Statistiques et Probabilités, L2 MASS, Interrogation 1
27/02/2013, Durée : une heure et quart
Documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.

Il est indispensable d'inscrire le N° étudiant Paris 1 sur votre copie !

Exercice 1. Couple des variables aléatoires discrètes

Dans cet exercice, notons

$$n = \text{le dernier chiffre de votre N° étudiant.}$$

Par exemple, si votre N° étudiant est 11123456, alors $n = 6$.

Soit N une variable aléatoire discrète à valeurs dans l'ensemble $\{n, n+1\}$ avec $\mathbb{P}(N = n) = 1/3$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1)$. Les variables N et X sont indépendantes. Définissons

$$Y = X^N.$$

Rappelons que $0^0 = 1$.

1. Donner la loi jointe du couple (X, Y) et la loi marginale de Y.
2. Déterminer les lois conditionnelles $\mathbb{P}(Y \mid X = -1)$, $\mathbb{P}(Y \mid X = 0)$ et $\mathbb{P}(Y \mid X = 1)$.
3. Calculer les espérances $\mathbb{E}(Y \mid X = -1)$, $\mathbb{E}(Y \mid X = 0)$ et $\mathbb{E}(Y \mid X = 1)$. En utilisant **deux** méthodes différentes, calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$.
4. Quelle est la matrice de variance-covariance de ce couple ?

Exercice 2. Chaîne de Markov 1

Dans cet exercice, notons

$$X_0 = \text{les trois derniers chiffres de votre N° étudiant.}$$

Par exemple,
si votre N° étudiant est 11123456, alors $X_0 = 456$,
si votre N° étudiant est 11123056, alors $X_0 = 56$,
si votre N° étudiant est 11123006, alors $X_0 = 6$.

Définissons une suite de variables aléatoires suivante

$$X_{n+1} = -X_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

1. Montrer que $X_0, X_1, X_2, \dots$ est une chaîne de Markov.
2. Donner l'espace d'état E et la matrice de transition M.
3. Quels sont les états récurrents et les états transitoires de cette chaîne ?
4. Trouver une mesure invariante μ pour cette chaîne.
5. A-t-on $M^n(1, 0)^T \to \mu$, lorsque $n \to \infty$? Pourquoi ?

Tournez la page s.v.p. –>

Exercice 3. Chaîne de Markov 2

Dans cet exercice, la notation X_0 est la même que celle de l'exercice 2.

Soit $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi Bernoulli de paramètre $1/4$, c.a.d. $\mathbb{P}(Y_0 = 1) = 1/4$. Définissons une suite de variables aléatoires suivante

$$X_{n+1} = (-1)^{\quad n} X_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

1. Montrer que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = \quad_{n+1} \,|\, X_n = \quad_n) = \begin{cases} 3/4, & \text{si} \quad\ _{n+1} = \quad_n, \\ 1/4, & \text{si} \quad\ _{n+1} = - \quad_n. \end{cases}$$

En déduire que $X_0, X_1, X_2, \ldots$ est une chaîne de Markov.

2. Donner l'espace d'état E et la matrice de transition M.
3. Trouver une mesure invariante μ pour cette chaîne.
4. A-t-on $M^n(1, 0)^T \to \mu$, lorsque $n \to \infty$? Pourquoi ?

Tournez la page s.v.p. –>