Sujet B

Statistiques et Probabilités, L2 MASS, Interrogation 1

14/03/2012, Durée : une heure et demi

Documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.

NOM : **PRÉNOM :**

Exercice 1. Variables à densité

On note $\mathbb{1}_{(0,2]\times(0,2]}(x,y)$ la fonction qui vaut 1 si $x \in (0,2]$ et $y \in (0,2]$, et 0 ailleurs. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la densité est donnée par

$$f(x,y) = \frac{a}{\sqrt{xy}} \mathbb{1}_{(0,2]\times(0,2]}(x,y) \quad \text{avec} \quad a > 0.$$

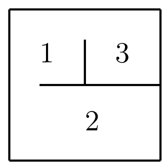
1. Calculer a.

2. Donner les lois marginales de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

3. Donner la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$.

Exercice 2. Chaîne de Markov

Une souris évolue dans un appartement de plan succinct



en choisissant au bout de chaque minute de rester dans la pièce où elle était ou une seule ouverture pour se rendre dans une autre pièce.

i) Si elle est dans la pièce n°3 (état e_3), il y a une chance sur deux qu'elle reste dans cette pièce pour la minute suivante.

ii) Si elle est dans la pièces n°1 (état e_1) ou n°2 (état e_2), elle n'y reste pas pour la minute suivante.

iii) Si elle est dans la pièce n°1, il y a une chance sur trois qu'elle se rend dans la pièce n°3 pour la minute suivante.

Cette évolution peut être représentée par une chaîne de Markov notée $X_1, \ldots, X_n, \ldots$

1. Donner la matrice de transition. Tous les états sont ils récurrents ?

2. Calculer la mesure invariante.

3. Montrer par deux méthodes qu'il existe un chemin de longueur 2 qui va de e_3 à e_3. Calculer $\mathbb{P}(X_3 = e_1 \mid X_1 = e_1)$.

4. Supposons que la souris est dans la pièce n°1 pendant la première minute. Dans quelle pièce se trouvera t elle le plus probablement à la 180ème minute (soit au bout de 3 heures) ?

Exercice 3. Couple des variables aléatoires discrètes

Supposons que $X_1, X_2, \ldots$ sont des variables aléatoires i.i.d. qui ne prennent que deux valeurs 0 et 1 avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p, 0 < p < 1$. Soit N une variable aléatoire discrète dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ avec $\mathbb{P}(N = 0) = \mathbb{P}(N = 2) = 1/4$. La variable N et la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes. On considère la variable aléatoire S définie par

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

où $S = 0$ si $N = 0$.

1. Donner la loi jointe du couple (N, S) et la loi marginale de S. (Indication : $\mathbb{P}(N = 0, S = 1) = \mathbb{P}(N = 0, S = 2) = \mathbb{P}(N = 1, S = 2) = 0$)

2. Déterminer les lois conditionnelles $\mathbb{P}(S \mid N = 1)$ et $\mathbb{P}(S \mid N = 2)$. Donner les noms et les paramètres des lois obtenues.

3. Calculer les espérances $\mathbb{E}(S \mid N = 0)$, $\mathbb{E}(S \mid N = 1)$ et $\mathbb{E}(S \mid N = 2)$. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(S)$.

4. Supposons que N suit la loi $Bin(n, q)$, Qu'en déduisez vous pour $\mathbb{E}(S)$? (Indication : $\mathbb{E}(N) = nq$)

5. Supposons que N suit la loi $Pois(\lambda)$. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(S)$.