compacts métrisables. Ces résultats ne se déduisent pas non plus du théorème de D-G-Z. Si E est un espace de Banach et $x \in E$, on note par $\hat{x}$ l'application $\hat{x} : p \mapsto p(x)$ pour tout $p \in E^*$.

Proposition 1. *Soit E un espace de Banach et K un sous-ensemble pré-faiblement compact métrisable de E^*. Soit $f : K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre pré-faiblement semi-continue inférieurement. Alors, l'ensemble*

$$N(f) = \{x \in E : f - \hat{x} \text{ n'a pas un minimum unique sur } K\}$$

est de première catégorie de Baire dans E. De plus, pour tout sous-espace séparable F de E qui sépare les points de K on a que $N(f) \cap F$ peut être recouvert par une réunion dénombrable de d.c-$hypersurfaces$ dans F.

Proposition 2. *Soit E un espace de Banach et K un sous-ensemble faiblement compact métrisable de E. Soit $f : K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre faiblement semi-continue inférieurement. Alors, l'ensemble*

$$N(f) = \{x^* \in E^* : f - x^* \text{ n'a pas un minimum unique sur } K\}$$

est de première catégorie dans E^*. De plus, pour tout sous-espace séparable F de E^* qui sépare les points de K, on a que $N(f) \cap F$ peut être recouvert par une réunion dénombrable de d.c-$hypersurfaces$ dans F.

Soit K un ensemble convexe d'un espace vectoriel topologique. Une fonction $\varphi : K \to \mathbb{R}$ est dite affine si pour tout $x, y \in K$ et $0 \leq \lambda \leq 1$, $\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$. L'espace des fonctions affines continues sur K et à valeurs dans $\mathbb{R}$ sera noté *Aff*(K). On obtient le principe variationnel suivant pour l'espace *Aff*(K).

Proposition 3. *Soit K un sous-ensemble convexe compact métrisable d'un espace vectoriel topologique séparé et localement convexe X (en abrégé e.v.s.l.c.) et soit $f : K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre semi-continue inférieurement. Alors, l'ensemble*

$$N(f) := \{\varphi \in \mathit{Aff}(K) : f - \varphi \text{ n'a pas un minimum unique sur } K\}$$

peut être recouvert par une réunion dénombrable de d.c-hypersurfaces dans l'espace $(\mathit{Aff}(K), \|.\|_\infty)$.

1.3 Application au Principe du Maximum de Bauer.

Nous allons donner une application au principe du maximum de Bauer dans le cadre des convexes compacts métrisables. Rappelons que si C est un sous-ensemble d'un espace vectoriel, on dit qu'un point $x \in C$ est un point extrémal de C, et on écrit $x \in \mathrm{Ext}(C)$, si et seulement si : $y, z \in C, 0 < \alpha < 1;\ \ x = \alpha y + (1-\alpha)z \Longrightarrow x = y = z$. Rappelons ensuite le principe du maximum de Bauer dans toute sa généralité :

Théorème 3. (Bauer) *Soit K un ensemble non vide convexe compact d'un espace vectoriel topologique séparé et localement convexe X et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe semi-continue supérieurement. Alors, parmi les points de K où f atteint son maximum sur K, il y a au moins un point extrémal de K.*

La preuve de ce théorème dans toute sa généralité est basée sur le lemme de Zorn. Il est question dans le Corollaire 2, de montrer grâce à la Proposition 3, que sur des convexes compacts métrisables, l'ensemble des fonctions convexes semi-continues supérieurement qui atteignent leur maximum en un unique point (nécessairement extrémal dans K) est un G_δ dense.

L'ensemble des fonctions convexes semi-continues supérieurement sur un convexe compact K et à valeurs dans $\mathbb{R}$ sera noté $\mathcal{CS}(K)$ et sera muni de la distance suivante : pour tout $f, g \in \mathcal{CS}(K)$

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in K} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}.$$

Il est facile de voir que l'espace $(\mathcal{CS}(K), \rho)$ est complet.

Corollaire 2. *Soit K un ensemble non vide convexe compact métrisable d'un espace vectoriel topologique séparé et localement convexe X. Alors, l'ensemble*

$$\mathcal{G} := \{f \in \mathcal{CS}(K) : f \text{ atteint son maximum en un unique point extrémal de } K\},$$

est un G_δ dense de $(\mathcal{CS}(K), \rho)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble

$$O_n := \{f \in \mathcal{CS}(K); \exists x_n \in K / f(x_n) > \sup\{f(x) : d(x, x_n) \geq \frac{1}{n}\}\}.$$

Il est facile de voir que O_n est un ouvert de $(\mathcal{CS}(K), \rho)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Grâce à la Proposition 3, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{CS}(K)$, il existe une fonction

$\varphi \in \mathit{Aff}(K)$ tel que $\rho(\varphi, 0) < \varepsilon$ et $-f - \varphi$ a un minimum unique sur K en un certain point x_0. Ceci entraîne que $g := f + \varphi \in \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ (on prend $x_n = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $\rho(g, f) < \varepsilon$. D'où la densité de $\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dans $(\mathcal{CS}(K), \rho)$. Il s'en suit que $\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est un G_δ dense dans $(\mathcal{CS}(K), \rho)$. On montre ensuite comme dans la preuve de D-G-Z que

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \{f \in \mathcal{CS}(K) : f \text{ atteint son maximum en un unique point de } K\}.$$

Pour conclure, il suffit de voir que si une fonction convexe atteint son maximum en un unique point de K, alors ce point est extrémal dans K. $\square$

1.4 Application à la Gâteaux-Différentiabilité.

Rappelons qu'un espace de Banach E est dit faible Asplund si toute fonction convexe continue est Gâteaux-différentiable en tout point d'un G_δ dense de E. Tout espace de Banach séparable est un espace faible Asplund (Un théorème de Mazur [53]) mais l'espace l^∞ est un exemple d'espace qui n'est pas faible Asplund. Le corollaire qui suit, permet d'exhiber une classe de fonctions convexes continues qui est Gâteaux-différentiable en tout point d'un G_δ dense lorsque E est un espace de Banach quelconque. Sa preuve repose sur la Proposition 1 et un résultat d'Asplund-Rockafellar dans [5, Corollaire 1.].

Corollaire 3. *Soit E un espace de Banach et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction convexe continue telle que* $\mathrm{dom}(f^*) \subset K$*, où K est un sous-ensemble pré-faiblement compact métrisable de E^*. Alors, f est Gâteaux-différentiable en tout point d'un G_δ dense de E.*

Soit C un ensemble non vide de E^*. Par σ_C on désigne la fonction support définie sur E par

$$\sigma_C(x) = \sup_{x^*\in C} \langle x^*, x\rangle; \;\; \forall x \in E.$$

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre convexe et semi-continue inférieurement. L'inf-convolution de f et σ_C est définie pour tout $x \in E$ par

$$f \bigtriangledown \sigma_C(x) := \inf_{y\in E}\{f(x - y) + \sigma_C(y)\}.$$

Du corollaire précédent, on en tire que si K est un sous-ensemble convexe pré-faiblement compact métrisable de E^* et f une fonction propre convexe et semi-continue inférieurement sur E telle qu'il existe $p \in K$ et $a \in \mathbb{R}$ satisfaisant $\langle p, x\rangle + a \leq f(x)$ pour tout $x \in E$ (ceci est équivalent au fait que $\mathrm{dom}(f^*) \cap K \neq \emptyset$), alors $f \bigtriangledown \sigma_K$ est convexe continue et Gâteaux-différentiable en tout point d'un sous-ensemble G_δ dense de E. En particulier, la fonction support σ_K est Gâteaux-différentiable en tout point d'un sous-ensemble qui est G_δ dense dans E.

Chapitre 2

Une Étude Géométrique des Convexes Compacts Métrisables.

Le théorème classique de Krein-Milman (1940, [54]) affirme que tout ensemble convexe compact K d'un espace vectoriel topologique séparé et localement convexe X (on notera en bref *e.v.s.l.c.*) est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux,

$$K = \overline{\text{conv}}(\text{Ext}(K)).$$

Notons que l'hypothèse de locale convexité dans le théorème de Krein-Milman ne peut pas être omise (un résultat dû à Roberts [65] (1977)). Ce théorème a une réciproque partielle connue sous le nom du théorème de Milman (voir [63]) qui dit que si A est un sous-ensemble de K et que l'enveloppe convexe fermée de A est K, alors tout point extrémal de K appartient à l'adhérence de A,

$$(A \subset K; \;\; K = \overline{\text{conv}}(A)) \Longrightarrow \text{Ext}(K) \subset \overline{A}.$$

Il est alors très naturel de se demander s'il existe un sous-ensemble $A \subsetneq \text{Ext}(K) \subset \overline{A}$ tel que $K = \overline{\text{conv}}(A)$. Klee a démontré dans [Theorem 2.1, [48]], qu'un convexe compact d'un espace vectoriel normé est l'enveloppe convexe fermée de ses points exposés : $K = \overline{\text{conv}}(\text{Exp}(K))$, les points exposés sont des points extrémaux particuliers. On reviendra sur ces notions plus tard. Dans le même article, Klee mentionne le fait qu'en dehors des espaces vectoriels normés, ce résultat peut être faux y compris dans le cas métrique séparable en donnant le contre exemple suivant : dans l'espace localement convexe séparable et métrisable $\mathbb{R}^{\aleph_0}$, le cube $[-1,1]^{\aleph_0}$ n'a aucun point exposé.

Pour répondre positivement au problème mentionné par Klee et généraliser le théorème de Krein-Milman dans le cadre des ensembles convexes compacts métrisables, une nouvelle notion de points remarquables d'un convexe a été introduite dans [6] (déjà définie dans l'introduction). En fait, on va introduire dans ce chapitre la notion plus générale de points Φ-exposés, et utiliser la notion de Φ-convexité telle qu'elle a été introduite par Ky Fan. Rappelons, que Ky Fan a généralisé dans [51] le théorème de Krein-Milman au cas des compacts Φ-convexes (Théorème 4).

2.1 Points Φ-Extrémaux et Points Φ-Exposés.

Soit S un ensemble non vide, Φ une famille de fonctions définies de S dans $\mathbb{R}$. Un sous-ensemble $X \subset S$ est dit Φ-convexe si $X = S$ ou il existe un ensemble non vide I, tel que

$$X = \cap_{i \in I}\{x \in S : \varphi_i(x) \leq \lambda_i\}$$

où $\varphi_i \in \Phi$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in I$. Pour un ensemble non vide $A \subset S$, l'enveloppe Φ-convexe de A est par définition l'intersection de tous sous-ensembles Φ-convexes de S contenant A. Par $\mathrm{conv}_\Phi(A)$ on désignera l'enveloppe Φ-convexe de A.
Soit $a, x, y \in S$, on dit que a est Φ-entre x et y, si

$$(\varphi \in \Phi, \varphi(x) \leq \varphi(a), \varphi(y) \leq \varphi(a)) \Longrightarrow (\varphi(a) = \varphi(x) = \varphi(y)).$$

Soit $\emptyset \neq A \subset B \subset S$. L'ensemble A est dit Φ-extrémal dans B, si

$$(a \in A, a \text{ est } \Phi\text{-entre les points } x, y \in B) \Longrightarrow (x \in A, y \in A).$$

Si A est un singleton $A = \{a\}$, on dit que a est un point Φ-extrémal de B. L'ensemble de tout les points Φ-extrémaux d'un ensemble non vide A sera noté par $\Phi\mathrm{Ext}(A)$.

On introduit maintenant le concept des points Φ-exposés.

Définition 3. *Soit S un espace topologique séparé, C un sous-ensemble non vide de S et Φ une famille de fonctions définies de S dans $\mathbb{R}$. On dit qu'un point x de C est Φ-exposé dans C, et on écrit $x \in \Phi\mathrm{Exp}(C)$, s'il existe $\varphi \in \Phi$ tel que φ a un maximum unique sur C en x c'est-à-dire $\varphi(x) > \varphi(y)$ pour tout $y \in C \setminus \{x\}$. On dit alors que φ, Φ-expose C en x, ou que C est Φ-exposé par φ en x .*

Il est facile de voir que $\Phi\mathrm{Exp}(C) \subset \Phi\mathrm{Ext}(C)$ mais nous verrons que cette inclusion est en général stricte.

Exemple 1. *Selon les choix de S et de Φ, nous retrouvons des notions classiques.*

Quelques cas classiques. *Lorsque S est un e.v.s.l.c. et $\Phi = S^*$ est le dual topologique de S, alors la Φ-convexité coïncide avec la convexité classique pour les fermés de S et l'enveloppe Φ-convexe d'un ensemble coïncide avec son l'enveloppe convexe fermée.*

Points extrémaux : *Toujours lorsque S est un e.v.s.l.c. et $\Phi = S^*$, les points Φ-extrémaux d'un ensemble non vide coïncident avec ses points extrémaux au sens classique [[47], Proposition 2.].*

Points exposés : (1) *Toujours lorsque S est un e.v.s.l.c. et $\Phi = S^*$, les points Φ-exposés sont habituellement appelés les points exposés. On notera* $\mathrm{Exp}(K)$ *l'ensemble des points exposés de $K \subset S$.*

(2) *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $S = (E, faible)$ l'espace dual E muni de la topologie faible. On prend $\Phi = (E^*, \|.\|)$ l'espace de Banach dual muni de sa norme duale. Alors, la Φ-convexité coïncide avec la convexité classique pour les ensembles faiblement fermés de S qui sont aussi fermés pour la norme (Grâce au lemme de Mazur sur la coïncidence des fermétures faible et en norme pour les convexes) et l'enveloppe Φ-convexe d'un ensemble coïncide avec son l'enveloppe convexe faiblement fermées qui*

coïncide aussi avec son l'enveloppe convexe fermée pour la norme (toujours par le lemme de Mazur). Dans ce cas, les points Φ*-exposés sont habituellement appelés les points exposés.*

Points faible*-exposés : *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach et* $S = (E^*, faible^*)$ *l'espace dual* E^* *muni de la topologie pré-faible. On prend* $\Phi = (E, \|.\|)$*. Alors, la* Φ*-convexité coïncide avec la convexité classique pour les faibles* fermés de* S *et l'enveloppe* Φ*-convexe d'un ensemble coïncide avec son enveloppe convexe faible* fermée. Dans ce cas, les points* Φ*-exposés sont habituellement appelés les points faibles*-exposés. On notera* $w^*\mathrm{Exp}(K)$ *l'ensemble des points faible*-exposés de* $K \subset S$*.*

Un cas nouveau. *Lorsque* $S = K$ *est un compact convexe non vide d'un e.v.s.l.c. et* $\Phi = \mathit{Aff}(K)$ *(l'espace des fonctions affines continues sur* K*), les points* Φ*-exposés seront appelés les points affines exposés (déjà définies dans l'introduction). Rappelons que l'ensemble des points affines exposés de* K *est noté* $\mathrm{AExp}(K)$*.*

Soit K un sous-ensemble convexe d'un *e.v.s.l.c.* X. Il est facile de voir qu'on a toujours

$$\mathrm{Exp}(K) \subset \mathrm{AExp}(K) \subset \mathrm{Ext}(K).$$

Nous allons voir que ces inclusions sont en général strictes. Nous donnerons aussi des cas d'égalité.

A) Exemple où $\mathrm{Exp}(K) \subsetneq \mathrm{AExp}(K)$**.** Le cube $[-1,1]^{\aleph_0}$ dans le *e.v.s.l.c.* métrisable et séparable $\mathbb{R}^{\aleph_0}$, n'a aucun point exposé. Cependant, l'ensemble de ses points affines exposés est non vide. En effet, par exemple le point $b = (1,1,1,...)$ est affine exposé dans $[-1,1]^{\aleph_0}$ par l'application affine continue définie sur $[-1,1]^{\aleph_0}$ par $\varphi : (x_1, x_2, x_3, ...) \mapsto \sum_{n\geq 0} 2^{-n}x_n$.

Un petit changement de l'ensemble $[-1,1]^{\aleph_0}$, donne un exemple où $\emptyset \neq \mathrm{Exp}(K) \neq \mathrm{AExp}(K)$. Par exemple, on peut prendre le compact convexe $K := \{ta + (1-t)k / t \in [0,1], k \in [-1,1]^{\aleph_0}\}$, où $a = (-2,0,0,0,...)$. Dans ce cas, le point a est exposé par l'application linéaire continue $x^* : (x_1, x_2, x_3, ...) \mapsto -x_1$, mais le point $b = (1,1,1,...)$ n'est pas exposé. D'autre part, b est affine exposé par l'application affine continue définie sur K par $\varphi : (x_1, x_2, x_3, ...) \mapsto \sum_{n\geq 0} 2^{-n}x_n$.

B) Exemple où $\mathrm{Exp}(K) = \mathrm{AExp}(K)$**.** Soit K un convexe d'un espace vectoriel topologique. Clairement, toutes les translatées de fonctions linéaires continues sont des éléments de $\mathit{Aff}(K)$, mais la réciproque n'est pas vraie en général (Voir [63] page 22.). Cependant, on a la relation bien connue suivante.

Proposition 4. *([63], Proposition 4.5) Supposons que* K *est un convexe compact non vide d'un e.v.s.l.c.* X*, alors*

$$L(K) := \left\{ a \in \mathit{Aff}(K) : a = x^*_{|K} + r \text{ pour un certain } x^* \in X^* \text{ et un certain } r \in \mathbb{R} \right\}$$

est dense dans $(\mathit{Aff}(K), \|.\|_\infty)$*.*

Si $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach et E^* est son dual topologique, l'espace $S = (E^*, \text{faible}^*)$ est un *e.v.s.l.c.* Il est alors bien connu que $S^* = E$ (Voir [Corollary 224., [44]]). Dans ce cas, les points exposés d'un sous-ensemble non vide de S sont par définition les points faible*-exposés et la fermeture d'un sous-ensemble de S coïncide avec sa faible* fermeture dans E^*.

Voici deux résultats (voir [6]) sur les cas où les points exposés et affines exposés coïncident.

Proposition 5. *Soit E un espace de Banach. Soit K un sous-ensemble convexe faible* compact de E^* et d'intérieur non vide pour la norme. Soit $S = (E^*, \text{faible}^*)$. Alors, $S^* = E$ et $w^*\text{Exp}(K) = \text{AExp}(K)$.*

Proposition 6. *Dans un espace vectoriel normé, les points exposés et affines exposés coïncident pour les convexes compacts de dimensions finies (c'est-à-dire les convexes compacts dont l'enveloppe affine est de dimension finie).*

On sait par la Proposition 4 que l'ensemble

$$L(K) := \left\{ a \in Aff(K) : a = x^*_{|K} + r \text{ pour un certain } x^* \in X^* \text{ et un certain } r \in \mathbb{R} \right\}$$

est toujours dense dans $(Aff(K), \|.\|_\infty)$. On sait qu'il existe des situations où $L(K) = Aff(K)$, par exemple si $K = B_{E^*}$ dans (E^*, Weak^*), où E est un espace de Banach. Mais il existe d'autres situations où $L(K)$ peut être très "petit" dans $Aff(K)$. C'est le cas par exemple si $K = [-1, 1]^{\aleph_0} \subset \mathbb{R}^{\aleph_0}$ car $\text{Exp}([-1, 1]^{\aleph_0}) = \emptyset$. Plus généralement, on a la proposition suivante.

