A

Statistiques et Probabilités, L2 MIASHS, Interrogation 1
07/11/2018, Durée : une heure et demie

Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées.

Écrivez "Sujet A/B" sur votre copie !

Exercice 1. Couple de variables aléatoires *(7 points)*

X et Y sont deux variables aléatoires discrètes ayant le même ensemble de valeurs possibles : $\{0, 0.5, 1\}$. La loi du couple est donnée par le tableau suivant :

Y\ X	0	0.5	1
0	0.1	0.1	0.1
0.5	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.1	0.1

1. Calculer les lois marginales de X et de Y.
2. Calculer la loi conditionnelle $\mathbb{P}(X|Y = 0.5)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}\,(X)$ et $\mathbb{E}(X|Y = 0.5)$.
4. Quelle est la matrice de variance-covariance de ce couple ? X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 2. Chaîne de Markov *(8 points)*

On considère la suite $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ telle que $X_1 = 0$ et qui vérifie l'équation

$$X_{n+1} = \sin\left[\left(X_n + \frac{e_n}{2}\right)\pi\right]$$

où $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite des variables aléatoires i.i.d. issues de loi de Bernoulli de paramètre 1/4.

1. Montrer que $X_1, X_2, X_3, \ldots$ est une chaîne de Markov.
2. Quels sont les états possibles pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Lesquels sont récurrents ? lesquels ne le sont pas ?
3. Calculer la matrice de transition de la chaîne de Markov.
4. Calculer la mesure invariante.

Exercice 3. Couple d'entiers *(5 points)*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On pose

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k, Y = n) = \frac{\alpha^n (1-\alpha)^{k-n} k!}{n!(k-n)!C} \mathbb{1}_{\{0\leq n\leq k\leq 9\}}(k, n)$$

où $C > 0$ et $0 < \alpha < 1$.

1. Calculer C.
2. Déterminer la loi de X. Donner le nom et le(s) paramètre(s) de cette loi.
3. Calculer $\mathbb{P}(Y = 9)$.
4. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Récapitulatif de lois usuelles

Nom	Valeurs prises	Loi	Espérance	Variance
Uniforme, $\mathcal{U}_n$	{1,...,n}	$\mathbb{P}(X=k)=1/n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli, $\mathcal{B}er(p)$	{0,1}	$\mathbb{P}(X=1)=p, \mathbb{P}(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Binomiale, $\mathcal{B}in(n,p)$	{0,...,n}	$\mathbb{P}(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique, $\mathcal{G}(p)$	{1,2,3,...}	$\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson, $\mathcal{P}(\lambda)$	{0,1,2,...}	$\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\lambda^k/k!$	λ	λ