Statistique et Probabilités, L2 MASS, Interrogation 1
04/03/2015, Durée : une heure et quart
Le barème est indicatif. Documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1. Couple de variables aléatoires *(10 points)*

Une urne contient quatre boules numérotées 0, 1, 2 : deux de numéro 0, une de numéro 1 et une de numéro 2. On tire successivement et **sans** remise deux boules et on associe à cette expérience le couple (X, Y) où X est le numéro de la première boule tirée et Y est le numéro de la deuxième boule.

1. Donner la loi du couple et les lois marginales de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

2. Calculer les espérances et les variances de X et Y.

3. Calculer la covariance de X et Y.

On propose un jeu à partir du tirage. Le joueur gagne 5 euros $\times$ la somme des deux nombres obtenus. C'est à dire que le gain de jeu est $5 \times (X + Y)$ euros.

4. Notons Z la somme des deux nombres obtenus. Donner la loi de Z.

5. En déduire la loi du gain de jeu et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 2. Chaîne de Markov *(10 points)*

Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir. Il y a une chance sur trois qu'il pleuve après un jour de beau temps. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps. Notons l'état « il fait beau »par e_1, l'état « il pleut »par e_2 et l'état « il neige »par e_3.

1. Former, à partir de cela, une chaîne de Markov et en déterminer sa matrice de transition.

2. Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain ?

3. Considérons les jours dans une semaine. Supposons qu'il pleut lundi. Calculer la probability qu'il pleuve jusqu'au mercredi et il fasse beau jeudi **et** la probabilité qu'il pleuve mercredi sachant qu'il fasse beau jeudi.

4. Si on suppose que l'on a que deux états : beau temps et mauvais temps, notés par e_1 et e_2, déterminer la matrice de transition de la nouvelle chaîne ainsi obtenue.

5. Calculer la mesure invariante de la nouvelle chaîne obtenue dans la question précédente.