Proposition 7. *Soit K un convexe compact métrisable et non vide d'un e.v.s.l.c. tel que $\text{Exp}(K) = \emptyset$. Alors, $L(K)$ est inclus dans une réunion dénombrable de d.c-$hypersurfaces$ de $(Aff(K), \|.\|_\infty)$.*

Démonstration. Puisque $\text{Exp}(K) = \emptyset$ alors on conclut en utilisant la Proposition 3, et le fait que $L(K) \subset N(0)$ où 0 désigne la fonction constamment nulle. □

C) Exemple où $\text{AExp}(K) \subsetneq \text{Ext}(K)$. Il est bien connu que même dans l'espace de dimension 2, il existe une boule unité fermée B pour une norme bien choisie, tel que $\text{Exp}(B) \neq \text{Ext}(B)$ (Voir Exemples 5.9 dans [62]). Ainsi, par la Proposition 5 ou la Proposition 6 on a aussi que $\text{AExp}(B) \neq \text{Ext}(B)$.

D) Exemple où $\text{Exp}(K) = \text{AExp}(K) = \text{Ext}(K)$. Si $K = B_2$ est la boule euclidienne fermée de $\mathbb{R}^2$ par exemple alors clairement on a $\text{Exp}(K) = \text{AExp}(K) = \text{Ext}(K) = S_2$, la sphere unité.

2.2 Extension du Théorème de Krein-Milman dans le cas Métrisable.

Rappelons que le Théorème de Krein-Milman a été étendu dans [51] par Ky Fan au cas des compacts Φ-convexe.

Théorème 4. (Krein-Milman-Ky Fan) *Soit S un espace topologique séparé et Φ une famille de fonctions à valeurs réelles définies sur S. Soit K un sous-ensemble compact non vide et Φ-convexe de S et supposons que :*
(1) la restriction de chaque $\varphi \in \Phi$ à K, est semi-continue inférieurement sur K ;
(2) Φ sépare les points de K.
Alors, $\Phi\mathrm{Ext}(K) \neq \emptyset$ *et* $K = \mathrm{conv}_\Phi(\Phi\mathrm{Ext}(K))$.

Il a été démontré dans [6], que dans le cadre des ensembles Φ-convexe compacts métrisables, la situation est meilleure. En effet, on peut dans ce cas remplacer, dans le théorème de Krein-Millman-Ky Fan, les points Φ-extrémaux par les points Φ-exposés. Tout compact d'un espace topologique métrisable est évidement métrisable, mais il existe des espaces topologiques séparés non métrisables où tout compact est métrisable (voir la section qui suit). Le théorème suivant s'applique donc dans une large classe de situations ; sa preuve repose sur le Théorème 2.

Théorème 5. *Soit S un espace topologique séparé et $(\Phi, \|.\|_\Phi)$ un espace de Banach de fonctions définies sur S et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit K un sous-ensemble non vide Φ-convexe compact métrisable de S et supposons que :*
(1) chaque $\varphi \in \Phi$ est continue sur K, et qu'il existe un réel $\alpha_K \geq 0$ tel que $\alpha_K\|\varphi\|_\Phi \geq \sup_{x\in K} |\varphi(x)|$ pour tout $\varphi \in \Phi$;
(2) Φ sépare les points de K.
Alors, on a
(i) $\Phi\mathrm{Exp}(K) \neq \emptyset$ et l'ensemble de tous les $\varphi \in \Phi$ qui Φ-exposent K en un certain point, est un sous-ensemble G_δ dense de $(\Phi, \|.\|_\Phi)$;
(ii) $K = \mathrm{conv}_\Phi(\Phi\mathrm{Exp}(K))$.

Remarque 2. *Sous les hypothèses du Théorème 5, si on suppose de plus que $(\Phi, \|.\|_\Phi)$ est un espace de Banach séparable, alors on a que l'ensemble des $\varphi \in \Phi$ qui Φ-exposent K en un certain point, a un complémentaire dans Φ qui est inclus dans une réunion dénombrable de d.c-hypersurfaces de $(\Phi, \|.\|_\Phi)$.*

Notons que le Théorème 5 n'est pas vrai en général pour les Φ-convexes compacts qui ne sont pas métrisables. Par exemple, si $(E, \|.\|) = (l^1(\Gamma), \|.\|_1)$ (où Γ est un ensemble non dénombrable), $S = (E^*, \text{faible}^*)$ et $(\Phi, \|.\|_\Phi) = (E, \|.\|)$ alors, toutes les hypothèses du Théorème 5 sont satisfaites. Cependant, pour le faible* compact non métrisable $K = B_{E^*}$ (la boule unité fermé du dual), on a que $\Phi\mathrm{Exp}(K) = w^*\mathrm{Exp}(K) = \mathrm{AExp}(K) = \emptyset$. Ceci est dû au fait que la norme $\|.\|_1$ est nulle part Gâteaux-différentiable (Voir Exemple 1.4 (b) p. 3 dans [62] et [Proposition 6.9., [62]]). Notons aussi que le Théorème 5 est faux en général si Φ n'est pas un espace de Banach satisfaisant (1). En effet, dans le *e.v.s.l.c.* séparable et métrisable $S = \mathbb{R}^{\aleph_0}$, où $\Phi = S^*$ est son dual topologique, le cube $K = [-1, 1]^{\aleph_0}$ n'a aucun point exposé.

On sait par le [Théorème 6.2., [62]] qu'un espace E est un espace de Gâteaux-différentiabilité (toute fonction convexe continue sur E est Gâteaux-différentiable sur un ensemble dense) si et seulement si tout convexe faible* compact de E^* est l'enveloppe convexe faible* fermé de ses points faible*-exposés. Comme je l'ai rappelé plus haut, $(l^1(\Gamma), \|.\|_1)$ (où Γ est un ensemble non dénombrable) n'a pas cette propriété. Cependant, le résultat est toujours positif pour les convexes faibles* compacts métrisables dans tout espace de Banach dual. Comme conséquence du Théorème 5, on obtient le Théorème

6 déjà mentionné dans l'introduction ainsi que le corollaire qui suit (dont la partie (1) est, à ma connaissance, nouvelle aussi dans les espaces de Banach quelconques).

Théorème 6. *Soit X un e.v.s.l.c. Alors, tout ensemble convexe compact métrisable K de X est l'enveloppe convexe fermée de ses points affines exposés :* $K = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{AExp}(K))$.

On applique le Théorème 5 avec $S = K$ et $(\Phi, \|.\|_\Phi) = (Aff(K), \|.\|_\infty)$, pour obtenir le théorème précédent.

Corollaire 4. *Soit E un espace de Banach.*

(1) *Soit K un convexe faible* compact métrisable non vide de E^*. Alors,*

$$K = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(w^*\mathrm{Exp}(K)).$$

(2) *Soit K un convexe faible compact métrisable et non vide de E. Alors,*

$$K = \overline{\mathrm{conv}}^{w}(\mathrm{Exp}(K)) = \overline{\mathrm{conv}}^{\|\cdot\|}(\mathrm{Exp}(K)).$$

Pour ce corollaire, on applique le Théorème 5 dans (1) avec $(S = (E^*, faible^*)$ et $(\Phi, \|.|_\Phi) = (E, \|.\|)$ et dans (2) avec $(S = (E, faible)$ et $(\Phi, \|.|_\Phi) = (E^*, \|.\|)$.

Notons que la partie (2) du précédent corollaire n'est pas optimal. En effet, il existe un résultat due à Lindenstrauss et Troyanski qui dit que tout sous-ensemble convexe faiblement compact d'un espace de Banach est l'enveloppe convexe fermé de ses points fortements exposés (Une preuve géométrique de ce résultat est due à Bourgain [29]).

Comme il a été dit dans l'introduction de ce chapitre, Klee a pointé dans [48], le fait que l'on ne peut pas espérer avoir un résultat analogue au corollaire 4 en dehors des espaces vectoriels normés. Il mentionne l'exemple du cube $[-1,1]^{\aleph_0}$ dans $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ qui n'a pas de points exposés. En revanche, avec la notion des points affines exposés nous avons étendu, dans le Théorème 6, le théorème de Krein-Milman pour les convexes compacts métrisables de n'importe quel *e.v.s.l.c.*

En utilisant la réciproque partielle du Théorème de Krein-Milman (le théorème de Milman) on obtient aisément le corollaire suivant.

Corollaire 5. *Soit E un Banach.*

(1) *Soit* (K, faible^*) *un convexe faible* compact métrisable non vide de E^*. Alors, l'ensemble* $w^*\mathrm{Exp}(K)$ *est faible* dense dans* $\mathrm{AExp}(K)$*, qui est faible* dense dans* $\mathrm{Ext}(K)$.

(2) *Soit* (K, faible) *un convexe faible compact non vide de E. Alors, l'ensemble* $\mathrm{Exp}(K)$ *dense pour la topologie faible dans* $\mathrm{AExp}(K)$ *qui est dense pour la topologie faible dans* $\mathrm{Ext}(K)$.

2.3 Introduction d'une Nouvelle Classe d'Espaces Localement Convexes.

On introduit la classe d'*e.v.s.l.c.* suivante :

Définition 4. *On dit qu'un e.v.s.l.c. X a la propriété des points affines exposés (on dira en bref que X a la propriété P.A.E.) si tout convexe compact de X est l'enveloppe convexe fermée de ses points affines exposés.*

Pour mieux situer cette classe d'espaces dans l'ensemble des *e.v.s.l.c.*, je vais donner des exemples généraux et des contre-exemples. Soit

$$\Xi := \{X \text{ } e.v.s.l.c. \text{ / tout compact de } X \text{ est métrisable }\}.$$

La classe Ξ a été activement étudiée dans les années 1980 par plusieurs auteurs. Cette classe contient bien sûr tout les *e.v.s.l.c.* métrisables (en particulier les espaces de Fréchet) mais elle est plus large. On trouvera dans [32] et les références qu'il contient, plusieurs exemples. On sait par exemple que $C_c(T), C_b(T) \in \Xi$, lorsque T est un espace topologique contenant un sous-espace K-analytique dense et où $C_c(T)$ désigne l'espace des fonctions continues et $C_b(T)$ l'espace des fonctions continues bornées, muni chacun de sa topologie compacte-ouverte.

Ainsi, on obtient immédiatement du Théorème 6, un premier résultat significatif dans l'étude de la propriété P.A.E..

Proposition 8. *Tout e.v.s.l.c. X de la classe Ξ a la propriété P.A.E.*

Exemple 2. *Des exemples immédiats.*

(1) *Tout espace de Fréchet a la propriété P.A.E..*

(2) *Tout convexe fermé borné d'un espace de Fréchet-Montel est l'enveloppe convexe fermée de ses points affines exposés (dans un espace de Fréchet-Montel, tout fermé borné est compact). Un exemple classique d'espace de Fréchet-Montel est l'espace $C^\infty(\Omega)$ des fonctions de classe C^∞ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.*

(3) *Les espaces $C_c(T)$ et $C_b(T)$ (lorsque T est un espace topologique contenant un sous-espace K-analytique dense) munis de leur topologie compacte-ouverte ont la propriété P.A.E.*

La réciproque de la Proposition 8 est fausse. Voici maintenant une autre classe d'*e.v.s.l.c.* possédant la propriété P.A.E. mais qui peut différer de la classe Ξ. Rappelons un théorème de Phelps dans [62]. Un espace de Banach E est dit un espace de Gâteaux-différentiabilité (EGD) si et seulement si toute fonction convexe continue sur E est Gâteaux-différentiable sur un ensemble dense.

Théorème 7. (Phelps [Theorem 6.2., [62] p. 95]) *Un espace de Banach E est un EGD si et seulement si tout faible* compact convexe de E^* est l'enveloppe convexe faible* fermée de ses points faible*-exposés.*

Puisque tout point faible*-exposé est en particulier un point affine exposé, il suit du théorème précédent que l'espace (E^*, faible^*) a la propriété P.A.E. dès que E est un EGD. Cependant, si E n'est pas séparable alors la boule unité fermée du dual est un convexe faible* compact non métrisable. On a donc la proposition suivante.

Proposition 9. *Soit E un EGD. Alors, (E^*, faible^*) a la propriété P.A.E. Si de plus E n'est pas séparable, alors $E \notin \Xi$.*

On sait par [Proposition 6.9., [62]] que si la norme de E n'est nulle part Gâteaux-différentiable (c'est le cas par exemple pour $E = l^1(\Gamma)$, Γ non dénombrable), alors la boule unité fermée dual B_{E^*} n'a aucun point faible* exposé et on sait par la Proposition 5 que $w^*\mathrm{Exp}(B_{E^*}) = \mathrm{AExp}(B_{E^*})$. D'où la proposition suivante.

Proposition 10. *Soit E un espace de Banach dont la norme est nulle part Gâteaux-différentiable. Alors, (E^*, faible^*) n'a pas la propriété P.A.E.*

Ainsi, par ce qu'on vient de voir dans cette section, il existe des espaces qui n'ont pas la propriété P.A.E., d'autre part la classe possédant cette propriété est strictement plus large que Ξ. C'est une classe qui reste donc à caractériser et à mieux connaître.

2.4 Relation Entre la Frontière de Shilov et les Points Φ-Exposés.

Soit K un espace compact et $(\Phi, \|.\|_\infty)$ un sous-espace fermé de $(C(K), \|.\|_\infty)$. Par B_{Φ^*} on désigne la boule unité fermée du dual de $(\Phi, \|.\|_\infty)$. On utilisera les notations suivantes :

$$\pm\delta(\Phi\mathrm{Exp}(K)) := \{\pm\delta_k / k \in \Phi\mathrm{Exp}(K)\}$$

où, pour chaque $k \in \Phi\mathrm{Exp}(K)$, $\delta_k : \varphi \mapsto \varphi(k)$ pour tout $\varphi \in \Phi$.

Dans le théorème qui suit, il s'agit d'expliciter les points faibles*-exposés de la boule duale B_{Φ^*}.

Théorème 8. *Soit K un espace compact métrique et $(\Phi, \|.\|_\infty)$ un sous-espace de Banach de $(C(K), \|.\|_\infty)$ qui sépare les points de K et contient les fonctions constantes. Alors, on a*

$$w^*\mathrm{Exp}(B_{\Phi^*}) = \pm\delta(\Phi\mathrm{Exp}(K)),$$

et

$$B_{\Phi^*} = \overline{\mathrm{conv}}^{\mathrm{w}^*}(\pm\delta(\Phi\mathrm{Exp}(K))).$$

On voit bien dans ce théorème comment la notion des points Φ-exposé apparaît très naturellement dans la description des points faibles*-exposés de la boule duale B_{Φ^*}. Nous verrons aussi dans le théorème 9 que l'adherence des points Φ-exposés coïncide avec la frontière de Shilov.

La preuve du Théorème 8 repose en particulier sur la part (1) du Corollaire 4 et le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit K un métrique compact et $(\Phi, \|.\|_\infty)$ un sous-espace de Banach de $(C(K), \|.\|_\infty)$ qui sépare les points de K et contient les fonctions constantes. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *un point $Q \in B_{\Phi^*}$ est faible*-exposé*

(2) *il existe un point Φ-exposé $k \in \Phi\mathrm{Exp}(K)$ tel que $Q = \pm\delta_k$.*

On déduit du théorème précédent les corollaires suivants. En remplaçant Φ par *Aff*(K) dans le Theorem 8, on obtient :

Corollaire 6. *Soit K un convexe compact métrisable d'un e.v.s.l.c. X. Alors,*

$$w^*\mathrm{Exp}(B_{(\mathit{Aff}(K))^*}) = \pm\delta(\mathrm{AExp}(K)),$$

et

$$B_{(\mathit{Aff}(K))^*} = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(\pm\delta(\mathrm{AExp}(K))).$$

En remplaçant Φ par $C(K)$ dans le Theorem 8, où (K, d) est un métrique compact et en observant que $\Phi\mathrm{Exp}(K) = K$, puisque chaque point $k \in K$ est un point exposé par la fonction continue $x \mapsto -d(x, k)$, on obtient que :

Corollaire 7. *Soit (K, d) un métrique compact . Alors,*

$$w^*\mathrm{Exp}(B_{(C(K))^*}) = \pm\delta(K),$$

et

$$B_{(C(K))^*} = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(\pm\delta(K)).$$

Remarque 3. *Il est bien connu que si K est un espace topologique compact, alors $\mathrm{Ext}(B_{(C(K))^*}) = \pm\delta(K)$. Ainsi, pour les espaces compacts métriques K, les points extrémaux et les points faibles*-exposés dans $B_{(C(K))^*}$ coincïdent.*

La frontière de Shilov et les points Φ-exposés. Soit K un compact et $(\Phi, \|.\|_\infty)$ un sous-espace de Banach de $(C(K), \|.\|_\infty)$ qui sépare les points de K. Un sous-ensemble L de K est dit

- une frontière pour Φ si pour tout $\varphi \in \Phi$, on a $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in L} |\varphi(x)|$,
- une frontière fermée pour Φ si pour tout $\varphi \in \Phi$, on a $\|\varphi\|_\infty = \max_{x\in L} |\varphi(x)|$.

la frontière de Choquet de Φ, noté $Ch(\Phi)$, est définie comme suit

$$Ch(\Phi) := \{x \in K/\delta_x \text{ est extrémal dans la boule unité du dual de } \Phi^*\}.$$

Il est bien connu que $Ch(\Phi)$ est une frontière pour Φ (Voir [[71], p. 184]). Lorsque Φ admet une unique frontière fermée et minimale, elle est appelée la frontière de Shilov de Φ et elle est notée par $\partial\Phi$. Milman a prouvé l'existence de la frontière de Shilov pour tout sous-espace linéaire fermé de $C(K)$, qui sépare les points de K et qui contient les constantes (Voir [57] et [58]). Il a aussi montré que dans ce cas, on a $\partial\Phi = \overline{Ch(\Phi)}$. Une preuve de ce résultat, due à H.S. Bear, peut être trouvée dans [20]. Pour d'autres notions de frontières, on renvoie à [2] et [3].

Comme conséquence du Theorem 8, on obtient dans le résultat qui suit, que si K est un métrique compact, alors l'ensemble $\Phi\mathrm{Exp}(K)$ des points Φ-exposés (qui est en général strictement inclus dans $Ch(\Phi)$) est aussi une frontière pour Φ, dense dans la frontière de Shilov de Φ. Une différence avec l'étude effectuée par Araujo, et Font dans [2], c'est qu'on ne suppose pas ici que Φ soit une sous-algèbre fermée mais uniquement un sous-espace fermé contenant les constantes (en revanche, K est supposé compact métrisable ici). Ceci permet d'englober le cas important $\Phi = \mathit{Aff}(K)$, lorsque K est un convexe compact d'un *e.v.s.l.c* ou encore le cas de l'espace des fonctions harmoniques.

