Statistiques et Probabilités, L2 MASS, Interrogation 1
20/02/2014, Durée : une heure et vingt minutes
Le barème est indicatif. Documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.
sujet A

Questions de cours *(4 points)*

1. On considère deux événements A et B d'une expérience aléatoire fixée. Donner la condition nécessaire et suffisante pour que A et B soient indépendants. Supposons que $\mathbb{P}(A) = 0,3$, $\mathbb{P}(B) = 0,5$ et $A \cap B = \emptyset$. Les événements A et B sont ils indépendants ? Calculer les probabilités suivantes, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A|B)$ et $\mathbb{P}(A \cup \overline{B})$.

2. Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble des valeurs possibles est noté par Ω. Écrire la définition de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathrm{Var}\,(X)$.

Exercice 1. Chaîne de Markov *(8 points)*

Soit $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme à valeurs dans l'ensemble $\{1/2, 1, 2\}$. Définissons une suite de variables aléatoires suivante

$$X_0 = 1/2, \quad X_{n+1} = \max(1/X_n, Y_n) \quad n = 0, 1, \ldots.$$

1. Montrer que $X_1 = 2$.

2. Montrer que la loi de probabilité de X_{n+1} conditionnée par l'événement $\{X_n = 2\}$ est la même que celle de Y_0, c'est-à-dire, pour tous $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1/2 \,|\, X_n = 2) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 2) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 2 \,|\, X_n = 2) = 1/3.$$

3. Montrer que $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 1) = 2/3$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2 \,|\, X_n = 1) = 1/3$, pour tous $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $X_0, X_1, X_2, \ldots$ est une chaîne de Markov.

4. En notant $e_1 = 1/2$, $e_2 = 1$ et $e_3 = 2$, donner la matrice de transition M de cette chaîne.

5. Calculer la mesure invariante μ de la chaîne.

Exercice 2. Couple d'entiers *(8 points)*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0\} \times \mathbb{N}\backslash\{0\}$, dont la loi jointe est donnée par

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = a^{-i} b^j \quad \text{pour tous } (i,j) \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \times \mathbb{N}\backslash\{0\},$$

où $a, b > 0$. (Indication : $\sum_{i=n}^{\infty} x^i = x^n/(1-x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, si $|x| < 1$.)

1. Pour que la loi jointe soit bien définie, quelles conditions doivent remplir a et b ?

2. Donner les lois marginales de X et Y. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

4. Quelle est la loi de la variable $Z = X - Y$?