Théorème 9. *Soit K un métrique compact et $(\Phi, \|.\|_\infty)$ un sous-espace de Banach de $(C(K), \|.\|_\infty)$ qui sépare les points de K et contient les constantes. Alors, l'ensemble $\Phi\mathrm{Exp}(K)$ est une frontière pour Φ et on a que*

$$\partial\Phi = \overline{\Phi\mathrm{Exp}(K)} = \overline{Ch(\Phi)}.$$

Notons deux choses :

• On a toujours $\Phi\mathrm{Exp}(K) \subset Ch(\Phi)$ mais cette inclusion est stricte en général. En effet, si on prend un convexe compact comme dans **Exemple C.** dans la Section 2.1, c'est-à-dire tel que $\emptyset \neq \mathrm{AExp}(K) \neq \mathrm{Ext}(K)$ et $\Phi = \mathit{Aff}(K)$, alors on a que

$$\emptyset \neq \Phi\mathrm{Exp}(K) = \mathrm{AExp}(K) \subsetneq Ch(\Phi) = \mathrm{Ext}(K).$$

• Le théorème précédent est faux en général si on ne suppose pas que K est métrisable. En effet, lorsque, $K = (B_{E^*}, faible^*)$ (la boule unité fermée du dual de $(E, \|.\|) = (l^1(\Gamma), \|.\|_1)$ où Γ est un ensemble non dénombrable), et $\Phi = \mathit{Aff}(K)$, alors $\Phi\mathrm{Exp}(K) = \mathrm{AExp}(K)) = w^*\mathrm{Exp}(K) = \emptyset$ (voir Proposition 5) alors que $\partial\Phi = \overline{Ch(\Phi)} \neq \emptyset$ par un résultat de Milman cité plus haut.

Chapitre 3

Introduction à une Théorie Globale de l'Inf-Convolution.

Historiquement, l'inf-convolution est apparue dans un article de Mac Shane [52], dont l'objectif était d'étendre des fonctions lipschitziennes d'un sous-ensemble d'un espace métrique à l'espace entier. Mais son utilisation s'est avérée efficace dans plusieurs domaines de l'analyse. On peut citer la régularisée de Moreau-Yoshida [61] ou la régularisée de Lasry-Lions [50] qui sont utilisés en théorie des équations de Hamilton-Jacobi (formule de Hopf-Lax) [33] ou en théorie des équations elliptiques non linéaires [35], [70], les propriétés de dualité entre l'inf-convolution et la transformée de Fenchel utilisées en optimisation [69], [66] ou encore l'utilisation de l'inf-convolution en analyse fonctionnelle [4].

Un regard nouveau est porté sur l'inf-convolution et sera présenté dans ce chapitre (basé sur les articles ([7], [8], [9], [10]). En effet, l'opération de l'inf-convolution s'avère être une opération globale sur certains espaces de fonctions, permettant la rencontre entre l'optimisation, des structures algébriques et des structures topologiques. Autrement dit, elle confère des structures de monoïde à certains espaces de fonctions et permet d'obtenir des résultats naturels comme la caractérisation des complétés des groupes métriques invariants à partir de la notion algébrique d'éléments inversibles d'un monoïde. Nous verrons aussi dans le chapitre 4 des applications au théorème de Banach-Stone. On commencera ce chapitre par des résultats d'optimisation (dans la section 3.2) qui montrent que les problèmes *bien-posés* sont stables par l'opération de l'inf-convolution.

3.1 Magmas Métriques Quasi-Invariants.

Soit (X, d) un espace métrique. L'espace produit $X \times X$ sera muni de la distance définie pour tout $(y, z), (y', z') \in X \times X$ par

$$\omega\left((y, z), (y', z')\right) := d(y, y') + d(z, z').$$

Lorsque X est un magma, c'est-à-dire un ensemble muni d'une loi de composition interne notée multiplicativement, on définit l'inf-convolution de deux fonctions réelles f et g définies sur X par la formule suivante :

$$(f \oplus g)(x) \quad := \inf_{y,z \in X/yz=x} \{f(y) + g(z)\}\,; \quad \forall x \in X.$$

Définition 5. *Soit $(X, \cdot, d)$ un magma métrique. On dit que (X, d) est quasi-invariant, si la loi $\cdot : (X \times X, \omega) \longrightarrow (X, d)$ est continue et satisfait : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $y, z, t \in X$:*

$$d(yt, zt) < \delta \Longrightarrow d(y, z) < \varepsilon$$

et

$$d(ty, tz) < \delta \Longrightarrow d(y, z) < \varepsilon$$

Si de plus X est complet pour la métrique d, alors on dit que (X, d) est un magma complet quasi-invariant.

Définition 6. *Soit (X, d) un magma métrique. On dit que (X, d) est invariant, si*

$$d(xy, xz) = d(yx, zx) = d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X.$$

Si de plus X est complet pour d, alors on dit que (X, d) est un magma complet invariant.

Chaque magma invariant est en particulier un magma quasi-invariant. Plusieurs exemples de magma invariant (complet) ont été donnés dans [8]. On donne plus bas quelques exemples de magma quasi-invariant.

Exemple 3. *Dans chacun des cas suivants, la loi $\cdot : X \times X \longrightarrow X$ est surjective et satisfait la Définition 5.*

1) *Soit (X, d) un espace vectoriel métrique (complete) muni de la distance d satisfaisant, pour tout $x, y, z \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$*

$$\begin{aligned} d(x+z, y+z) &= d(x, y) \\ d(\lambda x, \lambda y) &= \lambda d(x, y). \end{aligned}$$

Dans ce cas $(X, +, d)$ est un groupe complet invariant. Soit C un sous-ensemble convexe fermé de X et $\lambda \in]0, 1[$ fixé. On définit la loi $\cdot$ sur $C \times C$ par, $yz := \lambda y + (1-\lambda)z$, pour tout $y, z \in C$. Dans ce cas $(C, \cdot, d)$ est un magma (complet) quasi-invariant, on a

$$d(yx, zx) = \lambda d(y, z); \quad \forall x, y, z \in C.$$

et

$$d(xy, xz) = (1-\lambda) d(y, z); \quad \forall x, y, z \in C.$$

2) *Si $(X, \star, d)$ est un groupe (complet) invariant (voir plusieurs exemples dans [8]). on définit la loi $\cdot$ comme suit : $yz = T(y) \star S(z)$ pour tout $y, z \in X$, où $T, S : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ sont bijectives et bi-lipschitziennes. Alors, $(X, \cdot, d)$ est un magma (complet) quasi-invariant.*

3.2 Inf-Convolution et Optimisation.

Voici un résultat d'optimisation établi dans [10] qui montre que les problèmes *bien-posés* sont stables par l'opération de l'inf-convolution.

Théorème 10. *Soit $(X, \cdot, d)$ un magma métrique complet quasi-invariant. Soit $a \in X$ et $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions propres et semi-continues inférieurement. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *la fonction $f \oplus g$ a un minimum fort en a*

(2) *il existe $(a_1, a_2) \in X \times X$ tel que, $a_1a_2 = a$, f a un minimum fort en a_1 et g a un minimum fort en a_2.*

On en déduit quelques conséquences immédiates.

Corollaire 8. *Soit $(X, \cdot, d)$ un magma complet quasi-invariant. Soit $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un homomorphisme de magma continu. Soit $a \in X$ et $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ deux fonctions propres semi-continue inférieurement. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *$f \oplus g - p$ a un minimum fort en a*

(2) *il existe $a_1, a_2 \in X$ satisfaisant $a_1a_2 = a$ tel que $f - p$ a un minimum fort en a_1 et $g - p$ a un minimum fort en a_2.*

Il suffit ici de voir que $f \oplus g - p = (f - p) \oplus (g - p)$.

Soit (X, d) un magma métrique et $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre, par $G(f)$ on désigne l'ensemble suivant

$$G(f) := \{p : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ morphisme de magma continu } / f - p \text{ a un minimum fort } \}.$$

On obtient immédiatement du Corollaire 8 la proposition suivante.

Proposition 11. *Soit $(X, \cdot, d)$ un magma quasi-invariant et $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions propres et semi-continues inférieurement. Alors, on a*

$$G(f \oplus g) = G(f) \cap G(g).$$

Considérons maintenant un espace de Banach X. L'ensemble $(X, +)$ est un groupe abélien et l'opération $\oplus$ est l'inf-convolution classique. Un morphisme de groupe $p : (X, +) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continu si et seulement si, $p \in X^*$ (le dual topologique de X). Par un principe variationnel de Fabian (voir [62, Corollary 5.22]) et le Corolaire 8 avec X un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym (RNP), on obtient le corollaire suivant qui garantit une perturbation commune de norme arbitrairement petite de deux fonctions distinctes.

Corollaire 9. *Supposons que X est un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym et que $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sont propres semi-continues inférieurement telles que*

(1) *$f \oplus g$ est semi-continue inférieurement*

(2) *il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que*

$$(f \oplus g)(x) \geq a\|x\| + b, \quad \forall x \in X.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in X^*$ et $x_1, x_2 \in X$ tel que

(i) $\|p\| < \varepsilon$,

(ii) *$(f \oplus g) - p$ a un minimum fort sur X en $x_1 + x_2$,*

(iii) *$f - p$ a un minimum fort sur X en x_1,*

(iv) *$g - p$ a un minimum fort sur X en x_2.*

3.3 Structure de Monoïde et Plongement Isométrique.

Soit X un ensemble. On note $\mathcal{F}_+(X)$ l'ensemble de toutes les fonctions de X dans $\mathbb{R}^+$. On munit $\mathcal{F}_+(X)$ de la distance

$$\rho(f,g) := \sup_{x\in X} \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}, \ \ \forall f,g \in \mathcal{F}_+(X).$$

On munit l'espace produit $\mathcal{F}_+(X) \times \mathcal{F}_+(X)$ de la distance

$$\tilde{\rho}((f,g),(f',g')) = \rho(f,f') + \rho(g,g').$$

Proposition 12. *Soit X un semi-groupe (commutatif). Alors, $(\mathcal{F}_+(X),\oplus)$ a la structure de semi-groupe (commutatif) et l'opération de l'inf-convolution*

$$\begin{array}{rcl} \oplus : (\mathcal{F}_+(X)\times\mathcal{F}_+(X),\tilde{\rho}) & \longrightarrow & (\mathcal{F}_+(X),\rho) \\ (f,g) & \mapsto & f\oplus g \end{array}$$

est 1*-lipschitzienne.*

Dans ce qui suit, on suppose que (X,d) est un groupe métrique invariant ayant e comme élément neutre. Pour chaque point fixé $x \in X$, l'application δ_x est définie de X dans $\mathbb{R}$ comme suit

$$\begin{array}{rcl} \delta_x : X & \rightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & d(z,x) = d(zx^{-1},e). \end{array}$$

On définit le sous-ensemble $\mathcal{G}(X)$ de $Lip^1_+(X)$ comme suit

$$\mathcal{G}(X) := \{\delta_x : x \in X\} \subset Lip^1_+(X).$$

On considère l'opérateur γ_X définit par

$$\begin{array}{rcl} \gamma_X : X & \rightarrow & \mathcal{G}(X) \\ x & \mapsto & \delta_x \end{array}$$

Le symbole $\cong$ désignera "isométriquement isomorphe".

Par $(\overline{X},\overline{d})$ on désigne le groupe complété de (X,d) (voir [49] pour une construction du groupe complété d'un groupe invariant). Rappelons que $Lip^1_+(X)$ désigne l'ensemble des fonctions positives 1-lipschitziennes sur X. Par $W^1_+(X)$ on notera le sous-ensemble de tous les *problèmes bien-posés au sens de Tikhonov* dans $Lip^1_+(X)$:

$$W^1_+(X) := \{f \in Lip^1_+(X)/f \text{ a un minimum fort en un certain point}\}.$$

L'ensemble de tout les *problèmes mal-posés au sens de Tikhonov*, $I^1_+(X) := Lip^1_+(X) \setminus W^1_+(X)$ est défini comme étant le complémentaire de $W^1_+(X)$ dans $Lip^1_+(X)$.

Définition 7. *Étant donné un monoïde M, un idéal à gauche de M est un sous-ensemble I de M tel que MI est contenu dans I. De manière similaire, un idéal à droite est un sous-ensemble I de M tel que $IM \subset I$. Finalement, un idéal, dans M est un sous-ensemble I qui est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite de M.*

La preuve du théorème suivant utilise le théorème 10 (pour la densité dans (2) on utilise aussi le principe variationnel de Deville-Godefroy-Zizler). Ce théorème affirme que $(Lip^1_+(X), \oplus)$ est un monoide et permet de le décomposer en une réunion de deux sous-ensembles disjoints remarquables.

Théorème 11. *Soit (X, d) un groupe métrique invariant (abélien) ayant e comme élément neutre, alors :*
(1) $(Lip^1_+(X), \oplus, \rho)$ *est un monoïde complet (abélien) ayant δ_e comme élément neutre.*
(2) *Si de plus (X, d) est complet, alors :*
(*a*) $W^1_+(X)$ *est un sous monoïde dense dans $(Lip^1_+(X), \oplus, \rho)$.*
(*b*) $I^1_+(X)$ *est un idéal d'intérieur vide de $(Lip^1_+(X), \oplus, \rho)$.*

La proposition qui suit dit que tout groupe métrique invariant $(X, \frac{d}{1+d}))$ s'injecte isométriquement dans $(Lip^1_+(X), \oplus, \rho)$.

Proposition 13. *Soit $(X, \cdot, d)$ un groupe métrique invariant d'élément neutre e. Alors,*

$$\begin{array}{rcl} \gamma_X : (X, \cdot, d) & \to & (\mathcal{G}(X), \oplus, d_\infty) \\ x & \mapsto & \delta_x \end{array}$$

est isomorphisme isométrique de groupes. De manière équivalente, l'application

$$\begin{array}{rcl} \gamma_X : (X, \cdot, \dfrac{d}{1+d}) & \to & (\mathcal{G}(X), \oplus, \rho) \subset (Lip^1_+(X), \oplus, \rho) \\ x & \mapsto & \delta_x \end{array}$$

est isomorphisme isométrique de groupes. Ceci signifie que $(X, \cdot, \frac{d}{1+d})$ s'injecte isométriquement comme groupe dans le monoïde métrique $(Lip^1_+(X), \oplus, \rho)$.

3.4 Caractérisation du Complété d'un Groupe Métrique Invariant.

On donnera dans cette section une caractérisation du complété d'un groupe metrique invariant. Rappelons que si $(M, \cdot)$ est un monoïde ayant e_M comme élément neutre, le groupe des éléments inversibles de M est l'ensemble

$$\mathcal{U}(M) := \{m \in M / \ \exists m' \in M : m \cdot m' = m' \cdot m = e_M\}.$$

Le théorème suivant explicite l'ensemble des éléments inversibles du monoide $(Lip^1_+(X), \oplus)$ et du sous monoide $(W^1_+(X), \oplus)$, lorsque (X, d) est un groupe métrique invariant et complet.

Théorème 12. *Soit (X, d) un groupe métrique complet invariant ayant e comme élément neutre. Alors, on a :*

(1) $\mathcal{U}(Lip^1_+(X)) = \mathcal{U}(W^1_+(X)) = \mathcal{G}(X)$.

(2) $(\mathcal{U}(Lip^1_+(X)), d_\infty) \cong (X, d)$ *comme groupe.*

(3) $(\mathcal{U}(Lip^1_+(X)), \rho) \cong (X, \frac{d}{1+d})$ *comme groupe.*

Le lemme suivant, permet de travailler avec des groupes métriques invariants non nécessairement complets.

Lemme 2. *Soit (X, d) un groupe métrique invariant et $(\overline{X}, \overline{d})$ son groupe complété. Alors,*

$$(Lip^1_+(X), \oplus, \rho) \cong (Lip^1_+(\overline{X}), \oplus, \rho)$$

comme monoïde. Plus précisément, l'application

$$\begin{array}{rcl} \chi : (Lip^1_+(X), \oplus, \rho) & \rightarrow & (Lip^1_+(\overline{X}), \oplus, \rho) \\ f & \mapsto & \overline{f} = \left[\bar{x} \mapsto \inf_{z \in X} \left\{ \overline{d}(\bar{x} z^{-1}, e) + f(z) \right\} \right] \end{array}$$

est un isomorphisme isométrique de monoïdes. De plus,on a que $\overline{f} = f$ sur X.

Ainsi, grâce aux deux résultats précédents et puisque le complété d'un groupe invariant est unique à un isomorphisme isométrique près, le corollaire suivant donne une alternative nouvelle quand à la considération du groupe complété $(\overline{X}, \overline{d})$ d'un groupe métrique invariant (X, d).

Corollaire 10. *Soit (X, d) un groupe métrique invariant. Alors, on a*

$$(\overline{X}, \overline{d}) \cong (\mathcal{U}(Lip^1_+(X)), d_\infty).$$

3.5 L'Application argmin Comme Homomorphisme Continu de Monoïdes.

Rappelons que pour une fonction propre f définie sur un ensemble X est à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on définit $\arg\min(f)$ comme suit,

$$\mathrm{argmin}(f) = \{x \in X : f(x) = \inf_{y \in X} f(y)\}.$$

On va voir que l'application $\arg\min$ a des propriétés globales lorsqu'on la restreint au monoïde $(W^1_+(X), \oplus, \rho)$. Elle permettra d'étendre un morphisme continu défini d'un groupe métrique invariant (X, d) dans un groupe topologique Y, à un morphisme continu de monoïdes défini de $(W^1_+(X), \oplus, \rho)$ dans Y.

Théorème 13. *Soit $(X, \cdot, d)$ un groupe métrique invariant complet ayant e comme élément neutre. Alors, l'application,*

$$\arg\min : (W^1_+(X), \oplus, \rho) \longrightarrow (X, \cdot, d)$$

est un morphisme de monoïde continu et surjectif. En conséquence, on a que

$$\forall (f, g) \in W^1_+(X); \quad \arg\min(f \oplus g) = \arg\min(f) \cdot \arg\min(g).$$

On a aussi le diagramme commutatif suivant, où I est l'application identité sur X

$$\begin{tikzcd} (X, \cdot) \arrow[r, "\gamma_X"] \arrow[dr, "I"'] & (W^1_+(X), \oplus) \arrow[d, "\arg\min"] \\ & (X, \cdot) \end{tikzcd}$$

Soit $(X, \cdot, d)$ et $(Y, \cdot, d')$ deux groupes métriques invariants complets et $h : (X, \cdot, d) \longrightarrow (Y, \cdot, d')$ un morphisme continu de groupes. Considérons l'application $\Phi : f \mapsto f \circ h$ pour tout $f \in (W^1_+(Y), \oplus, \rho)$. Remarquons que $f \circ h \notin W^1_+(X)$ en général si h n'est pas 1-lipschitzienne. Remarquons aussi que Φ n'est pas un morphisme de monoïdes en général si h n'est pas surjectif. Cependant, en utilisant le Théorème 13 on obtient les conséquences suivantes.

Corollaire 11. *Soit $(X, \cdot, d)$ et $(Y, \cdot, d')$ deux groupes métriques invariants complets. Alors, on a l'équivalence entre*

(1) *il existe un morphisme de groupes continu $h : (X, \cdot, d) \longrightarrow (Y, \cdot, d')$,*

(2) *il existe un morphisme de monoïdes continu $H : (W^1_+(X), \oplus, \rho) \longrightarrow (W^1_+(Y), \oplus, \rho)$.*

Proposition 14. *Soit $(X, ., d)$ un groupe métrique invariant complet et $(Y, *, \tau)$ un groupe topologique. Alors, on a*

(1) *si $\Phi : (W^1_+(X), \oplus, \rho) \longrightarrow (Y, *, \tau)$ est un morphisme de monoïdes continu, alors l'application $\Phi \circ \gamma_X : (X, ., d) \longrightarrow (Y, *, \tau)$ est un morphisme de groupes continu.*

(2) *si $\chi : (X, ., d) \longrightarrow (Y, *, \tau)$ est un morphisme de groupes continu, alors on a que $\chi \circ \arg\min : (W^1_+(X), \oplus, \rho) \longrightarrow (Y, *, \tau)$ est un morphisme de monoïdes continu.*

Chapitre 4

Isometries et Théorème de Banach-Stone.

Le problème connu sous le nom du théorème de Banach-Stone, trouve sa source dans le livre de Banach (1932) *Théorie des Opérations Linéaires*. Dans ce livre, Banach a considéré le problème où deux espaces $C(K)$ sont isométriques. Il répond au problème lorsque K est un métrique compact et donne une description complète des isométries dans ce cas. En 1937, Stone a étendu le résultat de Banach aux cas des compact topologiques quelconques.

Théorème 14. *(Banach 1932 et Stone 1937) Soit K et L deux espaces compacts. Alors, $C(K)$ est isométriquement isomorphe à $C(L)$ si et seulement si, K et L sont homéomorphe. Soit $T : C(K) \to C(L)$ un isomorphisme. Alors* (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(1) *T est isométrique pour $\|.\|_\infty$.*

(2) *il existe un homéomorphisme $\pi : L \to K$ et une fonction continue $\epsilon : L \to \{\pm 1\}$ tel que, pour tout $k \in K$ et pour tout $\varphi \in C(K)$, on a $T\varphi(k) = \epsilon(k)\varphi \circ \pi(k)$.*

Le théorème de Banach-Stone a été étendu par plusieurs auteurs. Il existe une littérature abondante à ce sujet. La liste des contributions est très longue, ainsi on renvoie à l'article de M. Garrido et J. Jaramillo [40] pour un historique des contributions et une liste de références plus complète.

Dans ce chapitre, il est question de présenter quelques contributions récentes concernant des extensions de théorème de Banach-Stone. Ainsi, les généralisations obtenues dans [12],[8], [9] et [11] traitent, comme il a été mentionné dans l'introduction, les directions suivantes :

- un cadre abstrait pour la structure d'espace de Banach qui englobe plusieurs espaces classiques
- pour des espaces métriques complets non nécessairement compacts.
- des isométries partielles qui ne sont pas nécessairement des isométries et aussi pour des opérateurs non nécessairement linéaires et à valeurs vectorielles
- des structures de monoïde en utilisant l'inf-convolution,
- des isométries d'espaces produits.

4.1 Axiomes et Exemples.

Dans cette section, seront présentés les axiomes généraux qui permettront d'étendre le théorème de Banach-Stone.

Soit (X, d) un espace métrique complet et $(A, \|.\|)$ un espace de Banach inclus dans $C_b(X)$. Par A^* on note le dual topologique de A. Par δ on note l'application de Dirac et par δ_x la masse de Dirac associée au point $x \in X$:

$$\begin{array}{rcl} \delta : X & \to & A^* \\ x & \mapsto & [\delta_x : \varphi \mapsto \varphi(x)]\,. \end{array}$$

Supposons que X et Y sont des espaces métriques complets, $A \subset C_b(X)$ et $B \subset C_b(Y)$ des espaces de Banach, $T : A \to B$ un isomorphisme et T^* son adjoint. Dans le but de prouver le théorème de Banach-Stone, il est classique de trouver un homéomorphisme h qui associe l'ensemble des masses de Dirac $\delta(X)$ à l'ensemble des masses de Dirac $\delta(Y)$:

$$\begin{tikzcd} \delta(Y) \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[d, hook, "i"] & \delta(X) \arrow[d, hook, "i"] \\ B^* \arrow[r, "T^*"'] & A^* \end{tikzcd}$$

Dans le cas compact, (c'est-à-dire lorsque $X = K$ et $Y = L$ sont compacts) et lorsque T est isométrique, l'idée classique de faire correspondre $\delta(X)$ à $\delta(Y)$ consiste en le fait que l'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée du dual de $C(K)^*$ est exactement $\pm\delta(K) := \{\pm\delta_k : k \in K\}$ (c'est le théorème de Arens-Kelley (1947), voir [Theorem 4, [40]]) et le fait qu'une isométrie (ici c'est T^*) envoie nécessairement les points extrémaux sur les points extrémaux. Malheureusement, le théorème de Arens-Kelley est faux si X n'est pas compact ou si A est une classe abstraite d'espaces de fonctions. En effet, d'une part l'ensemble des points extrémaux de la boule unité du dual de $(C_b(X))^*$ est $\pm\delta(\beta X)$ (où βX est le compactifié de Stone-Cech de X) qui contient strictement l'ensemble $\pm\delta(X)$ lorsque X n'est pas compact. D'autre part, on ne connaît pas explicitement les points extrémaux de la boule unité du dual de A dans le cas abstrait. Ainsi, on est amené à chercher un autre moyen d'identifier les masses de Dirac dans la boule unité fermée du dual A^*. L'idée proposée ici, est de les identifier comme dérivées de la norme-sup $\|.\|_\infty$ ou plus généralement comme dérivées d'une fonction conjuguée $f^\times : A \longrightarrow \mathbb{R}$ d'une fonction semi-continue inférieurement f définie sur X :

$$f^\times(\varphi) := \sup_{x\in X}\{\varphi(x) - f(x)\}, \ \ \forall \varphi \in A.$$

Cette dualité a été introduite dans [14] et deux théorèmes importants qui ont été utilisés pour étendre le théorème de Banach-Stone sont [14, Theorem 2.8.] et [14, Theorem 2.2.] ainsi que le principe variationnel de Deville-Godefroy-Zizler.

Définition 8. (La propriété P^β) *Soit (X, d) un espace métrique complet et $(A, \|.\|)$ un espace de Banach inclus dans $C_b(X)$. On dit que A a la propriété P^F (resp. P^G) si* *et seulement si, pour toute suite* $(x_n)_n \subset X$*, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la suite* $(x_n)_n$ *converge dans* (X, d)*,*

(ii) *la suite des masses de Dirac associées* $(\delta_{x_n})_n$ *converge dans* $(A^*, \|.\|^*)$ *(resp. dans* $(A^*, faible^*)$*). où* $\|.\|^*$ *désigne la norme dual et* $faible^*$ *la topologie pré-faible.*

Pour plus de détails sur cette propriété, on renvoie à [14]. Dans ce chapitre on prendra $\beta = G$ ou $\beta = F$. La définition précédente admet une formulation équivalente grace a la proposition suivante.

Proposition 15. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* $(A, \|.\|)$ *un espace de Banach inclus dans* $C_b(X)$ *qui sépare les points de* X*. Alors,*

(1) *l'espace* A *a la propriété* P^F *si et seulement si l'application*

$$\begin{array}{rcl} \delta : (X, d) & \to & (\delta(X), \|.\|^*) \\ x & \mapsto & \delta_x \end{array}$$

est un homéomorphisme.

(2) *l'espace* A *a la propriété* P^G *si et seulement si l'application*

$$\begin{array}{rcl} \delta : (X, d) & \to & (\delta(X), w^*) \\ x & \mapsto & \delta_x \end{array}$$

est un homéomorphisme séquentiel.

On donne maintenant les axiomes que doit satisfaire un espace de fonctions A. Ces axiomes seront satisfaits par plusieurs espaces classsiques. On donnera des exemples. Notons ici, que les axiomes (A_1) and (A_3) sont reliés au principe variationnel de Deville-Godefroy-Zizler [36] et Deville-Revalski [38] et l'axiome (A_4^β) a été introduit et étudié dans [14] et fait partie des hypothèses du [14, Theorem 2.8].

Axiomes 1. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* A *une classe d'espaces de fonctions inclus dans* $C_b(X)$*. On dit que* A *satisfait les axiomes* (A_1)*-*(A_4^β) *si* A *satisfait :*

(A_1) $(A, \|.\|)$ *est un espace de Banach tel que* $\|.\| \geq \|.\|_\infty$*.*

(A_2) A *contient les constantes.*

(A_3) *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, il existe une constante positive* M_n *tel que pour tout* $x \in X$ *il existe une fonction* $h_n : X \to [0, 1]$ *tel que* $h_n \in A$*,* $\|h_n\| \leq M_n$*,* $h_n(x) = 1$ *et* $\operatorname{diam}(supp(h_n)) < \frac{1}{n}$*. Cet axiome entraîne en particulier que* A *sépare les points de* X*.*

(A_4^β) A *a la propriété* P^β *(pour* $\beta = F$ *ou* $\beta = G$*).*

Voici quelques exemples d'espaces classiques qui satisfont ces axiomes.

Proposition 16. *On a :*

(1) *Pour tout espace métrique complet* X*, les espaces* $C_b(X)$*,* $C_b^u(X)$ *satisfont les axiomes* (A_1)*-*(A_4^G) *et l'espace* $Lip_b^\alpha(X)$ *(*$0 < \alpha \leq 1$*) satisfait les axiomes* (A_1)*-*(A_4^F)

(2) *Si* X *est un espace de Banach possédant une fonction bosse (une fonction avec un support non vide bornée) dans* $A = C_b^k(X)$ *avec* $k \in \mathbb{N}^*$ *(resp. dans* $A = C_b^{1,\alpha}(X)$ *avec* $0 < \alpha \leq 1$ *ou* $A = C_b^{1,u}(X)$*), alors* A *satisfait les axiomes* (A_1)*-*(A_4^F)*.*

Notons que l'existence d'une fonction bosse dans $C_b(X)$, $C_b^u(X)$ ou dans $Lip_b^\alpha(X)$ avec $0 < \alpha \leq 1$ est toujours vraie (en utilisant la distance d sur X). Ce n'est pas toujours le cas lorsque X est un espace de Banach, pour les espaces de fonctions différentiables tel que $A = C_b^k(X)$ ($k \in \mathbb{N}^*$) ou $C_b^{1,\alpha}(X)$ ($0 < \alpha \leq 1$) ou $C_b^{1,u}(X)$. Dans ces dernier exemples, l'existence d'une fonction bosse est liée à la géoméétrie de l'espace de Banach X. Pour plus d'informations et de détails, on renvoie au livre de R. Deville, G. Godefroy et V. Zizler [37].

4.2 Extension du Théorème Classique de Banach-Stone.

Ce chapitre est basé sur les travaux décrits dans [12],[8], [9] et [11]. Le théorème suivant qui est une extension du théorème de Banach-Stone a plusieurs autres applications qu'on traitera dans les sous sections qui suivent.

Théorème 15. *Soit X et Y deux espaces métriques complets et $A \subset C_b(X)$, $B \subset C_b(Y)$ deux espaces satisfaisant les axiomes (A_1)-(A_4^β) avec le même β. Soit $T : A \to B$ un isomorphisme, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions propres semi-continues inférieurement et bornées inférieurement. Alors,* (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(1) *Pour tout $\varphi \in A$, on a*

$$\sup_{y \in Y} \{|T\varphi(y)| - g(y)\} = \sup_{x \in X} \{|\varphi(x)| - f(x)\}.$$

(2) *il existe un homéomorphisme $\pi : \overline{\mathrm{dom}(g)} \to \overline{\mathrm{dom}(f)}$ et une fonction continue $\varepsilon : \overline{\mathrm{dom}(g)} \to \{\pm 1\}$ tel que, pour tout $y \in \overline{\mathrm{dom}(g)}$ et tout $\varphi \in A$ on a*

$$T\varphi(y) = \varepsilon(y)\varphi \circ \pi(y)$$

et

$$g(y) = f \circ \pi(y).$$

On obtient immédiatement l'extension suivante du théorème de Banach-Stone dans le cas métrique complet, lorsqu'on prend $f \equiv 0$ sur X et $g \equiv 0$ sur Y. Mais le cas général a ses intérêts comme nous le verrons dans les sections qui suivent.

Corollaire 12. *Soit X et Y deux espaces métriques complets. Alors, $C_b(X)$ est isométriquement isomorphe à $C_b(Y)$ si et seulement si, X et Y sont homéomorphes. Plus généralement, pour $A \subset C_b(X)$ et $B \subset C_b(Y)$ satisfaisant (A_1)-(A_4^β) avec le même β et $T : A \to B$ un isomorphisme, on a l'équivalence suivante :*

(1) *T est isométrique pour la norme $\|.\|_\infty$.*

(2) *il existe un homéomorphisme $\pi : Y \to X$ et une fonction continue $\varepsilon : Y \to \{\pm 1\}$ tel que, pour tout $y \in Y$ et tout $\varphi \in A$, on a $T\varphi(y) = \varepsilon(y)\varphi \circ \pi(y)$.*

4.2.1 Isométries Partielles.

Soit X et Y deux espaces métriques complets et $A \subset C_b(X)$ et $B \subset C_b(Y)$ deux espaces de Banach. Soit $T : A \to B$ un isomorphisme. On dit que T est une isométrie partielle (pour la norme $\|.\|_\infty$) s'il existe un sous-ensemble non vide E de X et un sous-ensemble non vide F de Y tel que $\sup_{y \in F} |T\varphi(y)| = \sup_{x \in E} |\varphi(x)|$ pour tout $\varphi \in A$. Il existe des exemples où un isomorphisme est une isométrie partielle sans être pour autant une isométrie. En effet, soit $K \subset X$ et $L \subset Y$ deux compacts non homéomorphes tels que $C(K)$ et $C(L)$ soit isomorphes et soit $T_1 : C(K) \to C(L)$ un isomorphisme (T_1 ne peut pas être isométriques par le théorème classique de Banach-Stone). Notons que A. A. Milutin a prouvé dans [59] que si K et L sont des ensembles compacts métriques non dénombrables, alors $C(K)$ et $C(L)$ sont toujours isomorphes. Soit $E \subset X$ et $F \subset Y$ deux sous-ensembles fermés homéomorphes tels que $E \cap K = \emptyset$ et $F \cap L = \emptyset$ et soit $\pi : F \to E$ un homéomorphisme. Considérons l'application $T : C_b(K \cup E) \to C_b(L \cup F)$ définie par $T(\varphi)(y) = T_1(\varphi_{|K})(y)$ si $y \in L$ et $T(\varphi)(y) = \varphi \circ \pi(y)$ si $y \in F$ pour tout $\varphi \in C_b(K \cup E)$. Ici, $\varphi_{|K}$ désigne la restriction de φ à K. L'application T est un isomorphisme non isométrique satisfaisant $\sup_{y\in F} |T\varphi(y)| = \sup_{x\in E} |\varphi(x)|$ pour tout $\varphi \in C_b(K \cup E)$.

Une deuxième extension du théorème de Banach-Stone dans le cadre métrique complet qui découle du Théorème 15 est le corollaire suivant.

Corollaire 13. *Soit X et Y deux espaces métriques complets. Soit $A \subset C_b(X)$ et $B \subset C_b(Y)$ deux espaces de Banach satisfaisant les axiomes (A_1)-(A_4^{β}) (avec le même β). Soit E un sous-ensemble non vide fermé de X et F un sous-ensemble non vide fermé de Y. Soit $T : A \to B$ un isomorphisme. Alors,*

$$\sup_{y\in F} |T\varphi(y)| = \sup_{x\in E} |\varphi(x)|$$

pour tout $\varphi \in A$ si et seulement si, il existe un homéomorphisme $\pi : F \to E$ et une application continue $\varepsilon : F \to \{\pm 1\}$ tel que pour tout $y \in F$ et tout $\varphi \in A$ on a $T\varphi(y) = \varepsilon(y)\varphi \circ \pi(y)$.

Ce corollaire s'obtient en prenant dans le Théorème 15, $f = i_E$ et $g = i_F$, les fonctions indicatrices de E et F respectivement qui valent 0 sur ces ensembles et $+\infty$ sinon.

4.2.2 Groupes et Isométries.

Soit X un espace métrique complet et E un sous-ensemble non vide fermé de X. Par $(IS(C_b(X)), \circ)$ on note le groupe (pour la loi $\circ$ de composition des applications) de tout isomorphisme de $C_b(X)$ dans lui même. On définit les ensembles suivants

$$Isom_E(C_b(X)) := \left\{ T \in IS(C_b(X)) : \sup_{y\in E} |T\varphi(y)| = \sup_{x\in E} |\varphi(x)|, \forall \varphi \in C_b(X) \right\}.$$

$$Isom(C_b(E)) := \{S : C_b(E) \to C_b(E) : S \text{ isomorphisme isométrique}\}.$$

On définit l'application restriction $R_E : C_b(X) \to C_b(E)$ par $R_E : \varphi \mapsto \varphi_{|E}$ où $\varphi_{|E}$ désigne la restriction de $\varphi \in C_b(X)$ à E. Par N_E on note le sous-ensemble de $IS(C_b(X))$ défini par

$$\begin{aligned} N_E &:= \{T \in IS(C_b(X)) : R_E \circ T = R_E\} \\ &= \left\{T \in IS(C_b(X)) : (T\varphi)_{|E} = \varphi_{|E},\ \ \varphi \in C_b(X)\right\}. \end{aligned}$$

Clairement, $Isom_E(C_b(X))$ et $Isom(C_b(E))$ sont des groupes et N_E est un sous-groupe de $Isom_E(C_b(X))$. Le but du résultat qui suit est de donner une relation entre ces trois groupes.

Théorème 16. *Soit X un espace métrique complet et E un sous-ensemble non vide fermé de X. Alors, N_E est un sous groupe distingué de $Isom_E(C_b(X))$ et le groupe quotient $Isom_E(C_b(X))/N_E$ est isomorphe à un sous-groupe de $Isom(C_b(E))$. Si de plus, on suppose que $X \setminus E$ est aussi fermé (dans ce cas X est non connexe), alors on a*

$$Isom_E(C_b(X))/N_E \cong Isom(C_b(E)).$$

4.2.3 Opérateurs entre deux Produits d'Espaces de Fonctions.

Cette section concerne la représentation de certains opérateurs entre des produits d'espaces de fonctions.

Soit X, Y deux espaces métriques complets et Z, W deux espaces de Banach. Par $C_b(X,Z)$ on désigne l'espace des fonctions continues bornées à valeurs dans Z. Lorsque $Z = \mathbb{R}$, on utilise la notation $C_b(X)$ au lieu de $C_b(X,\mathbb{R})$. On défini la norme $\|.\|_{\infty,1}$ sur $C_b(X) \times C_b(X,Z)$ par

$$\|(\varphi,\psi)\|_{\infty,1} := \sup_{x\in X} \{|\varphi(x)| + \|\psi(x)\|_Z\}$$

pour tout $(\varphi,\psi) \in C_b(X) \times C_b(X,Z)$. Soit $A \subset C_b(X)$ et $B \subset C_b(Y)$ deux sous-espaces de Banach et $A' \subset C_b(X,Z)$, $B' \subset C_b(Y,W)$ des sous-ensembles non vides. Soit H un opérateur

$$\begin{array}{rcl} H : A \times A' & \to & B \times B' \\ (\varphi,\psi) & \mapsto & (H_1(\varphi,\psi), H_2(\varphi,\psi)) \end{array}$$

où H_1 et H_2 désignent respectivement la première et la seconde fonction composante de H.

Définition 9. *On dit que l'opérateur H satisfait la propriété (P) si*

(a) pour tout $(\varphi,\psi) \in A \times A'$ on a $H_2(\varphi,\psi) = H_2(0,\psi)$ (H_2 dépend seulement de la seconde variable).

(b) pour tout $\psi \in A'$, l'application $\varphi \mapsto H_1(\varphi,\psi)$ est un isomorphisme de A sur B.

Exemple 4. (1) *Supposons que X et Y sont des espaces métriques complets homéomorphes et $\mathcal{H}_{0,0}(Y,X)$ l'ensemble de tous les homéomorphismes de Y sur X. Soit $\lambda : C_b(X) \to \mathcal{H}_{0,0}(Y,X)$ une application quelconque. Soit $A = A' = C_b(X)$ et $B = B' = C_b(Y)$. On défini H par*

$$H(\varphi,\psi) = (\varphi \circ \lambda(\psi), \psi \circ \lambda(\psi)).$$

Alors, H n'est pas linéaire mais satisfait la propriété (P). Notons que dans ce cas, H satisfait aussi $\|H(\varphi,\psi)\|_{\infty,1} = \|(\varphi,\psi)\|_{\infty,1}$ pour tout $(\varphi,\psi) \in A \times A'$. Par exemple, on peut poser $\lambda : \psi \mapsto e^{\|\psi\|_\infty}\pi$, pour un homéomorphisme fixé π de Y sur X (lorsque X et Y sont des espaces de Banach).

(2) *Soit $T : A \to B$ un isomorphisme et $S : A' \to B'$ une application. Alors, l'opérateur $H := (T,S)$ défini par $H(\varphi,\psi) = (T\varphi, S\psi)$ pour tout $(\varphi,\psi) \in A \times A'$ satisfait la propriété (P).*

On s'interesse maintenant aux opérateurs (non nécessairement linéaires) satisfaisant la propriété (P) et préservant la norme $\|.\|_{\infty,1}$. Le théorème suivant donne une représentation canonique de ces opérateurs. Notons qu'un opérateur non linéaire H qui satisfait $\|H(\varphi,\psi)\|_{\infty,1} = \|(\varphi,\psi)\|_{\infty,1}$, pour tout $(\varphi,\psi) \in A \times A'$, n'est pas une isométrie en général.

Théorème 17. *Soit X et Y deux espaces métriques complets et Z, W deux espaces de Banach. Soit $A \subset C_b(X)$ et $B \subset C_b(Y)$ deux espaces de Banach qui satisfont les axiomes (A_1)-(A_4^β) (avec le même β) et soit $A' \subset C_b(X,Z)$ et $B' \subset C_b(Y,W)$ deux ensembles non vides. Soit $H : A \times A' \to B \times B'$ une application satisfaisant la propriété (P). Alors, (1) $\Leftrightarrow$ (2), où*

(1) *pour tout $(\varphi,\psi) \in A \times A'$ on a $\|H(\varphi,\psi)\|_{\infty,1} = \|(\varphi,\psi)\|_{\infty,1}$.*

(2) *pour tout $\psi \in A'$, il existe un homéomorphisme $\pi_\psi : Y \to X$, une fonction continue $\varepsilon_\psi : Y \to \{\pm 1\}$ tel que pour tout $(\varphi,\psi) \in A \times A'$ et tout $y \in Y$,*

$$H_1(\varphi,\psi)(y) = \varepsilon_\psi(y)\varphi \circ \pi_\psi(y),$$

et

$$\|H_2(\varphi,\psi)(y)\|_W := \|H_2(0,\psi)(y)\|_W = \|\psi \circ \pi_\psi(y)\|_Z.$$

Pour le cas où H est linéaire et isométrique pour la norme $\|.\|_{\infty,1}$ et satisfait (P), on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 14. *Soit X et Y deux espaces métriques complets et Z, W deux espaces de Banach. Soit $A \subset C_b(X)$ et $B \subset C_b(Y)$ des espaces satisfaisant les axiomes (A_1)-(A_4^β) (avec le même β) et soit $A' \subset C_b(X,Z)$ un sous-espaces linéaire contenant les constantes et $B' \subset C_b(Y,W)$ un sous-espace linéaire quelconque. Soit $H : A \times A' \to B \times B'$ un opérateur satisfaisant (P). Alors, (1) $\Leftrightarrow$ (2), où*

(1) *L'application H est linéaire et isométrique pour la norme $\|.\|_{\infty,1}$.*

(2) *Il existe un homéomorphisme $\pi : Y \to X$, une fonction continue $\varepsilon : Y \to \{\pm 1\}$ et une application linéaire et isométrique $U_y : Z \to W$ pour chaque $y \in Y$ tel que pour chaque $z \in Z$ l'application $y \mapsto U_y(z)$ est continue de Y dans W et pour tout $(\varphi,\psi) \in A \times A'$ et pour tout $y \in Y$, on a*

$$H_1(\varphi,\psi)(y) = H_1(\varphi,0)(y) = \varepsilon(y)\varphi \circ \pi(y)$$

et

$$H_2(\varphi,\psi)(y) := H_2(0,\psi)(y) = U_y(\psi \circ \pi(y)).$$

Si de plus, on suppose que H est surjective et B' contient les constantes, alors U_y est aussi surjective.

4.3 Le Théorème de Banach-Stone pour la Structure de l'Inf-Convolution.

Dans cette section (basée sur les articles [7], [8], [9]), il est question de donner des théorèmes du type Banach-Stone pour la structure de l'inf-convolution. On a vu dans le chapitre 3 que pour un groupe métrique invariant (X, d), l'ensemble $(Lip^1_+(X), \oplus, \rho)$ est un monoïde complet ayant $(\overline{X}, \overline{d})$ comme groupe des inversibles à isomorphisme isométrique près.

La représentation des isométries entre des espaces de Banach de fonctions lipschitziennes définies sur un espace métrique et munis de leur normes naturelles, a été considérée par plusieurs auteurs [40], [72], [46]. En général, de telles isométries sont données (sous certaines conditions) canoniquement comme compositions d'opérateurs. Un autre résultat de type Banach-Stone pour la structure de l'ordre a été donné dans [41].

Le théorème qui suit, donne une représentation complète des isométries de monoïdes entre $Lip^1_+(X)$ et $Lip^1_+(Y)$ dans le cadre des groupes métriques invariants.

Théorème 18. *Soit (X, d) et (Y, d') deux groupes métriques invariants. Soit Φ une application de $(Lip^1_+(X), \oplus, \rho)$ dans $(Lip^1_+(Y), \oplus, \rho)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Φ est un isomorphisme isométrique de monoïdes*

(2) *il existe un isomorphisme isométrique de groupes $T : (\overline{X}, \overline{d}) \longrightarrow (\overline{Y}, \overline{d'})$ tel que $\Phi(f) = (\overline{f} \circ T^{-1})_{|Y}$ pour tout $f \in Lip^1_+(X)$, où $\overline{f}$ désigne l'unique extension 1-lipschitzienne de f à $\overline{X}$ et $(\overline{f} \circ T^{-1})_{|Y}$ désigne la restriction de $\overline{f} \circ T^{-1}$ à Y.*

La preuve de ce théorème repose sur quelques lemmes (voir [9]) et la caractérisation (voir Section 3.4 du chapitre 3) de l'ensemble des éléments inversibles de $(Lip^1_+(X), \oplus, \rho)$.

Si M (resp. G) est un monoïde métrique (resp. un groupe métrique), par $Is_m(M)$ (resp. $Is_g(G)$) on désigne le groupe de tous les automorphismes isométriques du monoïde M (resp. de tous les automorphismes isométriques du groupe G). Le symbole "$\simeq$" désigne "*isomorphe comme groupe*". Une conséquence immédiate du Théorème 18 est le corollaire suivant.

Corollaire 15. *Soit (X, d) un groupe métrique invariant. Alors,*

$$Is_m(Lip^1_+(X)) \simeq Is_g(\overline{X}).$$

On obtient aussi le corollaire suivant concernant le monoïde $(W^1_+(X), \oplus)$, lorsque (X, d) est un groupe métrique invariant complet.

Corollaire 16. *Soit $(X, ., d)$ et $(Y, ., d')$ deux groupes métriques invariants complets. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *les monoïdes $(W^1_+(X), \oplus, \rho)$ et $(W^1_+(Y), \oplus, \rho)$ sont isométriquement isomorphes*

(2) *les groupes $(X, \cdot, d)$ and $(Y, \cdot, d')$ sont isométriquement isomorphes.*

De plus, pour tout isomorphisme isométrique $\Phi : (W^1_+(X), \oplus, \rho) \longrightarrow (W^1_+(Y), \oplus, \rho)$, il existe un isomorphisme isométrique $T : X \longrightarrow Y$ tel que $\Phi(f) = f \circ T^{-1}$ pour tout $f \in W^1_+(X)$.

4.4 Isométries entre Espaces de Type $X \times \mathbb{R}$.

Étant donnés deux espaces vectoriels normés X et Y, on cherche des hypothèses assez générales sur les normes, pour que l'existence d'un isomorphisme isométrique entre $X \times \mathbb{R}$ et $Y \times \mathbb{R}$ soit équivalente à l'existence d'un isomorphisme isométrique entre X et Y. On commence par donner des contre-exemples génériques montrant que c'est faux dans le cas général.

Proposition 17. *Soit $X = Y = \mathbb{R}^2$. Pour chaque norme $\|.\|_X$ sur X il existe une norme $\|.\|_Y$ sur Y, une norme $\|.\|_{X\times\mathbb{R}}$ sur $X \times \mathbb{R}$ et une norme $\|.\|_{Y\times\mathbb{R}}$ sur $Y \times \mathbb{R}$ tel que :*

(1) *$(X, \|.\|_X)$ n'est pas isométriquement isomorphe à $(Y, \|.\|_Y)$.*

(2) *$(X \times \mathbb{R}, \|.\|_{X\times\mathbb{R}})$ est isométriquement isomorphe à $(Y \times \mathbb{R}, \|.\|_{Y\times\mathbb{R}})$.*

(3) *$\|.\|_{X\times\mathbb{R}}$ coïncide avec $\|.\|_X$ sur $X \times \{0\}$ et $\|.\|_{Y\times\mathbb{R}}$ coïncide avec $\|.\|_Y$ sur $Y \times \{0\}$.*

Dans le cas de la dimension infinie on a aussi la proposition suivante.

Proposition 18. *Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace vectoriel normé lisse (la norme $\|.\|_X$ est Gâteaux-différentiable en dehors de 0). Alors, il existe une autre norme $\|.\|$ sur X et deux normes N_1 et N_2 sur $X \times \mathbb{R}$ tel que :*

(1) *$(X, \|.\|_X)$ n'est pas isométriquement isomorphe à $(X, \|.\|)$.*

(2) *$(X \times \mathbb{R}, N_1)$ est isométriquement isomorphe à $(X \times \mathbb{R}, N_2)$.*

(3) *N_1 coïncide sur $X \times \{0\}$ avec $\|.\|_X$ et N_2 coïncide sur $X \times \{0\}$ avec $\|.\|$.*

Pour obtenir une réponse positive à notre problème, on introduit la propriété suivante.

Définition 10. *Soit $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espace vectoriel normés. Soit $\|.\|_{X\times\mathbb{R}}$ et $\|.\|_{Y\times\mathbb{R}}$ deux normes définie sur $X \times \mathbb{R}$ et $Y \times \mathbb{R}$ respectivement. On dit que la paire des normes $(\|.\|_{X\times\mathbb{R}}, \|.\|_{Y\times\mathbb{R}})$ satisfait la propriété (K) si et seulement si,*

(i) $\|(x,t)\|_{X\times\mathbb{R}} \geq \|(x,0)\|_{X\times\mathbb{R}} = \|x\|_X$ pour tout $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ et $\|(y,t)\|_{Y\times\mathbb{R}} \geq \|(y,0)\|_{Y\times\mathbb{R}} = \|y\|_Y$ pour tout $(y,t) \in Y \times \mathbb{R}$.

(ii) pour tout $x \in X$ et $y \in Y$:

$$\|x\|_X = \|y\|_Y \Rightarrow \|(x,\lambda)\|_{X\times\mathbb{R}} = \|(y,\lambda)\|_{Y\times\mathbb{R}}, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

(iii) Soit $(a,u) \in X \times \mathbb{R}$ et $(b,v) \in Y \times \mathbb{R}$ tel que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Si pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\|\alpha(0,1) + \beta(a,u)\|_{X\times\mathbb{R}} = \|\beta(0,1) + \alpha(b,v)\|_{Y\times\mathbb{R}}$ alors $u = v = 0$.

On on a alors le théorème suivant.

Théorème 19. *Soit $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. Supposons que $(\|.\|_{X\times\mathbb{R}}, \|.\|_{Y\times\mathbb{R}})$ satisfait (K). Alors, $(X \times \mathbb{R}, \|.\|_{X\times\mathbb{R}})$ et $(Y \times \mathbb{R}, \|.\|_{Y\times\mathbb{R}})$ sont isométriquement isomorphes si et seulement si, $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ sont isométriquement isomorphes.*

Exemple 5. *Soit* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces vectoriels normés.*
Soit $p \in [1, +\infty[\setminus \{2\}$ *; on définit les normes* l_p^2 *comme suit :*

$$\|(x,t)\|_{X\times\mathbb{R}} := (\|x\|_X^p + |t|^p)^{\frac{1}{p}},$$

ou

$$\|(x,t)\|_{X\times\mathbb{R}} := \max(\|x\|_X, |t|),$$

pour tout $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$*. On définit* $\|.\|_{Y\times\mathbb{R}}$ *de manière analogue comme on le fait pour la norme* $\|.\|_{X\times\mathbb{R}}$*. Alors, la paire* $(\|.\|_{X\times\mathbb{R}}, \|.\|_{Y\times\mathbb{R}})$ *satisfait* (K)*.*

Notons que le point (iii) de la propriété (K) est faux pour la norme l_p^2 avec $p = 2$. Cependant, on obtient de la Proposition 19 qui suit, un critère pour avoir la propriété (K) à partir d'une classe générale de normes N sur $\mathbb{R}^2$. Rappelons qu'une norme N sur un espace vectoriel ordonné E est dite absolue si $N(|x|) = N(x)$ pour tout $x \in E$; et dite monotone si $N(x) \leq N(y)$ dès que $0 \leq x \leq y$. Si la norme est à la fois absolue et monotone, elle est appelé une norme de Riesz. Toute norme absolue sur $\mathbb{R}^n$ (muni de l'ordre usuel) est monotone, et est donc une norme de Riesz. On pose maintenant $E = \mathbb{R}^2$ et soit N une norme de Riesz sur $\mathbb{R}^2$. Par $Isom(\mathbb{R}^2, N)$ on désigne le groupe de tous les automorphismes isométriques de $(\mathbb{R}^2, N)$. Soit S_2 le groupe des permutations de $\{1, 2\}$. Pour $\sigma \in S_2$ et $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on désigne par $u_{\sigma,\lambda}$ l'automorphisme de $\mathbb{R}^2$ définit par $u_{\sigma,\lambda} : (t_1, t_2) \mapsto (\lambda_1 t_{\sigma(1)}, \lambda_2 t_{\sigma(2)})$. Par I_2 on note le groupe des automorphismes suivant

$$I_2 := \left\{u_{\sigma,\lambda} / \sigma \in S_2; \lambda \in (\mathbb{R}^*)^2\right\}.$$

Rappelons que le groupe des isométries pour les normes l_p^2 sur $\mathbb{R}^2$ pour $p \in [1, +\infty] \setminus \{2\}$ est exactement l'ensemble $\left\{u_{\sigma,\lambda} / \sigma \in S_2; \lambda \in \{-1, 1\}^2\right\} \subset I_2$.

Proposition 19. *Pour chaque norme de Riesz* N *sur* $\mathbb{R}^2$*, si* $Isom(\mathbb{R}^2, N) \subset I_2$ *alors la paire* $(\|.\|_{X\times\mathbb{R}}, \|.\|_{X\times\mathbb{R}})$ *satisfait* (K)*, où* $\|(x,t)\|_{X\times\mathbb{R}} := cN(\|x\|_X, |t|)$ *pour tout* $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ *et* $\|(y,t)\|_{Y\times\mathbb{R}} := cN(\|y\|_Y, |t|)$ *pour tout* $(y,t) \in Y \times \mathbb{R}$ *avec* $c := \frac{1}{N(1,0)}$*.*

Remarque 4. *En utilisant la jauge de Minkowski d'un convexe fermé symétrique de* $\mathbb{R}^2$*, on peut facilement construire une norme de Riesz satisfaisant les hypothèses de la Proposition 19.*

Chapitre 5

Le Principe de Pontryagin en Dimension Infinie et en Horizon Infini (temps discret).

Ce chapitre est basé sur les travaux effectués dans [15], [16] et [17]. Comme il a été dit dans l'introduction, le principe de Pontryagin a bien été étudié en dimension finie notamment par J. Blot et N. Hayek [22] mais son extension à la dimension infinie nécessite des techniques nouvelles. En effet, deux difficultés majeures apparaissent dans le passage à la dimension infinie dû en particulier aux deux problèmes suivants :

• l'image d'un opérateur linéaire continu n'est pas forcément fermé : Un critère permettant de vérifier que l'image d'un espace de dimension infinie par un opérateur linéaire continu est donné dans le Lemme 3 et démontré dans [15] (voir aussi [24]).

• dans un espace de Banach dual, l'origine appartient toujours à la fermeture faible* de la sphère unité du dual. Ainsi, par le théorème de Josefson-Nissenzweig, il existe toujours une suite dans le dual topologique, de norme un qui converge vers zéro pour la topologie pré-faible. Un critère a été donné dans le Lemme 4 et son application le Corollaire 17, permettant de s'assurer dans certains cas qu'une suite de formes linéaire de norme un ne converge pas pré-faiblement vers zero.

Deux idées pour étendre le principe de Pontryagin à la dimension infini : la première est la réduction à l'horizon fini et à ce niveau, on a besoin que l'image de la différentielle de l'opérateur qui représente les contraintes soit fermée. Dans ce cas on obtient des multiplicateurs de Lagrange non triviaux. Le second point est de savoir si en passant à la limite, les multiplicateurs restent non triviaux. C'est à ce niveaux que nous avons besoin de contourner le phénomène de Josefson-Nissenzweig. Les deux critères donnés dans la section 5.2 permettent de mener à bien ces deux idées.

Nous allons commencer ce chapitre par définir la problématique et préciser nos notations. Ensuite, dans la section 5.2 on donnera les critères mentionnés plus haut. La section 5.3 est dédiée à la méthode de réduction à l'horizon fini où on peut appliquer les théorèmes classiques, pour enfin dans la section 5.4, passer à l'horizon infini.

5.1 Problématique et Notations.

Les problèmes du Contrôle Optimal en horizon infini, sont gouvernés par le système dynamique discret suivant :

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t), \quad t \in \mathbb{N} \tag{5.1}$$

où $x_t \in X_t \subset X$, $u_t \in U_t \subset U$ et $f_t : X_t \times U_t \to X_{t+1}$. Ici X et U sont des espaces de Banach ; X_t est un ouvert non vide de X et U_t est un sous-ensemble non vide de U. Les x_t sont appelés les variables d'état et les u_t les variables du contrôle.

A partir d'un état initial $\sigma \in X_0$, on désigne par $Adm(\sigma)$ l'ensemble des processus $((x_t)_{t\in\mathbb{N}}, (u_t)_{t\in\mathbb{N}}) \in (\prod_{t\in\mathbb{N}} X_t) \times (\prod_{t\in\mathbb{N}} U_t)$ qui satisfont (5.1) pour tout $t \in \mathbb{N}$. Les éléments de $Adm(\sigma)$ sont dites les processus admissibles.

Pour tout $t \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $\phi_t : X_t \times U_t \to \mathbb{R}$ pour définir le critère. Par $\mathrm{dom}(J)$ on note l'ensemble des $((x_t)_{t\in\mathbb{N}}, (u_t)_{t\in\mathbb{N}}) \in (\prod_{t\in\mathbb{N}} X_t) \times (\prod_{t\in\mathbb{N}} U_t)$ telle que la série $\sum_{t=0}^{+\infty} \phi_t(x_t, u_t)$ est convergente dans $\mathbb{R}$. On définit la fonction (non linéaire) $J : \mathrm{dom}(J) \to \mathbb{R}$ par

$$J((x_t)_{t\in\mathbb{N}}, (u_t)_{t\in\mathbb{N}}) := \sum_{t=0}^{+\infty} \phi_t(x_t, u_t). \tag{5.2}$$

On considère maintenant les problème du Contrôle Optimal suivants :

$(\mathbf{P}_1(\sigma))$: Trouver $((\hat{x}_t)_{t\in\mathbb{N}}, (\hat{u}_t)_{t\in\mathbb{N}}) \in \mathrm{dom}(J) \cap Adm(\sigma)$ tel que $J((\hat{x}_t)_{t\in\mathbb{N}}, (\hat{u}_t)_{t\in\mathbb{N}}) \geq J((x_t)_{t\in\mathbb{N}}, (u_t)_{t\in\mathbb{N}})$ pour tout $((x_t)_{t\in\mathbb{N}}, (u_t)_{t\in\mathbb{N}}) \in \mathrm{dom}(J) \cap Adm(\sigma)$.

$(\mathbf{P}_2(\sigma))$: Trouver $((\hat{x}_t)_{t\in\mathbb{N}}, (\hat{u}_t)_{t\in\mathbb{N}}) \in Adm(\sigma)$ tel que
$\limsup_{h\to+\infty} \sum_{t=0}^{h} (\phi_t(\hat{x}_t, \hat{u}_t) - \phi(x_t, u_t)) \geq 0$ pour tout $((x_t)_{t\in\mathbb{N}}, (u_t)_{t\in\mathbb{N}}) \in Adm(\sigma)$.

$(\mathbf{P}_3(\sigma))$: Trouver $((\hat{x}_t)_{t\in\mathbb{N}}, (\hat{u}_t)_{t\in\mathbb{N}}) \in Amd(\sigma)$ tel que
$\liminf_{h\to+\infty} \sum_{t=0}^{h} (\phi_t(\hat{x}_t, \hat{u}_t) - \phi(x_t, u_t)) \geq 0$ pour tout $((x_t)_{t\in\mathbb{N}}, (u_t)_{t\in\mathbb{N}}) \in Adm(\sigma)$.

Ces problèmes sont classiques en théorie macroéconomique ; cf. [55], [22], [76], [67] et les réferences auxquelles ils renvoient.

Problématique. Il est question d'étudier les conditions nécessaires d'optimalité pour ces trois problèmes. La méthode qui sera utilisée est la méthode de *réduction à l'horizon fini* déjà utilisée dans le papier de Blot et Chebbi dans [23] dans le cas discret. Le cas continu avait été traité par Halkin (voir [25], Theorem 2.3, p. 20).

Voici la liste des hypothèses dont on aura besoin.

(H1) X et U sont des espaces de Banach séparables.

(H2) Pour tout $t \in \mathbb{N}$, X_t est un sous-ensemble ouvert de X et U_t est un sous-ensemble convexe non vide de U.

Lorsque $((\hat{x}_t)_{t\in\mathbb{N}}, (\hat{u}_t)_{t\in\mathbb{N}})$ est un processus admissible donné de l'un des problèmes $((\mathbf{P}_i(\sigma)))$, $i \in \{1, 2, 3\}$, on considère les conditions suivantes.

(H3) Pour tout $t \in \mathbb{N}$, ϕ_t est Fréchet-différentiable en $(\hat{x}_t, \hat{u}_t)$ et f_t de classe C^1 en $(\hat{x}_t, \hat{u}_t)$.

(H4) Pour tout $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$,
$D_1 f_t(\hat{x}_t, \hat{u}_t) \circ D_2 f_{t-1}(\hat{x}_{t-1}, \hat{u}_{t-1})(U) + D_2 f_t(\hat{x}_t, \hat{u}_t)(T_{U_t}(\hat{u}_t)) = X$.

(H5) $D_1 f_1(\hat{x}_1, \hat{u}_1) \circ D_2 f_0(\hat{x}_0, \hat{u}_0)(T_{U_0}(\hat{u}_0)) + D_2 f_1(\hat{x}_1, \hat{u}_1)(T_{U_1}(\hat{u}_1)) = X$.

(H6) $ri(T_{U_0}(\hat{u}_0)) \neq \emptyset$ et $ri(T_{U_1}(\hat{u}_1)) \neq \emptyset$.

Dans (H3), puisque U_t n'est pas necessairement un ouvert de $\hat{u}_t$, le sens de cette condition est qu'il existe un voisinage ouvert V_t de $(\hat{x}_t, \hat{u}_t)$ dans $X \times U$ et une fonction Fréchet-différentiable (respectivement de classe C^1) $\tilde{\phi}_t : V_t \to \mathbb{R}$ (respectivement $\tilde{f}_t : V_t \to X$) tel que $\tilde{\phi}_t$ and ϕ_t (respectivement $\tilde{f}_t$ et f_t) coïncident sur $V_t \cap (X_t \times U_t)$. De plus, D_1 et D_2 désignent respectivement la Fréchet-différentielle partielle par rapport à la première variable et par rapport à la deuxième variable. Pour (H4), (H5) et (H6), lorsque A est un sous-ensemble convexe de U, $\hat{u} \in A$, l'ensemble $T_A(\hat{u})$ est la fermeture de $\mathbb{R}_+(A - \hat{u})$; il est appelé le cone tangent (de l'analyse convexe) de A en $\hat{u}$. Pour (H6), si $\mathrm{aff}(T_{U_t}(\hat{u}_t))$ désigne l'enveloppe affine de $T_{U_t}(\hat{u}_t)$, $ri(T_{U_t}(\hat{u}_t))$ désigne son intérieur relatif de $T_{U_t}(\hat{u}_t)$ dans $\mathrm{aff}(T_{U_t}(\hat{u}_t))$. Notons enfin, qu'en dimension finie, l'hypothèse (H6) est toujours satisfaite.

5.2 Outils pour la Dimension Infinie.

Dans cette section, nous allons donner une caractérisation utile de la fermeture de l'image d'un espace de dimension infinie par un opérateur linéaire continu. Nous donnerons ensuite un lemme qui permettra de contourner le phénomène de Josefson-Nissenzweig en dimension infinie.

Lemme 3. *Soit E et F des espaces de Banach, et $L \in \mathfrak{L}(E, F)$ (l'espace des applications linéaires continues). Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *ImL est fermé dans F.*

(ii) *il existe $c \in (0, +\infty)$ tel que pour tout $y \in ImL$, il existe $x_y \in E$ satisfaisant $Lx_y = y$ et $\|y\| \geq c\|x_y\|$.*

Ce résultat a été prouvé dans [15, Lemme 3.4], voir aussi [24, Lemme 2.1.].

Pour un sous-ensemble A de Z, $\mathrm{Aff}(A)$ désigne l'enveloppe affine de A dans Z. L'intérieur relatif de $A \subset Z$, noté $\mathrm{ri}(A)$, est l'intérieur topologique de A dans le sous-espace topologique $\mathrm{Aff}(A)$. Ce lemme est basé sur le théorème de Baire.

Lemme 4. *Soit Z un espace de Banach. Soit K un sous-ensemble non vide convexe fermé de Z et supposons que $\mathrm{ri}(K) \neq \emptyset$. Soit $\mathcal{T}$ un ensemble non vide, $(p_n)_{n \in \mathcal{T}}$ une collection de fonctions sous-additives et semi-continues inférieurement sur Z et $(\lambda_n)_{n \in \mathcal{T}}$ une collection de nombres réels positifs. Supposons que pour tout $z \in K$, il existe $C_z \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathcal{T}$, $p_n(z) \leq C_z \lambda_n$.*
Alors, pour tout $a \in K$, il existe $b_a \in \mathrm{Aff}(K)$ tel que pour tout sous-ensemble borné B de $\overline{\mathrm{Aff}(K)}$ il existe $R_B \geq 0$ tel que

$$\forall n \in \mathcal{T}, \quad \sup_{h \in B} p_n(h - a) \leq R_B \cdot (\lambda_n + p_n(b_a - a)).$$

Ce résultat a été établi dans [16]. De ce lemme on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 17. *Soit Y un espace de Banach ; Y^* son dual topologique. Soit $(\pi_h)_{h\in\mathbb{N}} \in (Y^*)^{\mathbb{N}}$ et $(\rho_h)_{h\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Soit K un sous-ensemble non vide convexe fermé de Y tel que $ri(K) \neq \emptyset$. Soit $a \in K$ et posons $S := \overline{\text{aff}}(K) - a$ qui est un sous-espace de Banach. Supposons les conditions suivantes.*

1. *$\rho_h \to 0$ lorsque $h \to +\infty$.*
2. *$\pi_{h|_S} \overset{faible^*}{\longrightarrow} 0$ dans S^* lorsque $h \to +\infty$.*
3. *Pour tout $y \in K$, il existe $c_y \in \mathbb{R}$ tel que $\pi_h(y) \leq c_y \rho_h$ pour tout $h \in \mathbb{N}$.*

Alors, on a $\|\pi_{h|_S}\|_{S^*} \to 0$ lorsque $h \to +\infty$.

Ainsi, par la contraposée du corollaire précédent, si on suppose que :
(1) $\rho_h + \|\pi_{h|_S}\|_{S^*} = 1$ pour tout $h \in \mathbb{N}$
(2) pour tout $y \in K$, il existe $c_y \in \mathbb{R}$ tel que $\pi_h(y) \leq c_y \rho_h$ pour tout $h \in \mathbb{N}$,

Alors, on a que $(\rho_h, \pi_{h|_S}) \overset{faible^*}{\not\longrightarrow} (0,0)$ dans $S^* \times \mathbb{R}$, et donc le phénomène de Josefson-Nissenzweig est évité.

5.3 Réduction à l'Horizon fini.

Lorsque $((\hat{x}_t)_{t\in\mathbb{N}}, (\hat{u}_t)_{t\in\mathbb{N}})$ est un processus optimal pour l'un des problème $(\mathbf{P}_i(\sigma))$, $i \in \{1,2,3\}$. La méthode de réduction à l'horizon fini consiste en la considération de la suite de problèmes en horizon fini suivants :

$$(\mathbf{F}_h(\sigma)) \left\{ \begin{array}{rl} \text{Maximize} & J_h(x_1,...,x_h,u_0,...,u_h) := \sum_{t=0}^{h} \phi_t(x_t,u_t) \\ \text{when} & (x_t)_{1\leq t\leq h} \in \prod_{t=1}^{h} X_t, (u_t)_{0\leq t\leq h} \in \prod_{t=0}^{h} U_t \\ & \forall t \in \{0,...,h\}, x_{t+1} = f_t(x_t,u_t) \\ & x_0 = \sigma, x_{h+1} = \hat{x}_{t+1} \end{array} \right.$$

La preuve du lemme suivant est donnée dans [23].

Lemme 5. *Lorsque $((\hat{x}_t)_{t\in\mathbb{N}}, (\hat{u}_t)_{t\in\mathbb{N}})$ est un processus optimal pour l'un des problèmes $(\mathbf{P}_i(\sigma))$, $i \in \{1,2,3\}$, alors, pour tout $h \in \mathbb{N}_*$, $(\hat{x}_1,...,\hat{x}_h,\hat{u}_0,...,\hat{u}_h)$ est un processus optimal de $(\mathbf{F}_h(\sigma))$.*

Notons que ce résultat n'a besoin d'aucune hypothèse.

On note $\mathbf{x}^h := (x_1,...,x_h) \in \prod_{t=1}^{h} X_t$, $\mathbf{u}^h := (u_0,...,u_h) \in \prod_{t=0}^{h} U_t$. Pour tout $h \in \mathbb{N}_*$ et pour tout $t \in \mathbb{N}$, on introduit l'application $g_t^h : (\prod_{t=1}^{h} X_t) \times (\prod_{t=0}^{h} U_t) \to X_{t+1}$ en posant

$$g_t^h(\mathbf{x}^h,\mathbf{u}^h) := \left\{ \begin{array}{ll} -x_1 + f_0(\sigma,u_0) & \text{if} \quad t=0 \\ -x_{t+1} + f_t(x_t,u_t) & \text{if} \quad t \in \{1,...,h-1\} \\ -\hat{x}_{h+1} + f_h(x_h,u_h). & \end{array} \right. \tag{5.3}$$

On introduit l'application $g^h : (\prod_{t=1}^{h} X_t) \times (\prod_{t=0}^{h} U_t) \to X^{h+1}$ définie par

$$g^h(\mathbf{x}^h,\mathbf{u}^h) := (g_0^h(\mathbf{x}^h,\mathbf{u}^h),...,g_h^h(\mathbf{x}^h,\mathbf{u}^h)). \tag{5.4}$$

Sous l'hypothèse (H3), g^h est de classe C^1.

Ainsi, le problème devient :

$$\begin{cases} \text{Maximiser} & J^h(\mathbf{x}^h, \mathbf{u}^h) \\ \text{lorsque} & g^h(\mathbf{x}^h, \mathbf{u}^h) = 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

5.4 Extension du Principe de Pontryagin à la Dimension Infinie.

Pour établir notre résultat du Principe de Pontryagin en horizon infini, on a besoin du lemme et la proposition suivantes en horizon fini. Il faut noter que grâce aux outils développés dans les sections précédentes on est en mesure d'établir ces résultats. Ainsi, grâce au Lemme 3, on obtient la garantie que $ImDg^h(\mathbf{x}^h, \mathbf{u}^h)$ est fermée.

Lemme 6. *On suppose que (H3), (H4) et (H5) sont satisfaites, alors $ImDg^h(\mathbf{x}^h, \mathbf{u}^h)$ est fermée.*

On obtient ensuite cette proposition.

Proposition 20. *Soit $(\hat{x}_t)_{t\in\mathbb{N}}, (\hat{u}_t)_{t\in\mathbb{N}})$ une solution optimale pour un des problèmes $(\mathbf{P}_i(\sigma))$, $i \in \{1, 2, 3\}$. On suppose les hypothèses (H1-H6). Posons,*

$$Z_0 := D_2 f_0(\sigma, \hat{u}_0)(T_{U_0}(\hat{u}_0)) \quad \text{and} \quad Z_1 := D_2 f_1(\hat{x}_1, \hat{u}_1)(T_{U_1}(\hat{u}_1)).$$

Alors, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $h \geq 2$, il existe $\lambda_0^h \in \mathbb{R}$ et $(p_{t+1}^h)_{0\leq t\leq h} \in (X^*)^{h+1}$ tel que :

(1) $\lambda_0^h \geq 0$.

(2) $p_t^h = p_{t+1}^h \circ D_1 f_t(\hat{x}_t, \hat{u}_t) + \lambda_0^h D_1 \phi_t(\hat{x}_t, \hat{u}_t)$ *for all* $t \in \mathbb{N}_*$.

(3) $\langle \lambda_0^h D_2 \phi_t(\hat{x}_t, \hat{u}_t) + p_{t+1}^h \circ D_2 f_t(\hat{x}_t, \hat{u}_t), u_t - \hat{u}_t \rangle \leq 0$ *pour tout* $t \in \{0, ..., h\}$, *pour tout* $u_t \in U_t$.

(4) pour tout $t \in \{1, ..., h+1\}$, il existe $a_t, b_t \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $s \in \{1, ..., h\}$, $\|p_t^h\| \leq a_t \lambda_0^h + b_t \|p_s^h\|$.

(5) $(\lambda_0^h, p_{1|Z_0}^h, p_{2|Z_1}^h) \neq (0, 0, 0)$.

(6) Pour tout $z_0 \in Z_0$ et pour tout $z_1 \in Z_1$, il existe $c_{z_0,z_1} \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $h \geq 2$, $p_1^h(z_0) + p_2^h(z_1) \leq c_{z_0,z_1} \lambda_0^h$.

(7) Pour tout $v \in X$ il existe $(z_0, z_1) \in Z_0 \times Z_1$ tel que $p_2^h(v) = p_1^h(z_0) + p_2^h(z_1) - \lambda_0^h D_1 \phi_1(\hat{x}_1, \hat{u}_1)(z_0)$ for all $h \geq 2$.

Grâce à cette proposition et Corollaire 17, nous obtenons maintenant ce Principe de Pontryagin en horizon infini et en dimension infinie.

Théorème 20. *Soit $((\hat{x}_t)_{t\in\mathbb{N}}, (\hat{u}_t)_{t\in\mathbb{N}})$ un un processus optimal pour un des problème $(\mathbf{P}_i(\sigma))$, $i \in \{1, 2, 3\}$. On suppose (H1-H6) ; alors, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et $(p_{t+1})_{t\in\mathbb{N}} \in (X^*)^{\mathbb{N}}$ tels que :*

1. $(\lambda_0, p_1, p_2) \neq (0, 0, 0)$.

2. $\lambda_0 \geq 0$.

3. $p_t = p_{t+1} \circ D_1 f_t(\hat{x}_t, \hat{u}_t) + \lambda_0 D_1 \phi_t(\hat{x}_t, \hat{u}_t)$, *pour tout* $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$.

4. $\langle \lambda_0 D_2 \phi_t(\hat{x}_t, \hat{u}_t) + p_{t+1} \circ D_2 f_t(\hat{x}_t, \hat{u}_t), u_t - \hat{u}_t \rangle \leq 0$, *pour tout* $u_t \in U_t$, *for all* $t \in \mathbb{N}$.

Chapitre 6

Différentiabilité en Dimension Infinie.

Le théorème de Rademacher affirme que toute fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est presque partout différentiable (au sens de Lebesgue) [56]. Il existe dans la littérature plusieurs résultats qui peuvent être vus comme des extensions ou généralisations à la dimension infinie du théorème de Rademacher. Un des premiers résultat en dimension infinie, est dù à Mazur (1933) [53], où il montre que toute fonction convexe continue définie d'un espace de Banach séparable à valeurs réelles est génériquement Gâteaux différentiable. Asplund dans [1], étudie les espaces de Banach sur lesquels toute fonction convexe continue à valeurs réelles est génériquement Fréchet-différentiable. Ces espaces de Banach portent depuis le nom des espaces d'Asplund et se caractérise par le fait que tout sous-espace fermé séparable admet un dual topologique séparable. Un résultat obtenu indépendamment par Aronszajn, Christensen et Mankiewicz dans les années 1970 (voir [26]) affirme que toute fonction localement lipschitzienne d'un espace séparable à valeurs dans un espace qui a la propriété de Radon-Nikodym, est Gâteaux différentiable en dehors d'un ensemble négligeable au sens d'Aronszajn. En 1991, Preiss prouve dans [64] que toute fonction lipschitzienne d'un espace d'Asplund à valeurs réelles est Fréchet-différentiable sur un sous-ensemble dense. Il existe de nombreuses études sur la différentiabilité des fonctions en dimension infinie.

Ce chapitre est basé sur les articles [13], [19] et [18], où il est question d'étudier la différentiabilité des fonctions composées du type $f \circ T$ où f est une fonction convexe continue ou plus généralement localement lipschitzienne et T est un opérateur linéaire continu. Le cas où T est l'opérateur identité revient évidement aux résultats pionniers cités plus haut. Il s'agit dans ce chapitre d'étudier la différentiabilité de $f \circ T$ lorsque T est un opérateur compact ou plus généralement un opérateur limité et d'en tirer des conséquences lorsque l'espace n'est pas nécessairement un espace d'Asplund. Il est aussi question de caractériser les espaces de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym et les espaces de Schur à partir de la différentiabilité de fonctions. On commence ce chapitre par une construction canonique, en dimension infinie, de fonctions convexes lipschitziennes qui sont Gâteaux mais non Fréchet-différentiable en un certain point.

6.1 Une Construction Canonique de Fonctions PGNF en Dimension Infinie.

On sait qu'en dimension finie, la notion de Fréchet-différentiabilité et de Gâteaux-différentiabilité coïncident pour les fonctions localement lipschitzienne. Ce n'est plus le cas en dimension infinie. Une fonction f définie sur un espace de Banach et à valeurs dans $\mathbb{R}$ sera dite une PGNF-fonction (voir [30]), s'il existe un point en lequel f est Gâteaux-différentiable mais non Fréchet-différentiable. Une JN-suite (dû au théorème de Josefson-Nissenzweig, voir Chapitre XII dans [39]) est une suite $(p_n)_n$ dans un espace dual Y^* qui converge vers zéro pour la topologie faible* et telle que $\inf_n \|p_n\| > 0$. Il existe différentes méthodes de construction d'une PGNF-fonction en dimension infinie. On peut trouver une telle construction dans [30].

Une nouvelle méthode de construction d'une PGNF-fonction canoniquement à partir d'une JN-suite (voir aussi [13]) est proposé plus bas. Cette construction est basée sur le lemme 7 et la proposition qui le suit. Si B est un sous-ensemble d'un espace dual Y^*, on notera $\overline{\text{conv}}^{w^*}(B)$ l'enveloppe convexe fermée pour la topologie faible* de B.

Définition 11. *On dit d'une fonction g définie sur X^* qu'elle a un minimum fort (resp. faible*-fort) en un point $p \in X^*$ si $g(p) = \inf_{q \in X^*} g(q)$ et $(p_n)_n \subset X^*$ converge en norme (resp. converge faible*) vers p dès que $g(p_n) \longrightarrow g(p)$.*

Un minimum fort ainsi qu'un minimum faible*-fort est en particulier un minimum unique.

Lemme 7. *Soit X un espace de Banach et K un sous-ensemble de X^*.*

(1) *Supposons que K est séparable. Alors il existe une suite $(x_n)_n$ de la sphère unité S_X de X qui sépare les points de K (c'est-à-dire pour tout $p, p' \in K$, si $\langle p, x_n \rangle = \langle p', x_n \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $p = p'$). En conséquence, si K est un sous-ensemble de X^* séparable pour la norme et faible* compact, alors la topologie faible* de X^* restreinte à K est métrisable.*

(2) *Soit $(p_n)_n$ une suite de X^* qui converge vers zéro pour la topologie faible*. Alors, $\overline{\text{conv}}^{w^*}\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble séparable pour la norme, convexe et faible* compact.*

Proposition 21. *Soit X un espace de Banach et K un sous-ensemble de X^* faible* compact contenant 0. Supposons qu'il existe une suite $(x_n)_n \subset S_X$ qui sépare les points de K (dans ce cas K est faible* métrisable). Alors, la fonction $h : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$h(x^*) = (\sum_{k \geq 0} 2^{-k} (\langle x^*, x_k \rangle)^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x^* \in X^*,$$

possède les propriétés suivantes :

(1) *h est une semi-norme continue sur X^*,*

(2) *h est faible* semi-continue inférieurement et séquentiellement faible* continue,*

(3) *la restriction $h_{|K}$ de h à K a un minimum faible*-fort en 0, avec $\min_K h_{|K} = h(0) = 0$.*

Comment construire une PGNF-fonction ? Soit X un espace de Banach de dimension infinie. Pour une JN-suite donnée $(p_n)_n \subset X^*$, on pose $K = \overline{\text{conv}}^{w^*}\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. En utilisant le Lemme 7, il existe une suite $(x_n)_n \in S_X$ qui sépare les points de K, et par la Proposition 21, la fonction $h : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h(x^*) = (\sum_{k\geq 0} 2^{-k}(\langle x^*, x_k\rangle)^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x^* \in X^*,$$

est faible* semi-continue inférieurement et faible* séquentiellement continue telle que $h_{|K}$ a un minimum faible*-fort en 0.

Puisque $(p_n)_n$ converge faible* vers 0 et que h est faible* séquentiellement continue, alors $(p_n)_n$ est une suite minimisante pour $h_{|K}$. Puisque $(p_n)_n$ est une JN-suite, il suit que 0 n'est pas un minimum fort de $h_{|K}$. On définit maintenant la fonction f par

$$f(x) = (h + \delta_K)^*(\hat{x}), \quad \forall x \in X,$$

où δ_K désigne la fonction indicatrice de K, qui est égale à 0 sur K et prend la valeur $+\infty$ sinon et où pour tout $x \in X$, on note par $\hat{x} \in X^{**}$ l'application linéaire et faible* continue $x^* \mapsto \langle x^*, x\rangle$ pour tout $x^* \in X^*$.

Alors, f est une fonction convexe lipschitzienne, Gâteaux-différentiable en 0 (puisque $h + \delta_K$ a un minimum faible*-fort, voir [5, Corollaire 1.]) mais elle n'est pas Fréchet-différentiable en 0 (car 0 n'est pas un minimum fort de $h + \delta_K$, voir [5, Corollaire 2.]).

6.2 Une Caractérisation des Opérateurs Limités.

Un ensemble A d'un espace de Banach X est dit limité, si toute suite $(p_n)_n$ de X^* qui converge pré-faiblement vers 0, converge uniformément sur A, autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} |\langle p_n, x\rangle| = 0.$$

On sait qu'un sous-ensemble de X relativement compact est limité, mais la réciproque est fausse en général. Un opérateur linéaire continu $T : Y \longrightarrow X$ entre les espaces de Banach Y and X est dit limité, si T envoie la boule unité fermée B_Y de Y sur un sous-ensemble limité de X. Il est facile de voir que $T : Y \longrightarrow X$ est limité si et seulement si, l'opérateur adjoint $T^* : X^* \longrightarrow Y^*$ transforme les suites pré-faiblement convergente vers zéro en des suites convergentes en norme vers zéro. Cette notion d'opérateur limité a été introduite par Bourgain et Diestel dans [28] et a ensuite été étudiée par plusieurs auteurs notamment par Schlumprecht dans sa thèse [68]. On peut aussi consulter les références [31] et [1] pour d'autres informations sur cette notion.

Voici une caractérisation (prouvée dans [13]) des opérateurs limités par la différentiabilité des fonctions convexes.

Théorème 21. *Soit Y et X deux espaces de Banach et $T : Y \longrightarrow X$ un opérateur linéaire continu. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'opérateur T est limité*

(2) *pour toute fonction convexe semi-continue inférieurement $f : X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et tout $a \in Y$ tel que $T(a) \in \text{int}(\text{dom}(f))$, on a que $f \circ T$ est Fréchet-différentiable en $a \in Y$*

avec comme Fréchet-différentielle $T^*(Q) \in Y^*$, dès que f est Gâteaux-différentiable en $T(a) \in X$ avec comme Gâteaux-différentielle $Q \in X^*$.

(3) *pour toute fonction convexe lipschitzienne $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, on a que $f \circ T$ est Fréchet-différentiable en 0 dès que f est Gâteaux-différentiable en 0.*

Il existe une classe d'espaces de Banach $(E, \|.\|_E)$ tel que l'injection canonique $i : E \longrightarrow E^{**}$ est un opérateur limité. Cette classe contient l'espace $c_0(\mathbb{N})$ des suites réelle qui converge vers 0 ainsi que tout sous-espace fermé F de $c_0(\mathbb{N})$ (cette classe est aussi stable par produit et quotient. Pour plus d'informations à ce sujet on réfère à [31]). Comme conséquence du Theorem 21 et en s'appuyant sur un résultat de Gilles Godefroy [43], on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 18. *Soit E un espace de Banach. Supposons que l'injection canonique $i : E \longrightarrow E^{**}$ est limité (on utilisera l'identification $i(x) = x$). Soit $g : E^{**} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement. Alors,*

(1) *la restriction $g_{|E}$ est Fréchet-différentiable sur E en tout point de $E \cap \mathrm{int}(\mathrm{dom}(g))$ en lequel g est Gâteaux-différentiable*

(2) *si de plus, on suppose que g est convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie faible*. Alors, la Gâteaux et Fréchet-différentiabilité coïncident pour g en tout point de $E \cap \mathrm{int}(\mathrm{dom}(g))$.*

Exemple 6. *La norme infinie $\|.\|_\infty$ définie sur $l^\infty(\mathbb{N})$ est Gâteaux-différentiable en un point $x \in c_0(\mathbb{N})$ si et seulement si elle est Fréchet-différentiable en ce point. Plus généralement, soit $f : c_0(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Alors, $(f^*)^* : l^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est Gâteaux-différentiable en un point $x \in c_0(\mathbb{N})$ si et seulement si elle est Fréchet-différentiable en ce point.*

Proposition 22. *Soit Y et X des espaces de Banach et $T : Y \longrightarrow X$ un opérateur limité à image dense. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Alors, $f \circ T$ est Gâteaux-différentiable en $a \in Y$ si et seulement si, $f \circ T$ est Fréchet-différentiable en $a \in Y$.*

Exemple 7. *Prenons $Y = Lip[0,1]$ muni de sa norme $\|.\|_{\infty,1}$ et $X = C[0,1]$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. On sait que l'injection canonique $i : Lip[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ est un opérateur compact à image dense. La Proposition 22 dit donc, que pour tout $\varphi \in Lip[0,1]$, on a que $\|.\|_\infty$ (considéré comme fonction convexe sur $Lip[0,1]$) est Gâteaux-différentiable en φ si et seulement si elle est Fréchet-différentiable en φ. On arrive à montrer (voir [14] et [19]) que la norme $\|.\|_\infty$ est Fréchet-différentiable sur un sous-ensemble G_δ dense de $Lip[0,1]$.*

6.3 Une Caractérisation des Opérateurs Compacts.

Un espace de Banach X est dit espace de Gelfand-Phillips, si tout sous-ensemble limité de X est relativement compact (voir [68]). Dans ce cas, pour tout espace de Banach Y, si $T : Y \longrightarrow X$ est un opérateur limité, alors c'est un opérateur compact. Le Théorème 22 qui suit (prouvé dans [13]) donne une caractérisation des opérateurs compacts en terme de différentiabilité des fonctions lipschitziennes et sa preuve repose sur le Théorème 21 (prouvé dans [13]) et le lemme suivant qu'on a prouvé dans [19] :

Lemme 8. *Soit X, Y et Z trois espaces de Banach et $T : Y \longrightarrow X$ un opérateur compact. Supposons qu'une fonction localement lipschitzienne f définie d'un ouvert U de X dans Z est Gâteaux-différentiable en $Ty \in U$ pour un certain point $y \in Y$. Alors, $f \circ T$ est Fréchet-différentiable en y.*

Théorème 22. *Soit Y un espace de Banach et X un espace de Gelfand-Phillips. Soit $T : Y \longrightarrow X$ un opérateur linéaire continu. Alors, T est compact si et seulement si, pour toute fonction localement lipschitzienne $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et tout point $y \in Y$, $f \circ T$ est Fréchet-différentiable en $y \in Y$ dès que f est Gâteaux-différentiable en $T(y) \in X$.*

Question 1. *(ouverte) La caractérisation des opérateurs compacts donnée dans Théorème 22 reste t-elle toujours vraie si on ne suppose pas que X est un espace de Gelfand-Phillips ?*

Rappelons le théorème de Zajiček [74] :

Théorème 23. (Zajiček) *Soit X un espace de Banach séparable et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Alors, l'ensemble $NG(f)$ des points de non Gâteaux-différentiabilité de la fonction f, peut être recouvert par une réunion dénombrable de $d.c$-$hypersurfaces$.*

Notons qu'un ensemble limité d'un espace séparable est relativement compact [28]. On déduit le résultat suivant à partir du Théorème 23 et la Proposition 22.

Corollaire 19. *Soit Y un espace de Banach séparable, X un espace de Banach et $T : Y \longrightarrow X$ un opérateur compact à image dense. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction convexe continue. Alors, l'ensemble des points où $f \circ T$ n'est pas Fréchet différentiable peut être recouvert par une réunion dénombrable de $d.c$-$hypersurfaces$.*

Exemple 8. *Soit E un sous-espace de Banach séparable de $(Lip[0,1], \|.\|_{\infty,1})$ ($Lip[0,1]$ n'est pas séparable). Alors, la norme $\|.\|_\infty$ est Fréchet différentiable sur E en dehors d'un ensemble négligeable c'est-à-dire qui peut être recouvert par une réunion dénombrable de $d.c$-$hypersurfaces$.*

On s'intéresse maintenant à la différentiabilité des fonctions localement lipschitziennes à valeurs dans un espace qui a la propriété de Radon-Nikodym. On a obtenu dans [19] le théorème suivant.

Théorème 24. *Soit Y un espace de Banach qui a la propriété de Radon-Nikodym et Z un espace de Banach séparable. Soit X un espace de Banach et supposons qu'il existe un opérateur compact T de X dans Z telle que TX est dense dans Z. Alors,*

(i) l'ensemble TX n'est pas Aronszajn négligeable dans Z.

(ii) Pour toute fonction localement lipschitzienne $f : Z \longrightarrow Y$, il existe un sous-ensemble B de Z qui est Aronszajn-négligeable et tel que $f \circ T$ est Fréchet-différentiable en tout point de $T^{-1}(Z \setminus B)$.

Exemple 9. *Avec $X = Lip[0,1]$, $Y = \mathbb{R}$, $Z = C[0,1]$ et $T = i$ l'injection canonique, on obtient qu'il existe un sous-ensemble B de $C[0,1]$ qui est Aronszajn-négligeable et tel que $\|.\|_\infty$ est Fréchet-différentiable en tout point de $i^{-1}(C[0,1] \setminus B)$.*

6.4 Une Caractérisation de la Propriété de Schur.

Soit X et Y deux espaces de Banach et f une fonction définit sur un ouvert U de Y et à valeurs dans X. On dit que f est faiblement différentiable en un point y_0 de U si, pour toute fonctionnelle x^* du dual topologique X^*, $x^* \circ f$ est différentiable en y_0. Pour un entier naturel $k > 0$, on dira que f est faiblement C^k, ou faiblement de classe C^k si, pour tout $x^* \in X^*$, $x^* \circ f$ est de classe C^k. Il est mentionné par N. Bourbaki dans [27] et démontré par Gutiérrez et Llavona dans [42] qu'une fonction faiblement C^k est toujours de classe C^{k-1}. Il existe par ailleurs des exemples de fonctions faiblement C^1 mais nulle part différentiable. En effet, soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow c_0(\mathbb{N})$ définie par $f(t) = (f_n(t))_{n\geq 1}$, où

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad f_{2p-1}(t) = \frac{cos(pt)}{p} \text{ et } f_{2p}(t) = \frac{sin(pt)}{p}.$$

Il est alors bien connu (voir [42]), que f est faiblement C^1 mais nulle part différentiable. On rappel qu'un espace de Banach X a la propriété de Schur si toute suite faiblement convergente est convergente pour la norme. L'espace $l^1(\mathbb{N})$ est l'espace de dimension infinie le plus classique qui a la propriété de Schur. On a montré dans [19] que la notion de différentiabilité faible et la notion de Fréchet-différentiabilité coïncident si et seulement si X a la propriété de Schur.

Théorème 25. *Soit X un espace ayant la propriété de Schur, U un ouvert d'un espace de Banach Y et $y_0 \in U$. Soit $f : U \longrightarrow X$ une fonction faiblement différentiable en y_0. Alors, f est Fréchet-différentiable en y_0.*

Les propriétés du Théorème 25 sont en fait une caractérisation des espaces de Schur.

Proposition 23. *Soit X un espace qui n'a pas la propriété de Schur. Alors, il existe une fonction $f : [-1, 1] \longrightarrow X$ non différentiable en 0 mais telle que, pour tout voisinage ouvert U de $f(0)$ dans X et pour toute fonction $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $f(0)$, $g \circ f$ est différentiable en 0.*

Une construction possible de la fonction f se fait de la manière suivante : Soit $(x_n)_n$ une suite de X qui converge faiblement vers 0 et telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. on définit f par $f(0) = 0$, $f(2^{-n}) = 2^{-n}x_n$, f est affine sur chaque intervalle $[2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$ et f est paire.

On obtient a partir du Théorème 25 le corollaire suivant.

Corollaire 20. *Soit X un espace de Banach avec la propriété de Schur, U un ouvert d'un espace de Banach Y et f une fonction de U dans X. Soit $k > 0$ un entier et supposons que f est une fonction faiblement C^k. Alors f est une fonction de classe C^k.*

6.5 Une Caractérisation de la Propriété de Radon-Nikodym.

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, F un sous-ensemble fermé de X et x_0 un point de F. On dit que x_0 est un point de F fortement exposé, s'il existe $p_0 \in X^*$ tel que toute suite $(x_n)_n$ de F qui satisfait $\lim_n \langle p_0, x_n \rangle = \sup_{x\in F} \langle p_0, x \rangle$ converge en norme vers x_0. Dans ce cas, on dit que p_0 expose fortement x_0 dans F. Par $Se(F)$ on note l'ensemble des fortement exposés de F. On introduit maintenant la notion de point faiblement exposé.

Définition 12. *Soit F un sous-ensemble fermé de F. Un point $x_0 \in F$ est dit faiblement exposé dans F, s'il existe $p_0 \in X^*$ tel que toute suite $(x_n)_n$ de F qui satisfait $\lim_n \langle p_0, x_n \rangle = \sup_{x \in F} \langle p_0, x \rangle$ converge pour la topologie faible vers x_0.*

Dans le cadre de cette définition, on dit que p_0 expose faiblement F en x_0. Il s'ensuit facilement que p_0 atteint son maximum unique sur F en le point x_0. D'où, en particulier, x_0 est un point extrémal de F. On notera $We(F)$ l'ensemble des points faiblement exposés de F. En outre, un point x_0 sera dit un point de continuité de F, si l'application identité $i : (F, \tau_w) \longrightarrow (F, \tau_{\|.\|})$ est continue en x_0, où τ_w (resp. $\tau_{\|.\|}$) désigne la topologie faible (resp. la topologie de la norme) sur F. Il en découle immédiatement que x_0 est fortement exposé dans F si et seulement si x_0 est à la fois faiblement exposé et un point de continuité. Finalement, un point x_0 sera dit un point de dentabilité faible, si pour tout ouvert relatif pour la topologie faible W de F contenant x_0, il existe $p \in X^*$ et $\alpha > 0$ tel que l'ensemble $\{x \in F : \langle p, x \rangle > \langle p, x_0 \rangle - \alpha\}$ est inclus dans W. Une preuve du théorème suivant se trouve dans [29, Corollary 3.7.6].

Théorème 26. (Bourgain) *Un espace de Banach X a la propriété de Radon-Nikodym si et seulement si tout ensemble non vide convexe fermé F de X a au moins un point de dentabilité faible.*

En utilisant ce théorème, on obtient facilement le corollaire suivant.

Corollaire 21. *Pour un espace de Banach X, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) X a la propriété de Radon-Nikodym.

(ii) Tout convexe fermé borné non vide de X est l'enveloppe convexe fermée de ses points faiblement exposés.

(iii) Tout convexe fermé borné non vide de X a au moins un point faiblement exposé.

Collier a démontré dans [34] qu'un espace de Banach X a la propriété de Radon-Nikodym si et seulement si, toute fonction convexe continue pour la norme et semi-continue pour la topologie faible* sur le dual X^*, est génériquement Fréchet-différentiable. En s'appuyant en particulier sur le théorème précédent, nous avons démontré dans [18] la caractérisation suivante des espaces ayant la propriété de Radon-Nikodym.

Théorème 27. *Un espace de Banach X a la propriété de Radon-Nikodym si et seulement si, toute fonction convexe continue pour la norme et semi-continue inférieurement pour la topologie faible* sur le dual X^*, est Gâteaux-différentiable en un certain point de son domaine et dont la Gâteaux-différentielle en ce point est un élément du prédual X.*

Puisque la Fréchet-différentiabilité d'une fonction convexe continue et semi-continue pour la topologie faible* est toujours un élément du prédual, la nouveauté dans le Théorème 27 par rapport au résultat de Collier, est de passer de la Fréchet-différentiabilité à la Gâteaux-différentiabilité et de la densité à la différentiabilité en un point.

Comme conséquence du Théorème 27 on a obtenu le corollaire suivant. Rappelons qu'un espace de Banach X est dit faiblement séquentiellement complet, si toute suite faiblement de Cauchy dans X converge faiblement dans X. Un exemple typique d'espace non réflexif qui a cette propriété est l'espace $L^1(\mu)$, où μ est une mesure positive σ-finie.

Corollaire 22. *Soit X faiblement séquentiellement complet. Alors, X a la propriété de Radon-Nikodym si et seulement si toute fonction convexe continue pour la norme et semi-continue inférieurement pour la topologie faible* sur le dual X^*, est Gâteaux-différentiable en un certain point de son domaine.*

L'espace $c_0(\mathbb{N})$ est un exemple typique d'espace n'ayant pas la propriété de Radon-Nikodym. Dans ce cas, on sait que la norme $\|.\|_1$ est une fonction convexe continue et semi-continue inférieurement pour la topologie faible* sur $l^1(\mathbb{N})$ qui est génériquement Gâteaux-différentiable (nulle part Fréchet-différentiable) avec pour Gâteaux-différentielle dans $l^\infty(\mathbb{N}) \setminus c_0(\mathbb{N})$. Nous avons montré dans [18] qu'il existe un exemple de fonction convexe continue et semi-continue inférieurement pour la topologie faible* sur $l^1(\mathbb{N})$ qui est nulle part Fréchet-différentiable mais Gâteaux-différentiable sur un ensemble dense avec toute ses Gâteaux-differentielles dans $c_0(\mathbb{N})$.

6.6 Différentiabilité de Certaines Semi-Normes sur des Espaces de Fonctions.

On s'est intéressé dans [19] à l'étude de la différentiabilité de la semi-norme $\|.\|_{lip}$ (voir page 13) sur les espaces $(Lip_b^1(\mathbb{R}), \|.\|_{\infty,1})$, $(C_b^s(\mathbb{R}), \|.\|_{C^s})$ $(s > 0)$ et $(C_b^{1,\alpha}(\mathbb{R}), \|.\|_{1,\alpha})$ ainsi qu'à l'étude de la différentiabilité de la norme $\|.\|_{C^1}$ sur $(C_b^1(\mathbb{R}), \|.\|_{C^1})$.

Commençons par ce résultat négatif sur la Fréchet-différentiabilité de la semi-norme $\|.\|_{lip}$.

Proposition 24. *La semi-norme $\|.\|_{lip}$ est nulle part Fréchet-différentiable sur l'espace $(C_b^1(\mathbb{R}), \|.\|_{C^1})$.*

La situation est en fait encore pire sur $(Lip_b^1(\mathbb{R}), \|.\|_{\infty,1})$.

Proposition 25. *La semi-norme $\|.\|_{lip}$ est nulle part Gâteaux-différentiable sur l'espace $(Lip_b^1(\mathbb{R}), \|.\|_{\infty,1})$.*

Si $D(\mathbb{R})$ désigne un espace de Banach de fonctions différentiables, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note δ'_x la fonction linéaire définie par $\delta'_x(\varphi) = \varphi'(x)$ pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Par ϵ on note la fonction signe définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Voici maintenant un premier résultat positif.

Théorème 28. (a) *La semi-norme $\|.\|_{lip}$ est génériquement Gâteaux-différentiable sur $(C_b^1(\mathbb{R}), \|.\|_{C^1})$. Plus précisément, l'ensemble des points de Gâteaux-différentiabilité de $\|.\|_{lip}$, est*

$$G = \{\varphi \in C_b^1(\mathbb{R}) / |\varphi'| \text{ a un maximum fort}\}$$

qui est un sous-ensemble G_δ dense de $(C_b^1(\mathbb{R}), \|.\|_{C^1})$. La Gâteaux-différentielle de $\|.\|_{lip}$ en $\varphi \in G$ est donnée par $\epsilon(\varphi'(x_0))\delta'_{x_0}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ est le point où $|\varphi'|$ a un maximum fort.

(b) *La norme $\|.\|_{C^1}$ est Gâteaux-différentiable sur un sous-ensemble G_δ dense de $(C_b^1(\mathbb{R}), \|.\|_{C^1})$.*

En fait on a aussi un résultat de Fréchet-différentiabilité.

Théorème 29. *Soit* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $s \in \mathbb{N}$ *tel que* $s \geq 2$. *Pour* $X = C_b^s(\mathbb{R})$ *ou* $X = C_b^{1,\alpha}(\mathbb{R})$, *la semi-norme* $\|.\|_{lip}$ *est Fréchet-différentiable en tout point de l'ensemble*

$$\{\varphi \in X/|\varphi'| \text{ a un maximum fort}\},$$

qui est un sous-ensemble G_δ *dense de* X *et la Fréchet-différentielle de* $\|.\|_{lip}$ *est donnée par la même formule.*

Ainsi, on voit que plus la régularité de l'espace de fonctions est meilleure plus la semi norme $\|.\|_{lip}$ est régulière.

Bibliographie

[1] K. T. Andrews, *Dunford-Pettis sets in the space of Bochner integrable functions*, Math. Ann. 241, (1979), 35-41.

[2] Araujo, J., Font, J.J., *On Shilov boundaries for subspaces of continuous functions*, Topology Appl., 77 (1997), 79-85.

[3] J. Araujo, J.J. Font, *Linear isometries between subspaces of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 349 (1997), 413-428.

[4] D. Azagra, J. Ferrera, *Regularization by sup-inf convolutions on Riemannian manifolds : An extension of Lasry-Lions theorem to manifolds of bounded curvature*, J. Math. Anal. Appl. 423, (2015) No 2, 994-1024.

[5] E. Asplund and R. T. Rockafellar, *Gradients of convex functions.* Trans. Amer. Math. Soc. 139, (1969), 443-467.

[6] M. Bachir, *On the Krein-Milman-Ky Fan theorem for convex compact metrizable sets.* Illinois Journal of Mathematics (2017), 60, no. 4 (à paraître).

[7] M. Bachir, *The inf-convolution as a law of monoid. An analogue to the Banach-Stone theorem*, J. Math. Anal. Appl. 420, (2014) No. 1, 145-166.

[8] M. Bachir, *A Banach-Stone type theorem for invariant metric groups*, Topology Appl. 209 (2016) 189-197.

[9] M. Bachir, *Representation of isometric isomorphisms between monoids of Lipschitz functions*, Methods Funct. Anal. Topology, (2017)

[10] M. Bachir, *Well-posedness and infimal convolution.* Journal of Optimization Theory and Applications (2017) (Accepté)

[11] M. Bachir, *Remarks on isometries of products of linear spaces*, Extracta Math. 30 (2015), 1-13.

[12] M. Bachir, *An extension of the Banach-Stone theorem*, J. Austral. Math. Soc. (2017) https ://doi.org/10.1017/S1446788717000271.

[13] M. Bachir, *Limited operators and differentiability*, North-Western European Journal of Mathematics, 3 (2017) 63-73.

[14] M. Bachir, *A non convexe analogue to Fenchel duality*, J. Funct. Anal. 181, (2001) 300-312.

[15] M. Bachir and J. Blot *Infinite Dimensional Infinite-horizon Pontryagin principles for discrete-time problems*, Set-Valued Var. Anal. **23** (2015) 43-54.

[16] M. Bachir and J. Blot *Infinite dimensional multipliers and Pontryagin principles for discrete-time problems*, Pure and Applied Functional Analysis, (2017), 2, no 3, pp. 411-426.

[17] M. Bachir, J. Blot, *Discrete time pontryagin principles in banach spaces*, Pure and Applied Functional Analysis, (2017) (Accepted).

[18] M. Bachir and A. Daniilidis, *A dual characeristation of the Radon-Nikodym Property*, Bull. Austral. Math. Soc. 62 (2000), 379-387.

[19] M. Bachir and G. Lancien, *On the composition of differentiable functions*, Canadian Bull. of Math., 46(4), 2003, 481-494.

[20] H.S. Bear, *The Shilov boundary for a linear space of continuous functions*, Amer. Math. Monthly 68 (1961) 483-485.

[21] J. Bourgain, *Strongly exposed points in weakly compact convex sets in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 58, (1976),

[22] J. Blot and N. Hayek, Infinite-horizon optimal control in the discrete-time framework, Springer, New York, 2014.

[23] J. Blot and H. Chebbi, *Discrete time Pontryagin principle in infinite horizon*, J. Math. Anal. Appl. **246** (2000), 265-279.

[24] J. Blot and P. Cieutat, *Completness of sums of subspaces of bounded functions and applications*, Commun. Math. Anal. **19**(2) (2018), 43-61.

[25] D.A. Carlson, A.B. Haurie and A. Leizarowitz, Infinite horizon optimal control ; deterministic and stochastic systems, Second revised edition, Springer, Berlin, 1991.

[26] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, Vol 1, American Mathematical Society, Colloquium Publications, 48.

[27] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique, Fasc. XXXIII, Variétés différentielles et analytiques, Fascicule de résultats*, Actualités Sci. Indus., no 1333, Hermann, Paris (1971).

[28] J. Bourgain and J. Diestel, *Limited operators and strict cosingularity*, Math. Nachr. 119, (1984), 55-58.

[29] R. Bourgin, *Geometric aspects of convex sets with the Radon-Nikodym property*, Lecture Notes in Mathematics 993 (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983).

[30] J. M. Borwein and M. Fabian, *On convex functions having points of Gâteaux differentiability which are not points of Féchet-differentiability.* Can. J. Math.Vol.45 (6), 1993, 1121-1134.

[31] H. Carrión, P. Galindo, and M.L Lourenco, *Banach spaces whose bounded sets are bounding in the bidual* Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica Volumen 31, (2006), 61-70.

[32] B. Cascales and J. Orihuela *On Compactness in Locally Convex Spaces*, Math. Z. 195, (1987) 365-381.

[33] F.H. Clarke and R.J. Stern *Smooth variational principles and non nonsmooth analysis in Banach spaces, in Non linear Analysis*, Differential equations and Control, (eds), Kluwer, Dordrecht, 369-405.

[34] J. Collier, *The dual of a space with the Radon-Nikodym property*, Pacific J. Math. 64 (1976), 103-106.

[35] T. R. Cranny, *On the behaviour of the sup- and inf-convolution of a function near the boundary*, Bull. Austral. Math. Soc. 54 (1996) 515-520.

[36] R. Deville and G. Godefroy and V. Zizler, *A smooth variational principle with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions*, J. Funct. Anal. 111, (1993) 197-212.

[37] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *Smoothness and Renormings in Banach Spaces*, Pitman Monographs No. 64, London : Longman, 1993.

[38] R. Deville, J. P. Revalski. *Porosity of ill-posed problems*, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 1117-1124.

[39] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate texts in Mathematics, Springer Verlag, N.Y., Berlin, Tokyo (1984).

[40] M.I. Garrido, J.A. Jaramillo, *Variations on the Banach-Stone Theorem*, Extracta Math. 17, (2002) N. 3, 351-383.

[41] M.I. Garrido, J.A. Jaramillo, *Lipschitz-type functions on metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008) 282-290.

[42] J. M. Gutiérrez, J. G. Llavona, *Composition operators between algebras of differentiable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 338 (1993), no. 2, 769-782.

[43] G. Godefroy, *Prolongement de fonctions convexes définies sur un espace de Banach E au bidual E^{**}*, C. R. Acad. Sci. Paris (1981).

[44] P. Habala, P. Hàjek, V. Zizler, *Introduction to Banach Spaces*, Lect. Notes Math., Matfyzpress, Charles University, Prague, 1996.

[45] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemarechal, *Fundamentals of convex analysis.* Grundlehren Text Editions, Springer-Verlag, Berlin (2001).

[46] A. Jiménez-Vargas, M. Villegas-Vallecillos, *2-Local Isometries on Spaces of Lipschitz Functions*, Canad. Math. Bull. 54,(2011), 680-692.

[47] B. D. Khanh *Sur la Φ-Convexité de Ky Fan*, J. Math. Anal. Appl. 20, (1967) 188-193.

[48] V. L. Klee, *extrémal structure of convex sets* II, Math. Z. 69 (1958), 90-104.

[49] V. L. Klee, *Invariant metrics in groups (solution of a problem of Banach)*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952) 484-487

[50] J.M. Lasry and P.-L. Lions, *A remark on regularisation in Hilbert spaces*, Israel J. Math. 55 (1986), 257-266.

[51] K. Fan, *On the Krein-Milman theorem*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., (1963), 211-219.

[52] E. Mac Shane, *Extension of range of functions.* Bull. A.M.S. 40(12) : (1934) 837-842.

[53] S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Math. 4 (1933), 70-84.

[54] M. Krein, D. Milman *On extreme points of regular convex sets*, Studia Math. 9, (1940) 133-138.

[55] P. Michel, *Some clarifications on the transversality condition*, Econometrica. 58 (1990), 705-728.

[56] F. Mignot, *Contrôle dans les inéquations variationelles elliptiques*, J. Funct. Anal. 22, (1976) 130-185.

[57] D.P. Milman, *Characteristic of extrémal functions*, Dokl. Akad, Nank SSSR 57 (1947) I 119-122 (in Russian).

[58] D.P. Milman, *On integral representations of functions of several variables*, Dokl. Akad, Nank SSSR 87 (1952) 9-10 (in Russian).

[59] A.A. Milutin, *Isomorphisms of spaces of continuous functions on compacta of the power of the continuum*, (Russian), Teor. Funktsiî Funktsional. Anal. Prilozhen, 2 (1966), 150-156.

[60] J.-J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), N. 2, (1966-1967) 1-108.

[61] J.-J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace hilbertien.* Bulletin de la SMF 93 (1965) : 273-299.

[62] R. R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability.* Lecture Notes in Mathematics 1364, (1993). Springer-Verlag, Berlin.

[63] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem*, Second Edition, Lecture Notes in Math. Berlin, 1757 (2001).

[64] D. Preiss, *Differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces*, J. Funct. Anal., 91 (1990), 312-345.

[65] J. W. Roberts, *A compact convex set with no extreme points*, Studia Math. 60 (1977), no. 3, 255-266.

[66] R.T. Rockafellar *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1997).

[67] N. L. Stokey, R.E. Lucas and E.C. Prescott, *Recursive methods in economic dynamics*, Harvard University Press, Cambridge, MA, (1989).

[68] Th. Schlumprecht, *Limited sets in Banach spaces*, Dissertation, Ludwigs-Maximilians-University, München, (1987).

[69] T. Strömberg, *The operation of infimal convolution*, Dissertationes Math. 352 (1996), 1-58.

[70] N.S. Trudinger, *On the twice differentiability of viscosity solutions of nonlinear elliptic equations*, Bull. Austral. Math. Soc. 39 (1989), 443-447.

[71] A.E. Taylor and D.C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, 2nd edn. Wiley, New York, (1980).

[72] N. Weaver, *Isometries of noncompact Lipschitz spaces*, Canad. Math. Bull., 38 (1995), 242-249.

[73] D. Zagrodny, *The cancellation law for inf-convolution of convex functions*, Studia Math. 110 (3) (1994) 271-282.

[74] L. Zajiček, *On the differentiation of convex functions in finite and infinite dimensional spaces*, Czechoslovak Math. J. 29, (1979), no. 3, 340-348.

[75] L. Zajiček, *On sigma-porous sets in abstract spaces*, Abstr. Appl. Anal. vol. (2005), issue 5, 509-534,

[76] A.J. Zaslavski, Turnpike properties in the calculus of variations and optimal Control, Springer Science+Business Media, New york, N.Y., (2006).